1509

BULETINUL
POLITEHNICEI DIN BUCUREŞTI

BULLETIN DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE BUCAREST

MITTEILUNGEN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BUKAREST

ANUL XIII. — 1942
Nr. 1—4

27

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ, BUCUREŞTI, 1943

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratleltár 3629

BULETINUL POLITEHNICEI DIN BUCUREŞTI

XIII (1942) Nr. 1—4

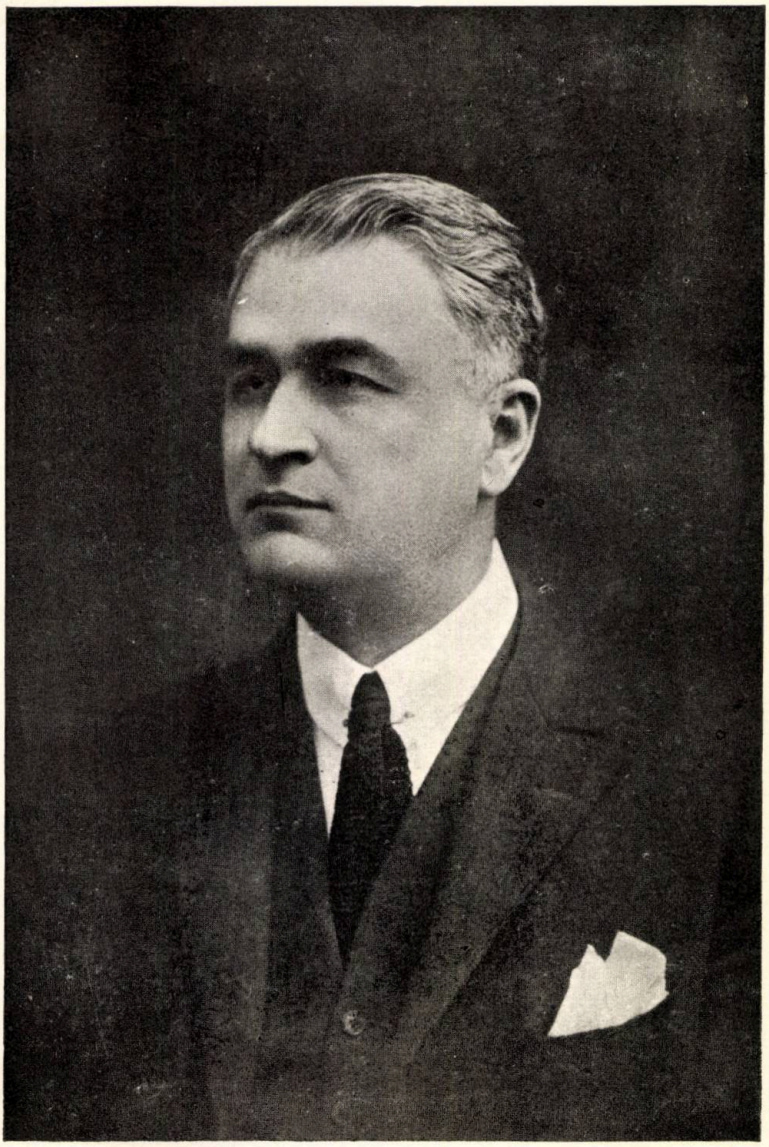
TABLE DES AUTEURS

Pag.

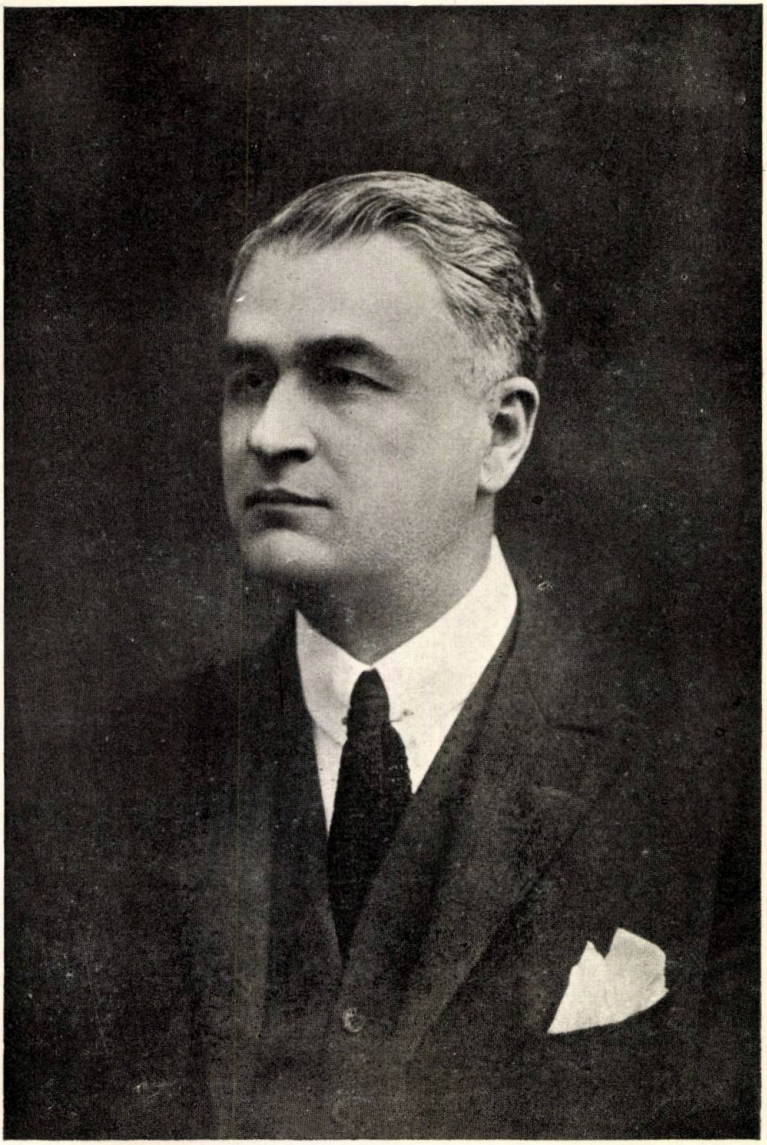
AVRAMESCU A. Erwärmungsberechnung elektrischer Kontakte Differentialgleichung, Anfangs- und Randbedingungen 423
BELCOT C. Sur la bromométrie (7-e note) 57
BELCOT C. Sur le dosage du phénol (6-e note) 381
BIANU V. Sur les miroirs paraboliques 46
BOUVAIST M. Sur les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les cercles tangents aux trois côtés 33
BRATU E. Die Aktivitätskoeffizienten der Gase 346
BUDEANU C. Au sujet de la connexion entre les phénomènes électriques et magnétiques 119
CARSTOIU I. Nouveaux points de vue sur quelques théorèmes fondamentaux de la mécanique des fluides 42
CARSTOIU I. Sur le mouvement général d'un fluide parfait 316
CERNESCU N. Eklärung einer beim Kationenumtausch auftretenden Gesetzmässigkeit 362
CERNESCU N. Der Sättigungszustand des Bodens und die Wasserstoffionenkonzentrationen 242
CHIRIȚĂ C. Wiederholte Bodenauszüge mittels Ultrafiltration 261
CIORĂNESCU N. Sur un problème pour les fonctions armoniques dans un cercle 26
CIURILEANU D. Le rapporteur autoréducteur 304
CLAUDIAN V. Einige neue Betrachtungen über die Kriterien erster und zweiter Art für die Reihen mit positiven Gliedern 31
CONSTANTINESCU I. Aspects physiques et mathématiques des phénomènes transitoires 131
CRETZOIU P. Die bisher aus der Dobrogea bekanntgewordenen Leicanoraceen 84
CRETZOIU P. Die Fundorte der bisher aus Rumänien bekanntgewordenen Arten der Gattung Usnea-Wigg 400
CRETZOIU P., GEORGESCU C. und LUPE I. Zur Kenntnis der Eichenformen des Bezirkes Vlasca in der Walachei 91
CRETZOIU P. Verzeichnis der bisher aus Eurasien bekanntgewordenen Carpinus-Arten 396
CRETZULESCU C. et IONESCU T. Contributions à la chloruration du propane 68
DUMITRESCU D. Auftrieb und Wiederstand für mittlere und kleinere Reynoldsche Zahlen 324

Pag.

GEORGESCU C., CRETZOIU P. und LUPE I. Zur Kenntnis der Eichenformen des Bezirkes Vlasca in der Walachei 91
GHEORGHIU A. Quelques considérations sur la perspective 10
GHEORGHIU I. S. Augmentation de la capacité de trafic d'une ligne de chemin de fer par dédoublement ou par électrification de la ligne . . . 150
ILIE M. L'importance de l'accident tectonique de Coada Malului Schitului. (Département de Prahova) 392
ILIE M. Phénomènes tectoniques dans les Subcarpates roumaines 378
ILIE M. Remarques sur les dépôts attribués au Sénonien dans la région de Zlatna 388
IONESCU T. et CRETZULESCU C. Contribution à la chloruration du propane . 68
LINTEŞ I. L'accélération du projectile dans l'âme 479
LINTEŞ I. La balistique du bombardament aérien 182
LUPE I., GEORGESCU C. und CRETZOIU P. Zur Kenntnis der Eichenformen des Bezirkes Vlasca in der Walachei 91
MARINESCU M. Un nouveau circuit sélectif 157
MATEESCU CR. Résistance des constructions chargées au delà des prévisions réglementaires 94
OSTASCO A. Topitoarele dela Baia-de-Aramă din timpuri preistorice până la sfârşitul secolului XVII 267
PĂDURARU O. Bibliographie des publications de M. N. VASILESCU-KARPEN I—X
PARTENI-ANTONI C. et POPINCEANU N. Le fonctionnement d'une machine à courant continu quand la vitesse varie 447
PAVEL D. Beitrag zum Entwurf von Wasserturbinen. 179
PAVEL D. Wasserwirtschaftliche Betrachtungen für die Donau-Werke beim Eisernen Tor 440
PETRESCU G. Sur les conditions de fonctionnement du réseaux triphasés déséquilibrés 139
POMPEIU D. Formes diverses du théorème des accroissements finis . . . 23
POPINCEANU N. et PARTENI-ANTONI C. Le fonctionnement d'une machine à courant continu quand la vitesse varie 447
ROSCA R. Sur les réseaux (M) 295
SFINŢESCU CINCINAT I. Orientation phototropique en urbanisme 279
SIKORSKI G. Application des fonctions elliptiques à l'étude de quelques cas de la flexion de tiges 336
STEOPOE A. Untersuchungen über die Zersetzung des erhärteten Mörtels und Betons mit Salzsäure 108
STOENESCU A. Sur les systèmes de forces sous l'action des quelles un mobile parcourt une trajectoire donnée 309
TĂNĂSESCU I. La réaction mixte dans les amplificateurs 466
TĂNĂSESCU T. Résonance des circuits couplés 162
TEODORESCU C. Das Quellen des Zementmörtels in feuchter Luft 104
THEBAULT V. Sur l'hexagone à côtés parallèles trois par trois 5
TIPEI N. Sur la stabilité statique longitudinale des biplans 224
TOPORESCU E. Sur le mécanisme de la pression osmotique 52
TOPORESCU E. Surle mécanisme de la précipitation des substances colloïdales 376
VLADUŢIU O. L'arbre bronchique et les zones pulmonaires chez les animaux domestiques 412
ZAMFIRESCU G. L'emplacement des dans le profondeur des ailes de l'avion 202



PROF.-ING. NICOLAS VASILESCO KARPEN



PROF.-ING. NICOLAS VASILESCO KARPEN

LE CORPS DIDACTIQUE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
DE BUCAREST DÉDIE CE VOLUME,
EN TÉMOIGNAGE DE GRATITUDE

AU PROFESSEUR

NICOLAS VASILESCO KARPEN

À L'OCCASION DE L'ACHÈVEMENT DE SA CARRIÈRE
PROFESSORALE APRÈS UNE FÉCONDE ACTIVITÉ
DE 36 ANNÉES COMME PROFESSEUR
ET 20 ANNÉES COMME RECTEUR
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

01 BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE DES PUBLICATIONS DE M. LE PROF.-ING. N. VASILESCO KARPEN

Rédactée par l'Ing. O. PĂDURARU

I. TRAVAUX PUBLIÉS SANS COLLABORATEURS (PAR ORDRE D'APPARITION)

VASILESCO KARPEN N.: Sur la mesure de $\frac{C}{c}$ par l'expérience de M. CLEMENT et DESORMES. Correction de l'erreur signalée par REGNAULT. *Bull. Scientif. trimestriel de l'Assoc. amicale des Elèves de la Fac. des Sc. de l'Univ. de Paris* (1901), Nr. 4, pp. 78—80.

— Principe relatif à la distribution des lignes d'induction magnétique. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 134 (1902), pp. 88—90.

— Sur la réaction magnétique de l'induit des dynamos. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 134 (1902), pp. 827—829.

— Sur la convection électrique. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 136 (1903), pp. 609—611.

— Sur la convection électrique. *Journal de Physique*, Paris [4], 2 (1903) Sept., pp. 667—677, 1 fig.

— Sur l'entraînement de la charge dans les expériences de convection électrique. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 136 (1903), pp. 998—1001.

— Recherches sur l'effet magnétique des corps électrisés en mouvement. *(Thèse*, Paris, 1904; *Fac. Sc. Univ.)*. Paris, 1904; IV, 115 p. (16 × 24), 12 fig., Gauthier-Villars, publiée aussi dans les: *Annales de Chimie et de Physique* (1904).

— Nouveau récepteur pour la télégraphie sans fil. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 138 (1904), pp. 489—491.

— Memoriu asupra titlurilor şi lucrărilor ştiinţifice. Buc. [1907]; 4 p. (21 × 34). Tip. F. Göbl Fii.

— Lucrări ştiinţifice originale. Buc. 1908; 31 p. (16 × 23), fig., 2 pl. Tip. F. Göbl Fii.

— Precizarea noţiunii de energie cinetică [Rezumat]. *Soc. Roum. Sc., Bull.* 17 (1908), Nr. 5/6 p. 265.

— Sur la téléphonie à grande distance. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 149 (1909), pp. 848—850.

— Motor electric cu colector fix, cuplu constant şi viteză variabilă (pentru tracţiune electrică. Brevet Regal Român). [Extr. din: *Bul. Soc. Politecnice*, 28 (1912), Nr. 12, pp. 853—857]. Buc. 1912; 7 p. (16 × 23), 2 fig. Tip. «Cooperativă».

— Le vol à la voile [Extrait du: *Journal de Physique* (5) 3 (1913), Nr. 2, pp. 101—111; Nr. 5, pp. 399—412]. Tours, 1913; 24 p. (16 × 24), 11 fig., Imprim. Deslis Frères & C-ie.

— Sur le vol des oiseaux dit « vol à la voile », I-III. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 156 (1913), pp. 213—215; *Errata*, p. 366; pp. 762—764 et 1663—1665.

— Stațiunea de telegrafie fără fir dela Băneasa (București). [Extras din: *Bul. Soc. Politecn.*, 31 (1915), Nr. 5/6, pp. 559—576]. Buc., 1915; 20 p. (16 × 23), 7 fig., 2 fotog. Tip. « Cooperativă ».

— Probleme propuse, Nr. 2327, 2353 și 2781. *Gazeta Matematică*, 21 (1915/16), p. 80; p. 159/160 și 26 (1920/21), p. 104.

— Sur la cause de l'adhérence du béton au fer dans le béton armé. *Acad. Roum., Bull. Sect. Sc.*, 4 (1915/16), Nr. 9, pp. 328—33, et *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 169 (1919), pp. 21—22; *Le Génie Civil*, Paris, 75 (1919), Nr. 4, pp. 83-84. [Ref.: *Chem. Z blatt*, 1916, II, p. 610, și 1920, II, p. 36].

— Curs de electrotechnică, predat de. . . *(S. N. P. S. Sc. Națională de Poduri și Șosele)*. Buc., 1918/19; 328 p. (16 × 21) și 249 fig. în 56 pl. anexe. Litografiat.

— Curs de electrotechnică generală, predat de. . . *(Școala Politechnică din București)*. Buc., 1920/21 și 1923; *Text*: 390 p. (20,5 × 27), fig. și *Atlas*: 82 p. (20,5 × 27), fig. Litografiat.

— Curs de electricitate, predat de. . . *(Școala Politechnică din București)*. Buc. [192. . .]; 168 p. (19 × 26,5), fig., scris de Elev. Ing. VLAD POPOVICI. (Litografiat).

— Sur une classe particulière de piles. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 175 (1922), pp. 96—98. Cf. Observations de M. P. JANET, à propos de cette Note. *Ibidem*, p. 98. Ref.: *Chem. Z blatt*, 1922, III, p. 1278.

— Nouvelle évaluation de la pression interne des liquides. Critérium de l'association des molécules dans un liquide. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 174 (1922), pp. 1693/95 (2) et *Acad. Roum. Bull. Sect. Sc.*, 8 (1922/23), Nr. 1/2, pp. 22-26. [Ref.: *Chem. Z-blatt*, 1923, I, p. 12 und 1923, III, p. 180] Apărute și în Extrase.

— Réalisation du mouvement perpétuel de deuxième espèce. *Acad. Roum., Bull. Sect. Sc.*, 8 (1922/23), Nr. 1/2, pp. 27-30. [Ref.: *Chem. Z blatt*, 1923, III, p. 178 și Extras, Buc. 1923; 5 p. (8°), « Cartea Românească ».

— L'équilibre du système liquide-vapeur saturé, la chaleur de vaporisation, la loi du diamètre rectiligne et l'attraction moléculaire. *Acad. Roum., Bull. Sect. Sc.*, 8 (1922/23), Nr. 9, pp. 175—80, tab. [Ref.: *Chem. Z-blatt*, 1924, I, p. 1890 (1)

— Les solutions et l'attraction moléculaire. *Acad. Roum., Bul. Sect. Sc.*, 8 (1922/23), Nr. 9, pp. 180—85. [Ref.: *Chem. Z blatt.*, 1924, I, p. 1890.

— La force électromotrice des piles et l'attraction moléculaire. *Acad. Roum., Bull. Sect. Sc.*, 8 (1922/23, Nr. 9, pp. 185—190 et *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 177 (1923), pp. 449—451. [Ref.: *Chem. Z-blatt*, 1924, I, p. 1156 u. 1890].

— Sur la constitution des solides [Essai d'une théorie de la cohésion, de l'élasticité, de la rupture, de la dilatation, de la variation de la chaleur spécifique, de la solubilité et de la conductibilité électrique], *Acad. Raum. Bull. Sect. Sc.* 8 (1922—23) Nr. 9 p. 190—197, 2 fig. [Ref.: *Chem. Z-blatt.*, 1924, I, p. 1890].

— I. Sur le mécanisme du vol à voile. II. Sur l'emploi des fluctuations horizontales du vent par les oiseaux voiliers. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 177 (1923), pp. 679—681 et 178 (1924), pp. 191—193. *Acad. Roum., Bull. Sect. Sc.*, 8 (1922/23), Nr. 10, pp. 253—258. Apărut și în Ex'ras.

— Sur des nouvelles piles électriques contredisant le deuxième principe de la thermodinamique. *Acad. Roum., Bull. Sect. Sc.*, 8 (1922/23), Nr. 10, pp. 259—261. Cf.: IONESCO TH. et CERNĂTESCO R. Piles de VASILESCO-KARPEN et théorie de VERNST. *Ibidem*, 8 (1922/23), Nr. 5/6, pp. 55—67.

— Curs de electrostatică, predat de. . . *(Școala Politechnică din București)*. Buc., 1924; 86 p. (21 × 26,5) fig. Litografia « Europa ». T. A. B. Hagiescu.

— Sur la Diffusion. Libre parcours des molécules de l'eau. Influence d'un champ de forces. Équilibre statistique. *Acad. Roum. Bull. Sect. Sc.*, 9 (1924/25), Nr. 9/10, pp. 152—257, tab. *Erata. Ibidem*, p. 175. [Ref.: *Physikal. Ber.*, 7 (1926), p. 940; *Chem. Zblatt*, 1926, I, p. 1756].

— Le travail des forces électrostatiques; tension et répulsion des lignes de force. *Bull. Mathem. et Phys. pures et appl. École Polytechn.*, Bucarest, 6 (1924-25), Nr. 16/18, pp. 10—12.

— Manual de electrotechnică generală *(Biblioteca Manualelor Științifice, îngrijită de prof. univ.* OCTAV ONICESCU). Buc. [1925]; 280 p. (13 × 18,5), 265 fig., « Cultura Națională ». [Rec.: CONSTANTINESCU ZAHARIA, *Bul. AGIR*, 17 (1925), Nr. 10, p. 372 și BORA GH., *Rev. Geniului*, 14 (1931), Nr. 10, p. 372].

— Raport asupra lucrărilor [Acad. Române] făcute în anul 1925/26. *Acad. Rom., Anale*, 46 (1925/26), pp. 190—191.

— Cuvântare rostită la inaugurarea palatului Soc. « Progresul Silvic ». *Rev. Pădurilor*, 38 (1926), Nr. 11, p. 647.

— Phénomènes semblant contredire le second principe de la thermodynamique. (Expériences). *J. Phys.-Radium* [*Bull. Soc. Franc. Phys.*, Nr. 231] [6] 7 (1926), Nr. 3, p 70 S—72 S. [Ref.: *Physikal. Ber.*, 8 (1927), p. 252].

— Le mouvement perpétuel de seconde espèce est une conséquence nécessaire de l'atomistique. *Acad. Roum., Bull. Sect. Sc.*, 10 (1926/27), Nr. 1, pp. 12/33, 5 fig.

— I. Sur les piles à électrodes identiques inaltérables. II. Sur des piles à électrodes inattaquables. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 185 (1927), Nr. 16, pp. 766—768; Nr. 19, pp. 942—944. [Ref.: *Physikal. Ber.*, 9 (1928), p. 247; p. 781 et *Rev. G-le d'Electricité*, 22 (1927), Nr. 22, p. 170 D. et Nr. 23, p. 180 D].

— Les piles à électrodes inaltérables et le principe de Carnot. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 186 (1928), Nr. 4, pp. 230—232. [Ref.: *Physikal. Ber.*, 9 (1928), p. 1074].

— Proiectul centralei electrice comunale și al rețelei de distribuție. Memoriu justificativ și Caiet de sarcini *(Primăria Municipiului Constanța)*. Constanța (1928); 71 p. (15,5 × 23). Tip. « Constanța ».

— Nouvelles recherches sur des piles contredisant le second principe de la thermodynamique. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 187 (1928), Nr. 8, pp. 418—420. [Ref:. *Physikal. Ber.*, 9 (1928), p. 2178].

— Les équations d'état et la thermodynamique. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 187 (1928), pp. 496/98.

— L'équation de VAN DER WAALS et les principes de la thermodynamique; la relation MAXWELL-CLAUSIUS et la formule de CLAPEYRON déduites de cette équation. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 187 (1928), pp. 1039—42.

— Şcoala Politechnică (Confer.). (Extras din: *Anuarul Sc. Politechnice din Buc.*, pe anul 1927/28, p. II—XI]. Buc. (1929); XI, p. (16 × 23), «Cartea Românească».

— Cuvântul Şcoalei Politechnice din Bucureşti (la jubileul de 75 ani al Şcoalei superioare de Agricultură dela Herăstrău). *Viaţa Agricolă*, 19 (1928) Nr. 13/16, p. 402—403.

— Sur une précédente note de M-lle STEPHANIE MĂRĂCINEANU [relative à une prétendue transformation du plomb par l'effet du rayonnement solaire. Note de MM. CH. FABRY et DUREUIL]. *Acad. Roum., Bull. Sect. Sc.*, 12 (1929), Nr. 7/10, p. 216. [Ref.: *Chem. Z-blatt*, 1930, II, p. 1034].

— Les équations d'état et la thermodynamique. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 188 (1929), pp. 496—498.

— Démonstration des relations de MAXWELL-CLAUSIUS et de CLAPEYRON. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 188 (1929), pp. 778—79.

— Peut-on démontrer la relation de MAXWELL-CLAUSIUS sans recourir au principe de Carnot? I-II. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 189 (1929), p. 359/60 et 1384—1386.

— Centralizarea şi descentralizarea în învăţământul superior. (Conf. la «Inst. Social Român»). *Bul. Soc. Politecnice*, 43 (1929), Nr. 4, pp. 346—358.

— Dynamique du galvanomètre à cadre mobile avec condensateur et self-induction aux bornes. *Bull. Mathém. et Phys. pures et appl. École Polytechn.*, Bucarest, 1 (1929/30), Nr. 1, pp. 50-52; fig.

— Interwiev cu d-l N. VASILESCU KARPEN, Ministrul Industriei [declaraţii în legătură cu planul KESSLER, fuziunile Soc. Petrolifere, chestiunea redevenţelor, reducerea preţului la ciment şi hârtie, etc.]. *Gazeta Acţionarilor şi Soc. Anon.*, Buc. (1930), Nr. 31/1.XI, p. 1.

— Prof. Dr. G. P. THEODORESCU (Cuvântare la înmormântarea...). *Natura*, 19 (1930), Nr. 10, p. 6.

— Curs de electricitate, întocmit după notele luate la prelegerile d-lui... [pentru uzul Secţiilor *A*: Construcţii şi *E*: Silvică]. *(Şc. Politechnică din Bucureşti: Asoc. Elevilor Ingineri constructori români)*. Buc., 1931; 124 p. (21 × 26,5), 124 fig. Litografiat.

— Dare de seamă asupra învăţământului în Şcoala Politechnică din Bucureşti. (In: Şcoala Politechnică din Bucureşti: «*Aniversarea a 75 ani de învăţământ technic în România*», Buc., 1931, pp. 1-18).

— Invăţământul technic în România. (Soc. Politecnică: «*Istoricul desvoltării technice în România, 1881—1931*», vol. III, p. 299—336) şi *Bul. Soc. Politecnice*, 45 (1931), Nr. 12, pp. 2297—2334, 5 fot., tab.

— La situation dans l'industrie du pétrole. Situaţia în industria de petrol. *Moniteur du Pétrole Roumain*, 30 (1931), Nr. 22, 1049—1051.

— Sur les forces électromagnétiques; tension et répulsion des lignes de force; énergie du champ magnétique. (Communication faite au Congrès des Mathématiciens, T.-Severin, 6 Mai 1932). *Bul. Mathém. et Phys. pures et appl., École Polytechn.*, Bucarest, 3 (1931/32), Nr. 8, pp. 121—124.

— Sur une nouvelle exposition des phénomènes électro-magnétiques. Inutilité de la notion de masse magnétique. *(I.R.E., Inst. Rom. Energie. Comit. Electrotechnic Român*, Nr. 15). Buc., 1932; 8 p. (21 × 28), M. O., Imprim. Naţională. Lei 20.

— Cuvântare în şedinţa festivă cu prilejul semicentenarului Soc. Politecnice. *Bul. Soc. Politecnice*, 46 (1932), Nr. 2, pp. 184—190.

— Trebue să rămână România o țară eminamente agricolă? Agricultura și industria în legătură cu apărarea națională. (Conf. la «Ateneul Român», 3.XII din 1923). Buc., 1933; 17 p. (16 × 23,5). M. O., Imprim. Centrală. Publicat și în: *Anal. Econ. și Statistice*, 16 (1933), Nr. 10/12, pp. 1-16; *Bul. AGIR*, 15 (1933), Nr. 12, pp. 455—461.

— Cuvântarea Rectorului [la solemnitatea aniversării de 75 ani de învățământ technic în România, 50 ani dela reorganizarea Școalei de Poduri și Șosele și 10 ani dela înființarea Școalei Politechnice]. *Anuarul Șc. Politechnice «Regele Carol II» p. anul școlar* 1931/32, Buc., 1933, pp. 7-15.

— Cuvântare la sărbătorirea prof. G. ȚIȚEICA și D. POMPEI. *Natura*, 22 (1933), Nr. 10, pp. 7-8.

— Discurs [cu ocazia sărbătoririi prof. ing. PETRE ANTONESCU, de către Soc. «Progresul Silvic»]. *Rev. Pădurilor*, 45 (1933), Nr. 11, pp. 696—697.

— Lecțiuni de electricitate, I-III. (Confer. la Radio). *Natura*, 22 (1933), Nr. 9, pp. 4-8; 23 (1934), Nr. 3, pp. 11-13; Nr. 5, pp. 15-19.

— Principe relatif à la distribution des lignes de force du champ d'induction magnétique. *Bull. Math. Phys. pures et appl., Éc. Polytechn.*, Buc., 4 (1933/34, Nr. 11/12, pp. 109—111. [Ref.: *Jahrbuch Fortschritte d. Mathem.* 59, II, (1933), p. 1487.]

— Passage du courant dans les électrolytes sans électrolyse [Extrait du: *Bul. IRE*, 2 (1934), Nr. 3, pp. 449/56]. *(I.R.E. Inst. Roum. d'Énergie. Coll. des Public.*, Nr. 69). Buc., 1934; 10 p. (16 × 23), 6 fig., M.O., Imprim Națională. Publicat și în *Bull. de Mathém. et de Phys. pures et appl. de École Polytechn.*, Buc., 5 (1933/34) și *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 199 (1934), Nr. 14, pp. 480—482 și în extras, 7 p. (8°).

— Cuvântare ținută la deschiderea Congresului Asoc. g-le a Inginerilor, Galați, 14 Oct. 1934. [Extras din: *Bul. AGIR*]. Buc., 1934, 9 p. (13 × 20,5), M.O., Imprim. Națională.

— Învățământul aeronautic la Școala Politechnică «Regele Carol II». Buc., [1934]; 4 p. (16 × 23), f. e.

— Passage du courant dans les électrolytes sans électrolyse. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 199 (1934), Nr. 8, pp. 480—483; *Bull. Soc. Roum. Physique*, Buc., 36 (1934), Nr. 63/64, pp. 9—16, 6 fig. et *Journal du Four électrique et Ind. électrochim.*, 43 (1934), Nr. 10, pp. 354—355. [Ref.: *Chem. Z blatt*, 1934, II, p. 3486 [Nr. 1935 I, p. 673, et *J. Phys. Radium* [7] 6 (1935) Nr. 7, p. 241 C. P. *Physikal Ber.*, 15 (1934), p. 1900 et 17 (1936), p. 436].

— Pile électrique utilisant l'énergie d'oxydation de l'alcool. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 199 (1934), Nr. 16, pp. 708—710. [Ref.: *J. Phys. Radium*, [7] 6 (1935), Nr. 11, p. 339 C. P.; *Physikal. Ber.*, 16 (1935), Nr. 2, p. 151; *Chimie et Ind.*, 33 (1935), Nr. 4, p. 888; *Chem. Z-blatt.*, 1935, I, p. 1015].

— Sur l'application des principes de la thermomécanique aux conducteurs. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 199 (1934), pp. 836/38.

— Cuvântare în calitate de Rector la deschiderea cursurilor Școalei Politechnice «Regele Carol II». *Bul. AGIR*, 17 (1935), Nr. 10, pp. 353—355.

— Curs de electricitate predat la Școala Politechnică «Regele Carol II». I. Electrodinamica. II. Electrostatica. III. Fenomene de propagare. IV. Fenomene electrochimice. Buc., 1935/37; IV, 181 p. + p. 183—313 (17 × 24), 24 fig. M.O., Imprim. Națională.

— Știința și technica (Confer.). *Natura*, 25 (1936), Nr. 1, pp. 11—17.

— Politica monetară și a Comerțului exterior [Extras din: *Bul. Soc. Politecnice*, 49 (1935), Nr. 12, p. . . .]. Buc., 1936; 22 p. (16 + 23), M.O., Imprim. Națională. Publicat și în *Economia Națională*, 64 (1936), Nr. 5, pp. 1—18.

— Moneda noastră, rezerva metalică a Băncii Naționale și apărarea națională. [Extras din: *Finanțe și Industrie* (1936), Nr. 51—52). Buc., 1936; 10 p. (13, 5 × 20,5]. Tip. « Finanțe și Industrie ».

— Sur la cause de l'adhérence du béton au fer dans le béton armé. *Acad. Roum., Bull. Sect. Sc.*, 17 (1935/36), Nr. 1/2, pp. 1-2. [Ref.: *Chem. Z-blatt*, 1937, II, p. 4087].

— Asupra cauzelor aderenței betonului la fier în construcțiunile de beton armat.— Sur la cause de l'adhérence du béton au fer dans les constructions en béton armé. *Bul. IBCD*, 1 (1936), Nr. 1, pp. 13/22.

— Legea energiei și instalațiile proprii de forță motrice. [Extras din: *Bul. IRE*, 5 (1937), Nr. 4, pp. 721—735]. *(I.R.E., Inst. Român de Energie. Col. de public*, Nr. 142). Buc., 1937; 18 p. (16 × 23), M.O., Imprim. Națională. Lei 30.— [Ref.: *Miniera*, 13 (1938), Nr. 3, pp. 30—31].

— La physique en Roumanie. [Extrait de: « *La vie scientifique en Roumanie. I: Sciences pures* »]. Buc., 1937; 32 p. (17 × 24,5), M.O., Imprim. Națion.

— La formation des ingénieurs de mines dans les Écoles Polytechniques de Roumanie. — Formarea inginerilor de mine în Școlile Politechnice din România. *Moniteur du Pétrole Roumain*, 38 (1937). *N-ro spéc. consacré au 2-e Congrès Mondial du Pétrole*, pp. 73—74.

— Image mécanique d'un élément d'antenne. *Bull. Math. Phys. pures et appl., École Polytechn.*, Buc., 8 (1936/37), Nr. 22/24, pp. 12—14, 3 fig. și extras, Buc., 1938, 4 p. (8°). [Ref.: *Jahrb. Fortschr. Math.*, 63, I (1937), p. 763].

— Sărăcia, pericol național. *Excelsior*, Buc. (1937) Dec. și (1938) 1—7 Ian.

— Sur l'utilisation de l'énergie d'oxydation de l'alcool, dans les piles électriques. *(XX. Congrès électrotechnique, ESC, Praha*, 1938; *Rapports*, Praha, 1938, pp. 249—250).

— Problema drumurilor. Răspuns d-lui prof. GH. TAȘCĂ. *Excelsior*, Buc., (1938), 15 janv., pp. 1-2.

— L'essor de l'industrie en Roumanie. [Extrait de: « *La vie scientifique en Roumanie. 2: Sciences appliquées* »]. Buc., 1938; 37 p. (17 × 24,5), M.O., Imprim. Națională.

— La pile à gaz; mécanisme de l'électrolyse de l'eau; polarisation des piles. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 209 (1939), pp. 988—990. [Ref.: *Elektrotechn. Ber.*, 18 (1941), p. 314].

— Sur la nature des entités géométriques, mécaniques, physiques. Importance de la considération des symétries et dissymétries. (Observations sur la communication de M. BOUTHILLON). *Bull. Soc. Franc. des Électriciens*, [5] 9 (1939), Nr. 106, pp. 818/20.

— Rôle des électrons dans le fonctionnement des piles; la pile Daniell. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 209 (1939), Nr. 13, pp. 509—511. [Ref.: *Le Génie Civil*, 115 (1939), Nr. 116, p. 299; *Chem. Z-blatt.*, 1940, I. p. 2770].

— Les équations d'état et la thermodynamique. *Acad. Roum., Bull. Sect. Sc.*, 21 (1939), Nr. 7/8, pp. 199—205. [Ref.: *Physikal. Ber.*, 21 (1940), p. 297].

— Rôle des électrons dans la production de la force électromotrice au contact métal-électrolyte. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 209 (1939), Nr. 12, pp. 474—476. [Ref.: *Elektrotechn. Ber.*, 15 (1940), p. 344; *Physikal. Ber.*, 21 (1940), p. 1098; *Chem. Z-blatt.*, 1940, I, p. 2445].

— Les piles de concentration à électrons et la mesure du *p H*. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 209 (1939), Nr. 22, pp. 790—792. [Ref.: *Physikal. Ber.*, 21 (1940), p. 1194; *Chem. Z. blatt.*, 1940, I, p. 2292].

— La pile à gaz; mécanisme de l'électrolyse de l'eau; polarisation des piles. *C. R. Acad. Sc.*, 209 (1939), Nr. 26, pp. 988—990. [Ref.: *Chimie et Industrie*, 43 (1940), p. 833; *Chem. Z-blatt.*, 1940, I, p. 2445].

— Rôle des électrons dans certains phénomènes physico-chimiques. La force électromotrice au contact métal-électrolyte. *Acad. Roum., Bull. Sect. Sc.*, 22 (1939/40), Nr. 2, pp. 117/29, 6 fig.

— Rôle des électrons dans certains phénomènes physico-chimiques. II. L'attaque des métaux par les acides. *Acad. Roum., Bull. Sect. Sc.*, 22 (1939), Nr. 4, pp. 193—195. [Ref.: *Chem. Z-blat.*, 1940, I, p. 2292].

— La rationalisation de l'enseignement supérieur et l'École Polytechnique. Raționalizarea învățământului superior și Politechnica. *Moniteur du Pétrole Roumain*, 37 (1938), Nr. 22, p. 1747—1748.

— Invățământul technic român. *Rev. Cursurilor și Conferințelor Universitare* 4 (1939), Nr. 5/8, p. ...

— Rôle des électrons dans certains phénomènes physico-chimiques. III. Les piles à électrodes inattaquables. *Acad. Roum., Bull. Sect. Sc.*, 22 (1939/40, Nr. 6, pp. 273/279.

— Sur l'attaque des métaux. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 210 (1940), Nr. 10, pp. 371—374. [Ref.: *Physikal. Ber.*, 21 (1940), p. 1569; *Chem. Z-blatt.*, 1940, I, p. 3882].

— Mécanisme de la pression osmotique, I—III. *Acad. Roum., Bullet. Sect. Sc.*, 23 (1941), Nr. 8, pp. 362—371; Nr. 9, pp. 424—425; Nr. 10, p. 501—502. [Ref.: *Physikal. Ber.*, 22 (1941), p. 1960; *Chem. Z-blatt.*, 1941, II [2183], p. 2661].

— La tension superficielle à la surface de contact d'un liquide et de sa vapeur (Réponse aux critiques de BĂRBULESCU et I. BOGDAN). *Acad. Roum., Bull. Sect. Sc.*, 23 (1941), Nr. 10, pp. 497—500.

— Curs de electricitate (II. Electrostatica. III. Fenomenele de propagare. IV. Fenomene electrochimice). Buc., 1941; 313 p. (17 × 24), fig. M.O. Lei 150.

— Școala Politechnică (Cuvântare cu ocazia proclamării doctor honoris causa a Politechnicei din București). *Natura*, 30 (1941), Nr. 11/12, pp. 421—427.

— Activitatea lui G h. Ţiţeica la Școala Politechnică din București. *Rev. Cursurilor și Conferințelor universitare*, 5 (1940), Nr. 3/4, p. ...

— Viața și opera lui GALILEO GALILEI. (*Acad. Rom. Mem. Sect. Științifice.* [3] (1941/42), Nr. 8, p. 403—418). Buc. 1942; 16 p. (17,5 × 25) M. O., Imprim. Națională.

— Electricitatea. Expunerea principalelor fenomene electrice. Buc., 1942; V, 327 p. (17 × 24), 241 fig., M. O. Imprim. Națională.

— Nouvelles recherches sur la tension superficielle et l'angle de contact. *Acad. Roum., Bull. Sect. Sc.*, 24 (1942), Nr. 9, pp. 579—596, 14 fig.

II. TRAVAUX PUBLIÉS EN COLLABORATION OU DANS DES PUBLICATIONS COLLECTIVES

PUȘCARIU VALERIU, VASILESCU KARPEN N-LAE, PIȘCA MIHAIL și BUȘILĂ C-TIN D.: Intrebuințarea electricității în exploatările petrolifere. (Raport prezentat Min. de Industrie și Comerț). *Bul. Soc. Politecn.*, 29 (1913), Nr. 6, pp. 387—402.

— Descrierea drumurilor amenajate în spatele armatei II-a [1]). [Secret]. *(Marele Cartier G-l, Comandamentul G-l al Etapelor și Comunicațiilor. Serv. de Poduri și Șosele).* Iași, 1917; 41 p. (11 × 18). Tip. Serv. Geografic.

MIRONESCU C. M., BALABAN EM., COCULESCU N., DRAGU TEODOR, EMMANUEL DAVID, LALESCU TRAIAN, MRAZEC L., ȚIȚEICA G., VASILESCU-KARPEN N., ZAHARIADE P.: Reorganizarea învățământului nostru technic superior. Memoriul Comisiunii de reorganizare a « Sc. naț. de Poduri și Șosele » cu un proiect de regulament al Șc. Politechnice din București. *Bul. Soc. Politecn.*, 31 (1915), Nr. 7/9, pp. 599—635.

— Memoriul Consiliului profesoral al Școalei Politechnice din București relativ la institutele technice universitare și la admiterea absolvenților acestor institute în cadrele corpului technic al Statului. Buc. 1929; 21 p. (23 × 16). « Cartea Românească ».

— Memoriu relativ la crearea de Institute technice pe lângă Universitățile din București și Iași. *Bul. Soc. Politecn.* (1921), p. 204.

— Memoriu cu privire la învățământul profesional al meseriilor, prezentat Min. Instr. Publice. *Bul. Soc. Politecn.* 49 (1935), Nr. 10, pp. 959—968.

— Moțiunea adoptată în adunarea g-lă dela 14-2-1937, pentru concentrarea învățământului technic superior în școlile politechnice. Anexă, scrisoarea adresată d-lui rector al Șc. Politechnice din București. *Bul. Soc. Politecn.*, 51 (1937), Nr. 2, pp. 176—178.

— Ședința adunării g-le extraordinare din 14-2-1937, în chestiunea concentrării învățământului technic superior în Școalele Politechnice. Cuvântările d-lor: ing. N. VASILESCU KARPEN, prof. ION IONESCU, ing. ULISE ISSĂRESCU, ing. G. SCHILERU, ing. E. E. ANASTASIU și Moțiune. *Bul. Soc. Politecn.*, 51 (1937), Nr. 3, pp. 235—248.

— Memoriu asupra organizării învățământului technic superior cu privire la trecerea Politechnicelor sub autoritatea Min. de Lucrări Publice și Comunicații. *Bul. Soc. Politecnice*, 55 (1941), Nr. 4, pp. 482—492. Cf.: Discuția memoriului în Comitet. *Ibidem*, Nr. 5, pp. 610—616.

BOGDAN PETRU (Prof. Univ., Iași): Opera lui ANGHEL SALIGNY. Invățământul technic în România. Discurs de recepție cu răspunsul d-lui N. VASILESCU KARPEN (pp. 21—26). *(Acad. Română. Discursuri de Recepție, LXIII).* Buc., 1931; 26 p. (17 × 24,5), M. O., Imprim. Națională.

[...] « Sărbătorirea d-lui inginer de mine Mathei M. Drăghiceanu ». (Discursurile rostite în ziua de 12.5.934, cu ocazia sărbătoririi d-lui ing. MATHEI M. DRĂGHICEANU, de d-nii L. MRAZAC, AL. TZIGARA-SAMURCAȘ, G. MACOVEI, P. E. BUJOIU, C. D. BUSILĂ, N.VASILESCU KARPEN, A. ȚĂNȚĂREANU, G. MALCOCI, TR. METIANU, I. IONESCU și răspunsul sărbătoritului. Cu notă biografică de ing. GH. H. DAMASCHIN). Buc., 1934; 92 p. (8°). M.O., Imprimeria Națională.

— Cuvântările ținute și moțiunea votată la întrunirea Școlilor Politechnice și Asociațiunilor de Ingineri din țară, în localul Soc. Politechnice pentru

---

[1]) Impreună cu Col. *I. Popovici.*

concentrarea învățământului technic superior. 10 Martie 1935. Buc. 1935; 66 p. (16 × 23). M. O. Imprim. Națională.

— [*Școala Politechnică «Regele Carol II»*, Buc.]: Memoriu cu privire la învățământul profesional al meseriilor, prezentat Min. Instrucțiunii Publice, de... *Bul. Soc. Politecnice*, 49 (1935), Nr. 10, pp. 959—968.

GHEORGHIU I. S. (Prof. Ing.): Probleme fundamentale ale legiuirii energetice în România. *Discuțiuni*: BUȘILĂ C. D., BUDEANU C. I., RARINCESCU I. G., ȘTEFĂNESCU RADU I., MATEESCU G., VASILESCU KARPEN N., GHEORGHIU I. S. *Bul. IRE*, 5 (1937), Nr. 1, pp. 207—243.

[...] Discursuri la sărbătorirea d-lor I. GIGURTU și I. E. BUJOIU cu răspunsurile sărbătoriților: DEMETRESCU FLORENTIN, VASILESCU KARPEN N., BUȘILĂ C., OSICEANU C., CONSTANTINESCU M., ORGHIDAN C., RUSSU ABRUDEANU D., ȘERBAN POPA I., MASTERO E., BASGAN I. și PERIEȚEANU I. GR. «*Annales Mines Roumanie*», 21 (1938), Nr. 5, pp. 177—200, fig.

[*Soc. Politecnică*]: Consfătuirea dela 15.IV.1938 [în legătură cu studiile pentru stabilirea unui program de lucrări publice și utilaj economic. *Discuțiuni*: BUȘILĂ C. D., THEODORU H., ARAPU I., GERMANI D., VASILESCU KARPEN N., MIHALOPOL C., SOCOLESCU GR., COTOVU V., TEODORESCU C. C., PETRESCU GH., VASILESCU GR., BUDEANU C., ZLATCU P. și ZLATCU C.]. *Bul. Soc. Politecnice*, 52 (1938), Nr. 4, pp. 346—354.

[*Politechnica din București*]: Solemnitatea deschiderii cursurilor Politechnice din București. Proclamarea d-lui prof. onorar N. VASILESCU KARPEN doctor *honoris causa* al Politechnicei. [Cuvântările d-lor: Prof. Ing. TEODORESCU C. C. (Rector), Prof. Ing. C. D. BUȘILĂ, general RADU ROSETTI (Min. Culturii Naționale) și N. VASILESCU KARPEN]. [Extras din: *Bul. Soc. Politecnice*, 55 (1941), Nr. 11]. Buc., 1941; pp. 1146—1170 (16 × 23), 2 fig., M.O., Imprimeria Națională.

— Discuțiuni cu privire la organizarea profesională a inginerilor în ședințele Comitetului din 27 Noemvrie și 23 Decemvrie 1941. [BUȘILĂ C. D., BUDEANU C. I., BUJOIU I., BELEȘ A., BUNESCU A., MATEESCU CRISTEA, GEORGESCU N., TEODORESCU C. C., STAN D., STRATILESCU GR. și VASILESCU KARPEN N.]. *Bul. Soc. Politecn.*, 56 (1942), Nr. 2, pp. 200—219.

PARHON C. I.: Insemnătatea teoretică și practică a endocrinologiei și despre necesitatea de a se organiza mișcarea științifică endocrinologică la noi în țară. Discurs de recepțiune cu răspuns de N. VASILESCU KARPEN (p. ...). *(Acad. Română. Discursuri de Recepție)*. Buc., 1940/41; ... p. (17 × 25), M. O., Imprim. Națională.

ZĂNESCU AUREL (Ing.): Noul ministru al Industriei și Comerțului [N. VASILESCU KARPEN]. *Bul. AGIR*, 13 (1931), Nr. 7, p. 305, 1 fotogr.

III. RAPPORTS POUR LES PRIX ACCORDÉS PAR L'ACADÉMIE ROUMAINE

BACAN M.: «Căldarea cu vapori». (Raport de premiere, premiul «Demostene Constantinide»). *Acad. Rom., Anale*, 48 (1927/28), p. 207.

KONTESCHWELLER M.: «Radio pentru toți». (Raport de premiere, premiul «*Adamachi*»). *Acad. Rom., Anale*, 52 (1931/32, pp. 274—275.

VASILESCO GRÉGOIRE: «Canalisation du secteur des cataractes du Bas-Danube». (Raport de premiere, premiul Statului «*Lazăr*»). *Acad. Rom., Anale*, 54 (1933/34), pp. 152—153.

SBURLAN D. A.: « Fabrici de cherestea ». (Raport de premiere, premiul « *Șt. Demetrescu-Vergu*). *Acad. Rom., Anale*, 55 (1934/35), pp. 207—208.

FILIPESCU GH. EM.: « Statica și rezistența ». (Raport p. premiul Statului « *Lazăr* »). *Acad. Rom., Anale*, 56 (1935/36), pp. 220—229.

BUDEANU C. I.: « Les puissances réactives et fictives ». [Raport de premiere, premiul « *Demostene Constantinide* »]. *Acad. Rom., Anale*, 57 (1936/37), pp. 167—168.

KONTESCHWELLER MIHAI: « Telemecanica ». (Raport de premiere, premiul « *Demostene Constantinide* »). *Acad. Rom., Anale*, 60 (1939/40), p. 232.

BUNGESCU I. (Maior); « Memoriu asupra aparatului central de preparație și conducere a tragerii anti-aeriene, sistem Maior BUNGESCU, Md. 1935 ». [Raport de premiere, premiul « *Min. Aerului* și *Marinei* » de 100.000 lei]. *Acad. Rom., Anale*, 60 (1939/40), p. 235.

IV. PRÉFACES

DINU VALERIU (Ing.-Dr.): Aspecte din economia națională în epoca crizei și a adoptării la criză 1928—1934. Producție-prețuri-schimburi internaționale. Cu o prefață de N. VASILESCU KARPEN. Buc., 1935, 52 p. (16 × 23), Tip. « Rom. Unite ».

POPESCU AL. TH. (Ing.) și POPESCU CHRISTIANA (Ing.): Monografia laboratorului de Electrotechnică pentru încercări industriale și cercetări. Monographie du Laboratoire d'Electrotechnique pour essais industriels de l'École Polytechnique « Roi Carol II » București. Cu o prefață de N. VASILESCU KARPEN. (*Public. Sc. Politecn. « Regele Carol II » București*), București, 1936, X, 145 p. (18 × 26), fig., tabl. pl., M. O. Impr. Națională.

513.1 GÉOMÉTRIE

SUR LES POINTS DE CONTACT DU CERCLE DES NEUF POINTS D'UN TRIANGLE AVEC LES TANGENTS AUX TROIS CÔTÉS

par M. **R. Bouvaist**, Nantes (France)

Dans le *Bulletin de l'École Polytechnique* de Bucarest, M. V. THÉBAULT a posé la question suivante, restée jusqu'ici sans réponse.

Les points φ, φ_a, φ_b, φ_c *de* FEUERBACH *d'un triangle* ABC, *sont-ils les seuls points du cercle des neuf points dont les distances aux points de contact des tangentes menées aux cercles tritangents sur lesquels ils ne sont pas situés, sont telles que l'une d'entre elles égale la somme des deux autres ?*

Cette question doit être résolue par la négative.

Proposons-nous les problème suivant:

Problème. *Étant donnés trois cercles* (ω_i), *de centre* ω_i *et de rayon* r_i $(i = 1, 2, 3)$; *si* π_1, π_2, π_3 *sont les puissances d'un point* M *par rapport à ces trois cercles, déterminer le lieu de* M, *tel que l'on ait la relation*

$$\pm \frac{\sqrt{\pi_1}}{l} \pm \frac{\sqrt{\pi_2}}{m} \pm \frac{\sqrt{\pi_3}}{n} = 0 \qquad (1)$$

l, m, n *étant des constantes.*

La relation donnée équivaut, quels que soient les signes, à la suivante:

$$\Sigma \frac{\pi_1^2}{l^4} - 2\Sigma \frac{\pi_1^2 \pi_2^2}{l^2 m^2} = 0.$$

Le lieu de M est une quartique bicirculaire que l'on peut définir simplement comme anallagmatique, enveloppe des cercles orthogonaux à un cercle fixe (cercle directeur), dont les centres décrivent une conique fixe (déférente).

L'équation précédente représente, en effet, l'enveloppe des cercles

$$\frac{\lambda^2 \pi^2}{m^2} - \lambda\left(\frac{\pi_2}{m^2} + \frac{\pi_3}{n^2} - \frac{\pi_1}{l^2}\right) + \frac{\pi_3}{n^2} = 0$$

système qui contient les cercles (ω_1), (ω_2), (ω_3) pour $\lambda = 1$, $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$. Le cercle directeur est le cercle (ω), orthogonal à (ω_1), (ω_2), (ω_3).

La déférente passe par ω_1, ω_2, ω_3; on achèvera de la déterminer en construisant des tangentes en ω_1, ω_2, ω_3. Le cercle (ω_1) touche son enveloppe en ses points d'intersection avec le cercle $\frac{\pi_2}{m^2} - \frac{\pi_3}{n^2} = 0$. La tangente en ω_1 à la déférente est donc la perpendiculaire abaissée de ω_1 sur l'axe radical de ces cercles. La quartique est donc complètement déterminée.

Sur un cercle quelconque, il y a donc *quatre* points pour lesquels la relation (1) est vérifiée.

Question de M. V. THÉBAULT. Il faut faire ici $l = m = n = 1$, et prendre comme cercles (ω_1), (ω_2), (ω_3) les cercles exinscrits au triangle ABC, la déférente est la conique de STEINER circonscrite au triangle $\omega_1\omega_2\omega_3$. La quartique coupe le cercle des neuf points en quatre points vérifiant la relation donnée. L'un d'eux est le point φ de contact du cercle des neuf points avec le cercle inscrit à ABC [1]), mais il en existe encore *trois* autres.

Remarque. Les mêmes considérations permettent de voir que sur le cercle des neuf points, les quatre points de FEUERBACH sont les seuls pour lesquels l'une des distances d'un de ces points aux sommets du triangle $M_1\ M_2\ M_3$ complémentaire de ABC soit égale à la somme des distances des deux autres [2]). En effet, le lieu des points tels que l'on ait la relation

$$\pm MM_1 \pm MM_2 \pm MM_3 = 0,$$

est la quartique bicirculaire ayant pour cercle directeur le cercle $M_1\ M_2\ M_3$ (cercle des neuf points) et pour conique déférente la conique de STEINER inscrite à ABC. Les points d'intersection de la quartique avec le cercle des neuf points sont les contacts de ce cercle avec ses tangentes communes à la conique de STEINER inscrite dans ABC, qui sont les points de FEUERBACH.

---

[1]) V. THÉBAULT: *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1932.

[2]) Question posée par M. AD. MINEUR (*Mathesis*, (1932), p. 236, qui a été résolue par MM. R. GOORMAGHTIGH (*Mathesis* (1932), p. 315), et V. THÉBAULT (*Mathesis* (1932), p. 361).

513.1 GÉOMÉTRIE

SUR L'HEXAGONE À CÔTÉS PARALLELES TROIS PAR TROIS

par M. **V. Thébault**, Tennie (Sarthe-France)

Après les deux Notes que nous avons déjà consacrées à cette curieuse figure [1]), voici encore quelques propriétées nouvelles.

Théorème I. *Dans un hexagone* $H_1 \equiv A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$, *dont les côtés sont parallèles trois par trois, les triangles équilatéraux* $A_1 A_2 A_1'$, $A_2 A_3 A_2'$, $A_3 A_4 A_3$, $A_4 A_5 A_4'$, $A_5 A_6 A_5'$, $A_6 A_1 A_6'$ *sont construits extérieurement sur les c tés et les triangles équilatéraux* $A_1 A_2 A_1''$, $A_2 A_3 A_2''$, $A_3 A_4 A_3''$, $A_4 A_5 A_4''$, $A_5 A_6 A_5''$, $A_6 A_1 A_6''$ *sont construits intérieurement. Les triangles équilatéraux construits intérieurement sur les côtés opposés de l'hexagone* $H_2 \equiv A_1' A_2' A_3' A_4' A_5' A_6'$ *et extérieurement sur les cotés opposés de l'hexagone* $H_3 \equiv A_1'' A_2'' A_3' A_4'' A_5'' A_6''$, *coincident quatre par quatre avec les intersections* A, B, C *des côtés opposés* $A_1 A_6$ *et* $A_3 A_4$, $A_1 A_2$ *et* $A_4 A_5$, $A_2 A_3$ *et* $A_5 A_6$ *de l'hexagone* H_1 *et l'aire du triangle* A B C *est équivalente à la moitié de celle de l'hexagone* H_1.

En effet, il suffit d'observer, par exemple, que les sommets des triangles équilatéraux construits extérieurement sur $A_1'' A_2''$ et intérieurement sur $A_1' A_2'$ coïncident avec l'anticomplémentaire du sommet A_2 du triangle $A_1 A_2 A_3$, par rapport à ce triangle [2]), c'est-à-dire avec le point A de rencontre des côtés opposés $A_1 A_6$ et $A_3 A_4$ de l'hexagone H_1.

L'aire S du triangle ABC est visiblement équivalente à la moitié de celle de l'hexagone fondamental.

Théorème II. *Les diagonales principales* $A_1' A_4'$, $A_2' A_5'$, $A_3' A_6$ (ou $A_1'' A_4''$, $A_2'' A_5''$, $A_3'' A_6''$) *de l'hexagone* H_2 (ou H_3) *sont égales et forment par leurs intersections un triangle équilatéral* [3]).

---

[1]) *Bulletin*, 1938, pp. 18 à 22, 1939, pp. 33 à 38.

[2]) V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1933 (supplément), p. 25.

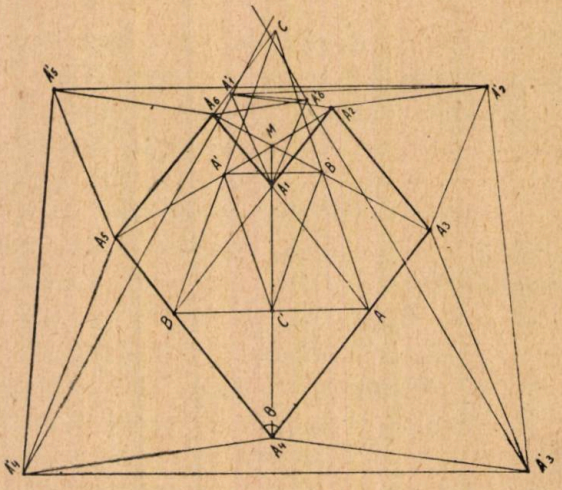
[3]) La dernière partie nous a été indiquée par M. R. BOUVAIST.

En effet, les sommets des triangles équilatéraux construits extérieurement sur $A_1' A_6'$ et intérieurement sur $A_3 A_4'$, par exemple, coïncident avec l'anticomplémentaire commun C des sommets A_1 et A_4 des triangles $A_6 A_1 A_2$ et $A_5 A_4 A_3$, par rapport à ces triangles. Les triangles $CA_1' A_4'$ et $CA_3' A_6'$ sont donc égaux et $A_1' A_4' = A_3' A_6'$; de plus, les angles $(A_1' A_4', A_4' C)$ et $(A_3' A_6', A_3' C)$ sont égaux, ce qui entraîne l'égalité des angles $(A_1' A_4', A_3' A_6') = (CA_3', CA_4') = 60^0$.

Remarques. 1°. L'égalité des segments rectilignes $A_1' A_4'$, $A_2' A_5'$, $A_3' A_6'$ (ou $A_1'' A_4''$, $A_2'' A_5''$, $A_3'' A_6''$) s'obtient aussi par des calculs simples, en observant, par exemple, que

$$\overline{A_1' A_4'^2} = \overline{A_1 A_4^2} + \overline{A_2 A_5^2} - 2A_1 A_4 . A_2 A_3 . \cos (60^\circ + x),$$

x, y, z, désignant les angles $(A_1 A_4, A_2 A_5)$, $(A_1 A_4, A_3 A_6)$, $(A_2 A_5, A_3 A_6)$, θ étant l'angle formé par les côtés $A_1 A_2$ et $A_2 A_3$ de H_1.



Si l'on pose $A_4 A_5 = a$, $A_3 A_4 = b$, $A_2 A_3 = c$, $A_1 A_2 = d$, et que l'on tienne compte de deux directions positives allant de A_1 vers A_2 et de A_2 vers A_3, on trouve que [1])

$$\begin{aligned} \overline{A_4' A_4'^2} &= a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 + 2\,(ac + bd) \\ &+ 2\,(ad - bc - cd)\cos\theta + 2S\sqrt{3} - 2S\cot x, \end{aligned} \qquad (1)$$

en remarquant que

$$A_1 A_4 . A_2 A_5 \sin x = 2S.$$

On obtient des relations analogues pour $\overline{A_2' A_5'^2}$ et $\overline{A_3' A_6'^2}$ dans lesquelles entrent les angles y et z.

[1]) Cf. V. THÉBAULT, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1940, p. 67.

2°. Quand les côtés consécutifs de l'exagone H_1 sont rectangulaires, $\theta = \frac{\pi}{2}$, et

$$\begin{aligned} \cot x &= \frac{b^2 + c^2 + ac + bd}{2S} = \cot B, \\ \cot y &= \frac{d^2 - ac + bd}{2S} = \cot A, \\ \cot z &= \frac{a^2 + ac - bd}{2S} = \cot C. \end{aligned} \tag{2}$$

Il résulte de ces formules que

$$\begin{aligned} \cot y + \cot z &= \frac{a^2 + d^2}{2S}, \quad \cot z + \cot x = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac}{2S}, \\ \cot x + \cot y &= \frac{b^2 + c^2 + d^2 + 2bd}{2S}; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \cot x + \cot y + \cot z &= \cot A + \cot B + \cot C \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd}{2S} = \cot V, \end{aligned} \tag{4}$$

V étant l'angle de Brocard du triangle ABC.

Des relations (2) il découle aussi que *le point* M *de rencontre des diagonales principales* A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, *est situé sur le cercle des neuf points du triangle* ABC *dont les sommets sont les points d'intersection des côtés opposées* [1]).

Si l'hexagone H_1 varie, de façon que ses côtés consécutifs restent rectangulaires, les points A, B, C étant fixes, on a successivement, en vertu de (3),

$$\begin{aligned} \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_4A_5}^2 &= 2S(\cot C + \cot A) = \text{const.} \\ \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_1A_6}^2 &= 2S(\cot A + \cot B) = \text{const.} \\ \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_5A_1}^2 &= 2S(\cot B + \cot C) = \text{const.} \\ \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \ldots + \overline{A_6A_1}^2 &= 4S(\cot A + \cot B + \cot C) \\ &= 4S\cot V = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = \text{const}; \end{aligned} \tag{5}$$

[1]) V. Thébault, *Mathesis*, 1932 (supplément), p. 2.

de sorte que *les sommes des carrés de deux côtés opposés et la somme des carrés des côtés de l'hexagone variable* H_1 *restent constantes.* On peut ajouter que *l'aire de l'hexagone* H_1 *reste constante et égale au double de l'aire du triangle* ABC.

Ces remarques indiquent que le cercle (ω) circonscrit à l'hexagone antipodaire H_1' du point M de concours des diagonales principales de H_1, par rapport à l'hexagone H_1, est, à la fois, le lieu des points dont l'aire de l'hexagone podaire H_1 de M, par rapport à H_1', et la somme des carrés de ses côtés soient constantes et respectivement égales à 2S et $(\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2)$.

3°. Dans un hexagone H_1, dont l'angle θ est quelconque, les triangles tels que $BA_3'A_4'$ et $CA_2'A_3'$ sont égaux et $BA_4 = CA_2'$.

Par analogie, il en résulte d'abord que

$$AA_6' = BA_4' = CA_2' \quad , \quad AA_3 = BA_1' = CA_5', \ldots,$$

et enfin que *les droites* (AA_6', BA_4', CA_2') *et* $(AA_3', BA_1', CA_5'), \ldots,$ *forment par leurs intersections des triangles équilatéraux.*

Théorème III. *Les sommets des triangles équilatéraux construits extérieurement et intérieurement sur les côtés du triangle complémentaire* A'B'C' *de* ABC *coïncident respectivement avec les milieux des diagonales principales des hexagones* H_2 *et* H_3.

Il suffit, en effet, d'observer que les points A_1', A_4', par exemple, sont les sommets des triangles équilatéraux construits extérieurement sur les côtés opposés A_1A_2 et A_4A_5 du quadrangle $Q \equiv A_1A_2\ A_4A_5$.

Dès lors, le milieu de $A_1'A_4'$ coïncide avec le sommet du triangle équilatéral construit extérieurement sur la droite C' A' qui joint les milieux des diagonales A_1A_4 et A_2A_5 de Q. Cette propriété est un cas particulier d'un théorème plus général que nous avons, déjà donné [1], et que le lecteur pourra vérifier sans peine.

Théorème IV. *Dans un hexagone* H_1, *dont les côtés consécutifs sont rectangulaires, les diagonales principales* $A_1'A_4'$, $A_2'A_5'$, A_3A_6' *et* $A_1''A_4''$, $A_2''A_5''$, $A_3''A_6''$ *des hexagones correspondants* H_2 *et* H_3 *sont égales aux distances des sommets du triangle* ABC *aux sommets* (X, Y, Z) *et* (X', Y', Z') *des triangles équilatéraux construits extérieurement et intérieurement sur* BC, CA, AB.

Cette proposition découle du théorème III, car les triangles équilatéraux construits extérieurement, par exemple, sur les côtés B' C',

---

[1] *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1940, p. 65.

C'A', A'B' du triangle A' B' C', coïncident avec les milieux a, β, γ des diagonales principales $A'_1 A'_4$, $A'_2 A'_5$, $A'_3 A'_6$ de H_2. Or, comme les triangles $A'_1 B' A'_4$, $A'_2 C' A'_5$, $A_3 'A' A'_6$, sont rectangles en B', C', A' et que $A'\alpha = B'\beta = C'\gamma$, on a

$$A'_1 A'_4 = 2B'\beta = BY \quad , \quad A'_2 A_5{}' = 2C'\gamma = CZ \quad , \quad A'_3 A'_6 = 2A'\alpha = AX.$$

Remarque. On arrive aux mêmes résultats en observant que [1])

$$\overline{AX}^2 = \overline{BY}^2 = \overline{CZ}^2 = 2S\,(\cot V + \sqrt{3}).$$

[1]) V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1933, loc. cit.

515.6 PERSPECTIVE

QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR LA PERSPECTIVE

par **Adrian Gheorghiu**

Dans un article [1]) *récemment paru*, M. S. FOTINO *considère la vue plongeante introduisant ainsi le point de fuite des verticales. L'auteur donne une méthode classique où l'on construit d'abord la perspective des points du géométral avec une fuyante principale et une droite d'égale résection, puis, avec une échelle des hauteurs propre, la perspective des élevations.*

Nous nous proposons de considérer le problème général, en donnant d'autres méthodes, de discuter leur économie graphique et d'introduire une « métrique perspective » nécessaire pour revenir des compositions perspectives aux projections orthogonales.

La «Perspective linéaire» classique n'est pas valable que dans le cas de la vue rigoureusement horizontale. Or la pratique met en évidence, en général, des directions obliques de la vue, par la tendance de regarder un objet vers son centre géométrique, tel qu'il soit entièrement compris dans un angle visuel déterminé, dans lequel l'accomodation de l'œil et le changement de la direction de la vue soient négligeables. On appelle cette direction, *la direction principale de la vue.*

D'autre part, le tableau plan adopté dans la perspective classique n'est qu'une première approximation de la realité, car il doit être considéré comme une tout petite partie de la surface des localisations visuelles. Il est donc strictement lié à l'œil: il est tangent à cette surface virtuelle et *pratiquement perpendiculaire à la direction principale de la vue*, étant limité par l'angle visuel de la vue d'« un seul coup d'œil » qui est d'environ 22°—28°.

---

[1]) Contribution à l'étude de la perspective aéronautique, *Buletinul Politehnicei din București*, XII (1941), no. 1 și 2.

Nous considérons donc, en classifiant:

1. *La vue horizontale* qui conduit à la perspective linéaire classique, applicable couramment en architecture pour une étendue horizontale prédominante.

2. *La vue ascendante* qui conduit à la perspective aérienne nécessaire dans les perspective des plafonds, des voûtes, ou pour une hauteur prédominante.

3. *La vue descendante* qui conduit à la perspective « vol d'oiseaux » en utilisant la même vieille expression pour ce nouveau contenu, ou avec le terme de M. S. Fotino, à la perspective aéronautique, nécessaire dans les vues d'ensemble.

Il faut donc considérer comme cas général de la perspective un tableau oblique et une distance de l'œil à l'objet assez grande. Il faut de même remarquer que géométriquement les deux derniers cas ne sont pas distincts et le premier devient un cas d'exception.

* * *

Notations et définitions. Soit (G) le plan horizontal nommé aussi *le géométral*, représentant la surface de la terre en un lieu suffisamment petit. Soit (T) le tableau plan oblique, qui coupe le géométral suivant *la ligne de terre ox*, sous un angle θ. Soit O *le point de vue* ou l'œil.

Un plan horizontal mené par l'œil coupe le tableau (T) suivant *la ligne d'horizon hh'*, la droite de fuite des tous les plans horizontaux.

On définit *le point principal* P comme la projection orthogonale de l'œil O sur le tableau. Il est situé au-dessous de la ligne d'horizon si la vue est descendante et au-dessus si la vue est ascendante, ainsi que OP est *la direction principale de la vue* et aussi *la distance de l'oeil au tableau*, noté D.

Réservant les notations F_1 et F_2 pour les points de fuite des deux directions horizontales perpendiculaires entre elles (points évidemment situés sur la ligne d'horizon) on introduit *le point de fuite des verticales*, F_3, obtenu par l'intersection de la verticale de O avec le tableau (T).

Soit encore P_3 la projection de O sur hh', il est le point de fuite des horizontales perpendiculaires à la ligne de terre. Nous l'appellons *le point principal* horizontal.

Il est évident que les points P, P_3, F_3 sont colinéaires sur une droite perpendiculaire en P_3 à la ligne d'horizon.

* * *

La perspective du point. Soit A un point de l'espace, sa perspective est l'intersection des perspectives des deux droites qui passent par A.

On introduit cette définition tenant de la projectivité de l'incidence, parce que l'utilisation directe du *rayon visuel* est pratiquement difficile. On choisit donc convenablement deux droites qui passent par A de telle manière qu'il résulte un minimum des constructions et seulement avec des éléments du tableau. Soit donc (fig. 1):

A' la projection de A sur le tableau;

A'' l'intersection avec le tableau de l'horizontale de A perpendiculaire à la ligne de terre;

a_0 l'intersection avec le tableau de la verticale de A.

Observons que les points de fuite des droites AA', AA'', Aa_0 sont respectivement P, P_3, F_3.

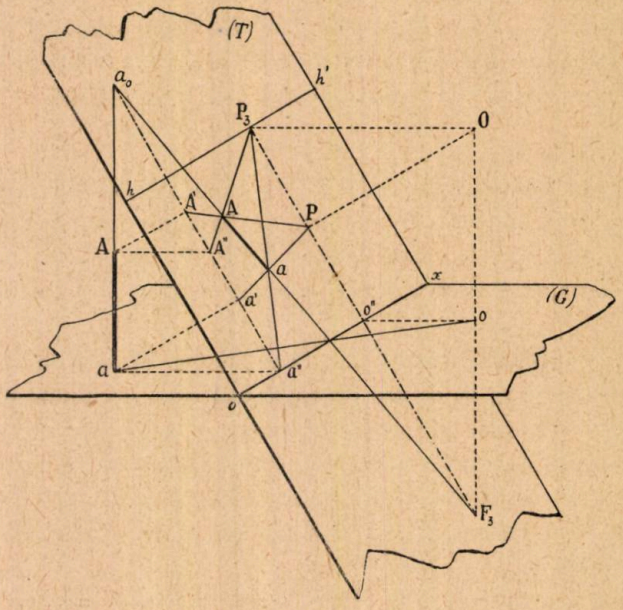


Fig. 1.

En combinant deux à deux de toutes les manières possibles, ces trois droites qui passent par A, nous avons trois méthodes de construire la perspective du point A:

$$Persp.\ A \equiv (A'P,\ a_0F_3)$$
$$Persp.\ A \equiv (A''P_3,\ a_0F_3)$$
$$Pesrp.\ A \equiv (A'P,\ A''P_3).$$

Soit a la projection de A sur le géométral et soit a' et a'' les projections de a sur le tableau et sur la ligne de terre. On construit la perspective du point a par les mêmes méthodes que la perspective du point A.

Il résulte de là, *que dans la perspective générale, on traite de la même manière les points du géométral et les points de l'espace.*

On remarque que les points a_0, A', A'', a', a'' sont colinéaires sur une droite perpendiculaire à la ligne de terre. Pour la construction des expressions d'en haut — pour le point A autant que pour le point a — on rabat le triangle a_2aa'' — *triangle de position* du point A — autour de a_0a'', sur le tableau. Donc, en considérant aussi le segment verticale aA on obtient les épures (2), (3), (4).

En introduisant la construction de définition, par le rayon visuel du point A, il est besoin d'un deuxième rabattement: celui du triangle dep osition du point O. [Ce qui peut être inaccessible et en tout cas rend l'épure plus compliquée].

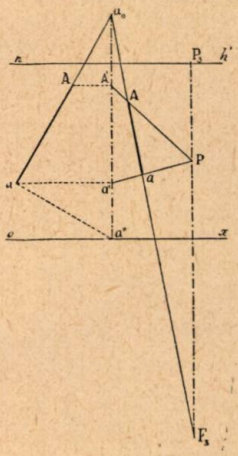


Fig. 2.

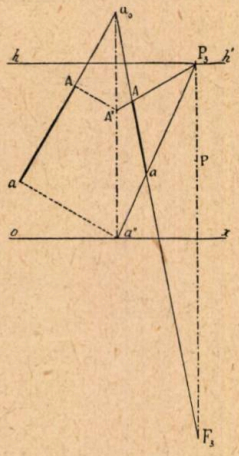


Fig. 3.

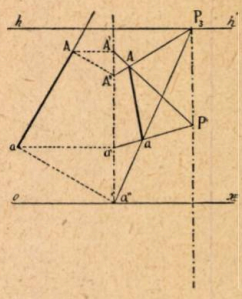


Fig. 4.

Donc la méthode la plus avantageuse qu'il nous reste est celle de l'épure (4) par laquelle nous nous dispensons autant de F_3 que de a_0, les deux points pouvant être inaccessibles.

En revenant au cas d'exception de la vue rigoureusement horizontale, les points F_3 et a_0 sont envoyés à l'infini en direction verticale, P vient se confondre avec P_3 sur hh', a vient se confondre avec a'' sur ox, et A' avec A''. Par conséquant les constructions (2), (3), (4) ne sont pas possibles, les perspectives des points a et A restant indéterminées sur les droites $a'P$ et $A'P$ confondue respectivement avec $a''P_3$ et $A''P_3$.

Il faut donc introduire un élément nouveau: *la distance D de l'oeil au tableau*, distance qui dans le cas général résultait par la donnée des points P, P_3, F_3 distincts et à distance finie. Cette distance D peut

être donnée par la projection o du point O sur le géométral, ou par le rabattement O_0 de O sur le tableau.

On construit donc la perspective de a du géométral soit avec la *projection horizontale* $a_g o$ du rayon visuel (a_g étant la vraie situation du point a sur le géométral), soit avec le *rabattement* aO_0 du rayon visuel. La perspective de A de l'espace est maintenant immédiate, étant donné que la verticale aA *reste verticale* sur le tableau, (fig. 5).

Autrement, on détermine le point a par l'intersection des deux droites convenablement choisies dans le géométral même, renonçant alors aux points o ou O_0.

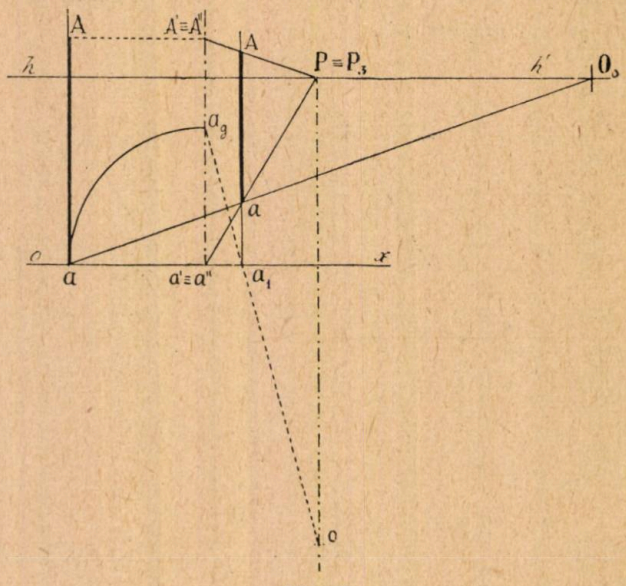


Fig. 5.

D'ici donc résulte le besoin de la perspective horizontale classique *de mettre en perspective d'abord le géométral et puis l'élévation.*

* * *

La perspective d'un trièdre trirectangle avec une face horizontale. On sait que parfois et surtout pour la perspective des plans irreguliers, il est préférable de construire préalablement un « *quadrillage perspectif* » du géométral.

La méthode a une extension dans l'espace. M. Pierre Olmer, professeur au E.N.S. des Beaux-Arts de France, donne, à cet égard, dans un article de la revue « L'*Architecture* » No. 2, 1939, intitulé « Les *Architectes et la Perspective* » une série des quadrillages perspectifs qu'il nomme aussi « *quadrillages régulateurs* ».

Avec ces « quadrillages régulateurs » de l'espace on peut exécuter rapidement et exactement une perspective d'après une projection orthogonale et réciproquement, on peut composer directement en perspective, ayant toujours présente la notion de la grandeur ; parce que l'avantage des quadrillages régulateurs est celui de mettre en évidence des échelles perspectives d'une même unité de mesure au long des trois axes perpendiculaires deux à deux.

L'auteur introduit ces quadrillages régulateurs « en opposant aux divers systèmes trop scientifiques, la vieille pratique de la perspective classique, fondée sur l'expérience de l'observation en dessin telle que

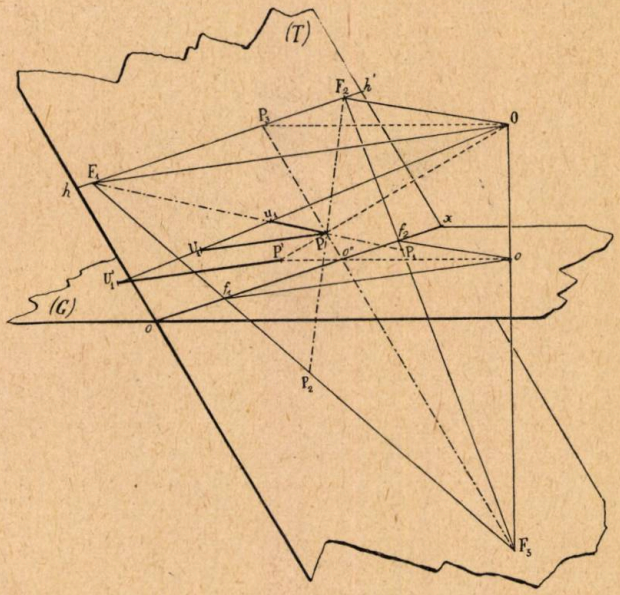


Fig. 6.

l'avaient établie patiemment les maîtres de la Renaissance ». On donne alors pour la construction de ces quadrillages seulement l'indication :

« Ces quadrillages régulateurs sont assez simples à tracer si l'on a soin de les constituer en partant de l'image d'un grand cube dans une certaine position. On divise ensuite les images des arêtes en grandeurs-images perspectivement égales afin d'obtenir les carrés-images des quadrillages régulateurs ».

Nous allons donner, dans ce qui va suivre, des constructions graphiques rigoureuses des quadrillages régulateurs soit directement, soit par la mise en perspective d'un cube.

On trace donc par O, trois droites parallèles aux axes d'un trièdre trirectangle donné, qui coupent le tableau oblique en trois points F_1, F_2, F_3, les points de fuite des directions de ces trois axes. L'une des trois faces du trièdre étant horizontale, deux des trois points de fuite, soit F_1, F_2, se trouvent sur la ligne d'horizon hh', le troisième F_3 étant le point de fuite des verticales (fig. 6).

On remarque aisément que le point principal P est l'orthocentre du triangle $F_1F_2F_3$, car P, P_3, F_3 sont colinéaires sur une droite perpendiculaire à F_1F_2, c'est-à-dire sur l'hauteur du F_3, de même on obtient PP_1F_2 et PP_2F_2, les hauteurs des sommets F_1, F_2 du triangle $F_1F_2F_3$.

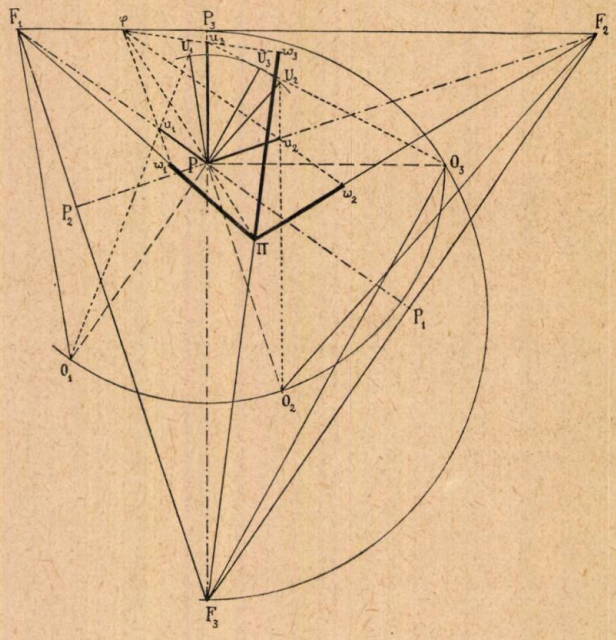


Fig. 7.

Nous considérons d'abord le sommet du trièdre trirectangle donné, et évidemment sa perspective, confondues au point principal P; alors les perspectives des axes PX_1, PX_2, PX_3 du trièdre sont PF_1, PF_2, PF_3. Pour obtenir les perspectives d'une même unité de longeur placée sur les trois axes-perspectives PF, on prend sur les PX:

$$PU_1 = PU_2 = PU_3$$

Les rayons visuels OU_1, OU_2, OU_3 coupent les trois perspectives PF_1, PF_2, PF_3 dans les *points-unités perspectifs*: u_1, u_2, u_3 (fig. 6).

On construit les points u_1, u_2, u_3 directement sur le tableau par le rabattement du point O autour de chaque hauteur du triangle $F_1F_2F_3$,

aux points O_1, O_2, O_3. En effet, on prend sur le tableau, l'unité réelle de l'espace PU_1 parallèle à la droite O_1F_1, la droite O_1U_1 qui est le rabattement du rayon visuel, coupe PF_1 au *point-unité perspectif* cherché u_1 (fig. 7).

Du trièdre $Pu_1u_2u_3$ ainsi obtenu comme perspective du trièdre unitaire $PU_1U_2U_3$, ou ce qui est la même chose du trièdre $P'U_1'U_2'U_3$ parallèlle au premier et ayant la face $P'U_1'U_2'$ dans le géométral (fig. 6), on peut obtenir directement sur le tableau autant d'autres trièdres perspectifs, en donnant seulement la perspective du sommet. En effet, à une translation du trièdre $PU_1U_2U_3$ dans l'espace, correspond sur le tableau une projection conique du trièdre perspectif $Pu_1u_2u_3$, le pôle de cette projection étant le point de fuite de la direction de la translation.

Soit par exemple Π la perspective du sommet d'un trièdre trirectangle parallèle au $P'U_1'U_2'U_3'$ et ayant aussi une face sur le géométral. Donc, la translation de l'espace étant horizontale, la droite $P\Pi$ coupe la ligne d'horizon au point φ, point de fuite de la translation et pôle de la projection conique. Ainsi que les projetantes φu_1, φu_2, φu_3 coupent respectivement ΠF_1, ΠF_2, ΠF_3, comme perspectives des axes du nouveau trièdre, aux *points-unités perspectifs* correspondantes ω_1, ω_2, ω_3. Le trièdre perspectif $\Pi\omega_1\omega_2\omega_3$ ainsi obtenu, est la perspective d'une position translatée du trièdre unitaire $P'U_1'U_2'U_3'$ (fig. 7).

Tout se passe avec l'approximation d'une similitude, entre l'unité $u = PU_1$, choisie en P, et l'unité $w = P'U_1'$ du géométral on a (fig. 6):

$$\frac{u}{\omega} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{P_3P}}{\overline{P_3O''}}$$

c'est-à-dire toutes les unités perspectives Pu et $\Pi\omega$ représentent la même unté du géométral:

$$\omega = u \cdot \frac{\overline{P_3O''}}{\overline{P_3P}} .$$

Mais l'unité u ne peut être choisie arbitrairement, elle doit être liée aux données de la perspective: objet, œil, tableau.

Soit, donc, G le centre géométrique d'un objet qui peut être réduit à un parallélipipède, soit $2d$ sa diagonale (sa plus grande dimension) de cosinus directeurs m, n, p qu'on peut calculer par rapport à un trièdre trirectangle $GX_1X_2X_3$ dont les axes sont parallèles aux arêtes du parallélipipède. Soit OG la direction principale de le vue choisie de telle manière que la perspective aie une certaine expression ou une certaine « dominance » voulue, soit α, β, γ ses cosinus directeurs par rapport aux mêmes axes.

En notant par V l'angle de la diagonale avec la direction de la vue OG, on a:

$$\cos V = m\alpha + n\beta + p\gamma$$

En prenant pour l'angle visuel optimum la valeur de 24°, le point O se trouve sur le *tor* engendré par la rotation de l'arc de cercle capable d'un angle de 24° construit sur la diagonale $2d$, autour de cette diagonale. On peut calculer $\overline{OG}$ comme il suit: Soit c la projection du centre du cercle ci-dessus dont le rayon est R, on a:

$$\overline{OG} = \overline{Oc} + \overline{cG}$$

$$\overline{OG} = \sqrt{R^2 - (R^2 - d^2)\cos^2 V} + \sqrt{R^2 - d^2}\sin V$$

où:
$$R = \frac{d}{\sin 24°}$$

donc:

$$\overline{OG} = \frac{d}{\sin 24°}(\cos 24° \sin V + \sqrt{\sin^2 V + \sin^2 24° \cos^2 V}).$$

Soit ω l'unité réelle placée sur les axes GX, avec des notations déjà introduites, on a:

$$\frac{u}{\omega} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OG}} = \frac{D \sin 24°}{d(\cos 24° \sin V + \sqrt{\sin^2 V + \sin 24° \cos^2 V})}$$

formule qui détermine l'unité u en fonction de l'unité réelle ω, de la grandeur de l'objet, de l'angle visuel admissible, de la direction principale de la vue et de la distance de l'œil au tableau.

* * *

Nous donnons une deuxième méthode pour la construction directe d'un trièdre perspectif: on prend directement sur le tableau le point Π comme perspective du sommet d'un certaine trièdre de l'espace, et sur l'une des axes perspectives, soit ΠF_2 on prend l'unité perspective correspondante $\Pi\omega_2$; les unités des autres axes perspectives en résultent.

On connaît la notion *des droites d'égale résection* qui coupent en parties égales des droites frontales et principales. En généralisant on obtient la notion *des droites d'égale résection rélatives à deux directions perpendiculaires coplanaires* qui coupent donc des segments égaux sur des droites ayant ces directions. Elles se séparent, en perspective, en deux familles des droites concourantes en deux points de fuite D et D' évidemment situés sur la droite de fuite du plan déterminé par ces deux directions. On appelle ces points: *points de distance entière relatifs aux*

deux directions perpendiculaires et coplanaires, ils sont les points de fuite des deux bissectrices, l'intérieure et l'extérieure de l'angle droite des directions données.

On trace donc, les bissectrices intérieures (ou extérieures s'il y a avantage) des angles droits F_1OF_2, F_2OF_3, F_3OF_1 en espace ou sur le tableau après leur rabattement en $F_1O_3F_2$, $F_2O_1F_3$, $F_3O_2F_1$. Ces bissectrices coupent les droites de fuite respectives F_1F_2, F_2F_3, F_3F_1 aux *points de distance entière généralisée* correspondants D_3, D_1, D_2 (fig. 8).

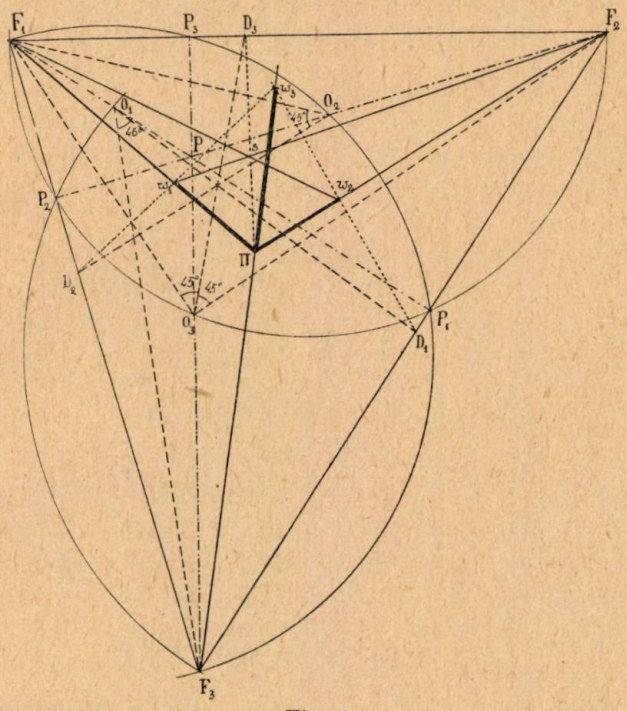


Fig. 8.

Alors, étant donné l'unité perspective $\Pi\omega_2$, la droite $D_1\omega_2$ coupe ΠF_3 en ω_3 et la droite $D_2\omega_3$ coupe ΠF_1 en ω_1 ; on obtient ainsi la perspective $\Pi\omega_1\omega_2\omega_3$ d'un certain trièdre trirectangle unitaire avec une face horizontale.

On a les vérifications suivantes: les droites ω_1F_2, ω_2F_1, ΠD_3 sont concourantes. La droite $\omega_1\omega_2$ passe par le point D'_3, le pied de la bissectrice extérieure de $F_1O_3F_2$. On peut utiliser aussi dans les constructions la concourance des bissectrices O_1D_1, O_2D_2, O_3D_3.

Pour la connaissance de l'unité réelle de l'espace, il est avantageux d'obtenir par la première méthode un seul point-unité perspectif et de déduire ensuite par la deuxième méthode les deux autres.

Mais on peut déduire de la perspective $\Pi \omega_1 \omega_2 \omega_3$ le trièdre perspectif $Pu_1u_2u_3$ par l'opération inverse de la première méthode avec le point $\varphi \equiv (\Pi P, F_1F_2)$ et déduire ensuite l'unité ω du géométral si l'on donne l'hauteur de l'œil — ou, sur le tableau, la ligne de terre ox.

Deux des points de fuite peuvent être inaccessibles, on combine alors convenablement les deux méthodes.

Dans le cas d'exception de la vue rigoureusement horizontale, la première de ces deux méthodes fait défaut, tandis que la seconde est applicable, les constructions de la fig. 8 étant encore possibles. Dans ce cas, l'unité verticale reste semblable à elle-même et peut être considérée comme unité u.

* * *

Quadrillages régulateurs. Une fois les points-unités perspectifs déterminés sur les trois axes du trièdre trirectangle perspectif, on peut con-

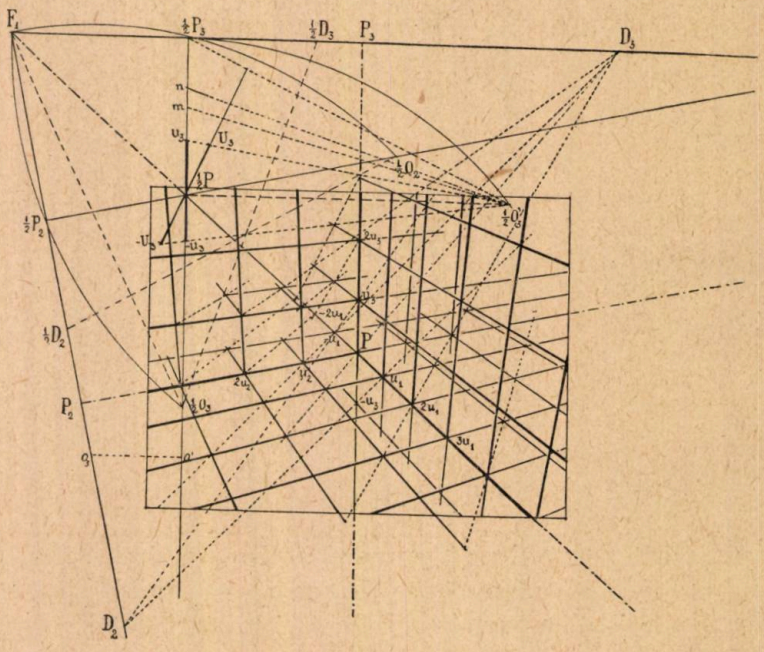


Fig. 9.

tinuer leur graduation perspective de proche en proche, réalisant ainsi dans les trois faces du trièdre perspectif des carrélages perspectivement égales, autant que l'on désire. Pour illustrer ces tracés, on donne l'application de la fig. 9, où les points F_2 et F_3 sont inaccessibles, connaissant seulement les points F_1 et P et les hauteurs PP_3 et PP_2. On détermine les points D_2 et D_3 en opérant d'abord sur un triangle

homothétique du triangle $F_1F_2F_3$, de pôle F_1 et dans le rapport $\frac{1}{2}$. On détermine ensuite par la première méthode, à l'aide du rabattement $\frac{1}{2}\,O'_3$, les points unités u_3 et $-u_3$. (Il est nécessaire d'avoir deux points-unités sur une même axe PF_3, à cause de l'absence en épure des points F_2 et F_3). On obtient immédiatement avec D_2 les points u_1 et $-u_1$ et avec D_3, les points u_2 et $-u_2$. On continue ensuite de proche en proche les divisions perspectives seulement à l'aide des points F_1, D_2 et D_3.

On a déterminé dans la fig. 9 aussi *le cadre* du tableau sachant que approximativement l'angle visuel vertical est de 24° et l'horizontal de 36° et que le point principal P doit rester au centre de ce cadre.

On peut prendre à l'aide des mêmes moyens le sommet du trièdre perspectif en un point quelquonque II.

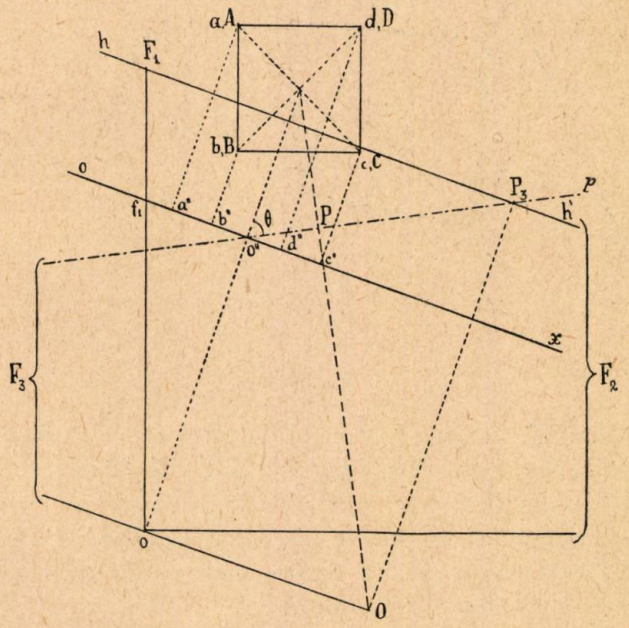


Fig. 10.

Un quadrillage régulateur une fois construit reste valable aussi pour la vue descendante que pour le vue ascendante par un simple renversement.

* * *

La perspective du cube. Nous donnons dans les figures 10 et 11 l'épure et le tableau pour le perspective d'un cube vu de haut en bas vers le centre de sa base située sur le géométral.

Dans la fig. 10 on a tous les éléments en projection sur le géométral. En rabattant la ligne de la plus grande pente du tableau et l'œil respectivement en $o''p$ et O sur le géométral, on détermine les points P et P_3. Il résulte la projection hh' de la ligne d'horizon, le point de fuite F_3 (inaccessible) et enfin les points de fuite F_1 et F_2 (inaccessibles) sur hh'.

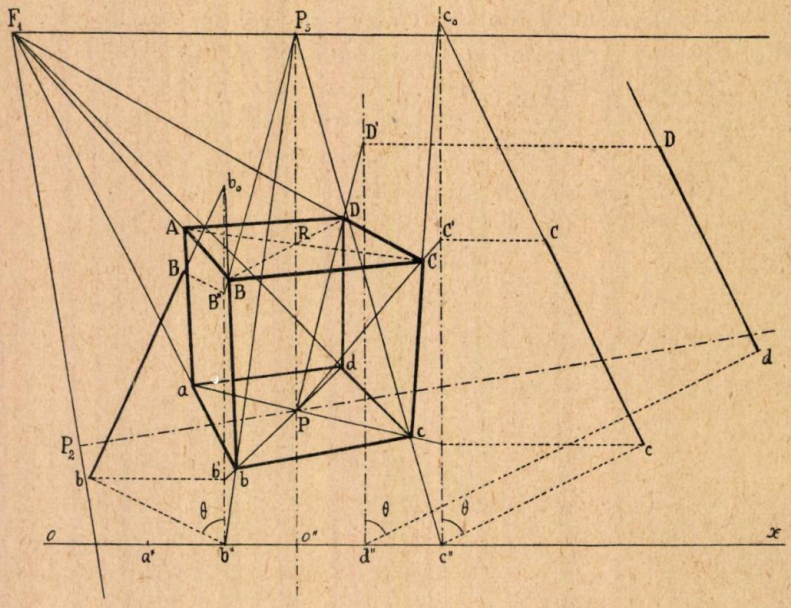


Fig. 11.

Dans la fig. 11, on prend la ligne de terre ox et la ligne d'horizon hh' à une distance entre elles, égale à $2.o''P_3$ de l'épure (10), on prend de même les points P, F_1, f_1. Avec ces éléments on trace la perspective du cube, en appliquant les épures (2), (3), (4) choisies convenablement et autant qu'il est nécessaire. On utilise aussi le fait qu'on a la perspective du centre de la base du cube en P.

Ainsi tracée la perspective du cube, à l'aide des méthodes de la *perspective directe* on peut diviser ses arêts en un nombre égale des parties perspectivement égales, obtenant de nouveau un « quadrillage régulateur » de l'espace.

FORMES DIVERSES DU THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

par **D. Pompeiu**

1. La forme classique du théorème des accroissements finis

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi) \tag{1}$$

avec

$$a < \xi < b$$

peut être transformée et présentée sous des formes nouvelles, en passant de l'opération (*soustraction*) qui, dans le premier membre de (1) lie les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ — à d'autres opérations analogues, qui généralisent la soustraction [1]).

Je me bornerai dans ce qui suit à un seul exemple, je donnerai aussi une application et je terminerai par une indication générale.

2. Supposons $f(x)$ fonction positive dans tout l'intervalle dans lequel on la considère et appliquons la formule (1), au lieu de $f(x)$, à la fonction

$$F(x) = \log f(x).$$

On aura

$$\log f(b) - \log f(a) = (b - a) \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$$

avec

$$a < \xi < b$$

relation qui s'écrit aussi

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}} \tag{2}$$

avec

$$a < \xi < b.$$

---

[1]) Voir un article de l'auteur dans ce même *Bulletin*, 12 (1941), no. 3—4.

C'est la forme que nous avions en vue: elle suppose $f(x)$ *positive* dans l'intervalle où l'on applique la relation (2).

3. Passons à une application.

Dans son *Traité d'Analyse* (troisième édition: tome I, page 294) JORDAN, cherchant des règles pour décider de la convergence des séries à termes numériques, est amené à utiliser la relation suivante.

$$e^{\frac{b-a}{b}} < \frac{b}{a} \tag{3}$$

avec a et b positifs et

$$a < b.$$

Pour la démonstration de la relation (3) JORDAN emploie le développement en série de la fonction exponentielle et des considérations particulières à la question qui l'intéresse; tandis que la forme (2) du théorème des accroissements finis donne, non seulement la relation cherchée (3) mais elle est prête à servir, d'une façon générale, dans beaucoup d'autres applications.

Pour obtenir (3), faisons dans (2)

$$f(x) = x$$

La relation (2) devient

$$\frac{b}{a} = e^{(b-a)\frac{1}{\xi}}$$

avec

$$a < \xi < b$$

et alors, évidemment on a

$$\frac{b}{a} > e^{\frac{b-a}{b}}.$$

4. Sans insister sur d'autres applications de la forme (2) du théorème des accroissements finis je vais indiquer seulement une autre forme analogue à (2) et je terminerai par une remarque relative à ces diverses formes.

Prenons:

$$F(x) = \operatorname{arctg} f(x).$$

Le théorème des accroissements finis appliqué à $F(x)$ donne

$$\operatorname{arctg} f(b) - \operatorname{arctg} f(a) = (b-a)\frac{f'(\xi)}{1+f^2(\xi)}$$

d'où l'on passe à la forme

$$\frac{f(b)-f(a)}{1+f(a)\,f(b)} = \operatorname{tg}\left[(b-a)\frac{f'(\xi)}{1+f^2(\xi)}\right] \tag{4}$$

avec

$$a < \xi < b.$$

5. Nous avons ainsi, en (1), (2) et (4) trois formes du théorème des accroissements finis.

Si dans la forme (1) on fait

$$f(x) = x \tag{5}$$

la relation (1) devient une *identité.*

Si, dans la forme (2) on fait

$$f(x) = e^x \tag{6}$$

la relation (2) devient une *identité.*

Enfin, si dans (4) on fait

$$f(x) = \operatorname{tg} x \tag{7}$$

on obtient une *identité.*

On est alors conduit à dire que la forme classique du théorème des accroissements finis est attachée à la fonction (5); la forme (2) à la fonction (6) et la forme (4) à la fonction (7).

Mais, par là, on voit l'infinie variété des formes sous lesquelles on peut présenter le théorème des accroissements finis.

SUR UN PROBLÈME POUR LES FONCTIONS HARMONIQUES DANS UN CERCLE

par **Nicolas Cioranescu**

1. Dans un travail antérieur [1]), nous avons considéré une généralisation du problème de DIRICHLET, à l'aide d'une famille de surface Σ_λ $(o \leqslant \lambda \leqslant 1)$ Σ_0 se réduisant à un point et Σ_1 étant la frontière d'un domaine Ω, de sorte que les coordonnées d'un point de Σ_λ ainsi que λ puissent définir d'une manière unique un système de coordonnées dans $\Omega + \Sigma_1$. Alors, nous nous proposons de déterminer la fonction harmonique $U(M)$, régulière dans $\Omega + \Sigma_1$, par une condition globale de la forme suivante:

$$\int_0^1 U_{\Sigma_\lambda}\, d\alpha(\lambda) = f(Q) \tag{1}$$

U_{Σ_λ} désignant la valeur de $U(M)$ sur Σ_λ, $f(Q)$ une fonction donnée, et $\alpha(\lambda)$ une fonction à variation bornée ayant un saut à gauche pour $\lambda = 1$.

Nous avons montré qu'on peut ramener ce problème à une équation intégrale du type de FREDHOLM, en prenant pour fonction inconnue la densité d'un potentiel de double couche, ou bien les valeurs de $U(M)$ sur Σ_1.

Dans ce qui va suivre nous allons considérer un cas particulier de ce problème général, et qu'on peut résoudre complètement.

2. Soient C_R et C_r deux cercles concentriques $(r < R)$. Proposons-nous de déterminer une fonction harmonique $u(\rho, \theta)$, régulière dans C_R, par la condition:

$$u(R, \theta) - \lambda u(r, \theta) = f(\theta) \tag{2}$$

où

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \tag{3}$$

---

[1]) Quelques nouveaux problèmes sur les fonctions harmoniques, *Annali di Matematica pura ed applicata* [1] 11 (1932), pp. 135—154.

est une fonction donnée, et λ est un paramètre pour le moment quelconque.

On peut ramener le problème précedent au problème classique de DIRICHELET, en passant par une équation intégrale, de la manière suivante:

Posons:

$$u(R, \theta) = \varphi(\theta).$$

Alors on a, d'après la formule de POISSON:

$$(4) \qquad u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \alpha) + \rho^2} \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

Si l'on substitue dans la condition (2), on arrive pour $\varphi(\theta)$ à l'équation intégrale:

$$(2') \qquad \varphi(\theta) - \frac{\lambda}{2\pi} \int^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha) + r^2} \varphi(\alpha)\, d\alpha = f(\theta).$$

Les relations (2') et (4) donnent la solution du problème posé.

3. Mais on peut aussi traiter directement le problème posé par (2). Cherchons $u(\rho, \theta)$ sous la forme suivante:

$$(5) \qquad u(\rho, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)\, \rho^n$$

Si l'on substitue dans (2), on trouve après identification:

$$(6) \qquad \alpha_n = \frac{a_n}{R^n - \lambda r^n} \quad , \quad \beta_n = \frac{b_n}{R^n - \lambda r^n}$$

en supposant:

$$\lambda \neq \left(\frac{R}{r}\right)^n.$$

Comme d'autre part a_n et b_n sont les coefficient de FOURIER de $f(\theta)$, il en résulte:

$$(5') \qquad u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_0^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{\cos n(\alpha - \theta)}{1 - \lambda \left(\frac{r}{R}\right)^n} \right] f(\alpha)\, d\alpha.$$

On peut écrire d'une autre manière la somme:

$$(7) \qquad \frac{1}{2(1-\lambda)} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{\cos n\psi}{1 - \lambda \left(\frac{r}{R}\right)^n}.$$

En effet, posons:

$$(8) \qquad Z = \frac{\rho}{R} e^{i\psi} \quad ; \quad k = \frac{r}{R} \cdot$$

Alors la somme (7) est la partie réelle de

$$(7') \qquad G(z) = \frac{1}{2(1-\lambda)} + \sum_1^\infty \frac{z^n}{1-\lambda k^n} = -\frac{1}{2(1-\lambda)} + \sum_0^\infty \frac{z^n}{1-\lambda k^n} \cdot$$

Mais soit:

$$(9) \qquad F(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{1-\lambda k^n}$$

la fonction méromorphe de λ, holomorphe autour de $\lambda = o$. On peut donc écrire:

$$F(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{F_{(0)}^{(p)}}{p!} \lambda^p.$$

Mais:

$$F_{(\lambda)}^{(p)} = p! \sum_0^\infty k^{pn} (1-\lambda k^n)^{-p-1} z^n$$

donc:

$$\frac{F_{(0)}^{(p)}}{p!} = \sum_0^\infty (k^p z)^n = \frac{1}{1-k^p z} \cdot$$

On a par conséquent:

$$(9') \qquad F(\lambda) = \sum_1^\infty \frac{z^n}{1-\lambda k^n} = \sum_0^\infty \frac{\lambda^n}{1-k^n z} \cdot$$

Mais, d'autre part, on a:

$$\Re \sum_0^\infty \frac{\lambda^n}{1-k^n z} = \Re \sum_0^\infty \frac{(1-k^n \bar{z})\lambda^n}{1-k^n(z+\bar{z})+k^{2n}|z|^2} =$$

$$\sum_0^\infty \frac{R^{2n+2} - R^{n+1} r^n \rho \cos\psi}{R^{2n+1} - 2R^{n+1} r^n \rho \cos\psi + r^{2n} \rho^2} \lambda^n$$

(on tient compte des expressions (8) de z et k et de ce que λ est réel).

Par conséquent:

$$(10) \qquad \begin{cases} \Re G(z) = \sum_0^\infty \left[\dfrac{R^{2n+2} - R^{n+1} r^n \rho \cos\psi}{R^{2n+2} - 2R^{n+1} r^n \rho \cos\psi + r^{2n} \rho^2} - \dfrac{1}{2} \right] \lambda^n \\ \quad = \dfrac{1}{2} \sum_0^\infty \dfrac{R^{2n+2} - r^{2n} \rho^2}{R^{2n+2} - 2R^{n+1} r^n \rho \cos\psi + r^{2n} \rho^2} \lambda^n . \end{cases}$$

Il en résulte que:

$$(11)\quad u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\int_0^{2\pi}\frac{R^{2n+2}-r^{2n}\rho^2}{R^{2n+2}-2R^{n+1}r^n\rho\cos(\theta-\alpha)+r^{2n}\rho^2}f(\alpha)\,d_\alpha.$$

Nous avons réussi donc à mettre $u(\rho,\theta)$ sous la forme:

$$(11')\qquad u(\rho,\theta)=\sum_0^{\infty}\lambda^n U_n(\rho,\theta).$$

Comme on voit, pour $\lambda=o$ on retrouve la formule de Poisson, qui donne la solution du problème de Dirchlet pour le cercle, auquel se réduit notre problème lorsqu'on fait $\lambda=o$ dans la condition (2).

Les fonctions:

$$(12)\quad U_n(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^{2n+2}-r^{2n}\rho^2}{R^{2n+2}-2R^{n+1}r^n\rho\cos(\theta-a)+r^{2n}\rho^2}f(\alpha)\,d_\alpha$$

sont des fonctions harmoniques, qui prennent sur le contour C_R les valeurs:

$$(13)\qquad f_n(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^{2n}-r^{2n}}{R^{2n}-2R^nr^n\cos(\theta-\alpha)+r^{2n}}f(\alpha)\,d\alpha.$$

On a alors:

$$(11'')\qquad u(R,\theta)=\varphi(\theta)=\sum_0^{\infty}\lambda^n f_n(\theta)$$

c.-à-d. la solution de l'équation intégrale (2'). Si l'on désigne par $u_0(\rho,\theta)$ la fonction harmonique dans C_R qui prend les valeurs $f(\theta)$ sur C_R, alors il est facile de voir que l'on a:

$$(13')\qquad f_n(\theta)=u_0\left(\frac{r^n}{R^n},\ \theta\right).$$

4. Nous avons supposé $\lambda\neq\left(\frac{R}{r}\right)^n$. La suite: $\lambda_n=\left(\frac{R}{r}\right)^n$ donne les valeurs caractéristiques de l'équation (2'), les fonctions caractéristiques étant:

$$(14)\qquad \varphi_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta.$$

En se rapportant à la condition (2), il en résulte que si les valeurs d'une fonction harmoniques dans les points homologues de deux cercles concentriques sont proportionnelles, alors la fonction harmonique est un polynome harmonique homogène. Cela n'est d'ailleur possible que si le rapport

$$\frac{U(R, \theta)}{u(r, \theta)}$$

est égal à un nombre λ_n.

Autrement dit, si l'on a: $U(R, \theta) = \lambda U(r, \theta)$ avec un $\lambda \neq \lambda_n$, il en résulte que $U(\rho, \theta) \equiv o$ dans C_R. Nous n'insistons pas davantage sur l'équation intégrale (2′) qui rattache les séries trigonométriques à une certaine équation intégrale à noyau symétrique défini [1]), et qui d'ailleurs est connue.

[1]) Voir p. ex. R. COURANT and D. HILBERT: Methoden der Mathematischen Physik Bd. I, p. 134 ex. 2.

EINIGE NEUE BETRACHTUNGEN ÜBER DIE KRITERIEN ERSTER UND ZWEITER ART FÜR DIE REIHEN MIT POSITIVEN GLIEDERN

von **Virgil Claudian**

Ich will einige benutzte Ausdrücke für die Festsetzung de Konvergenz oder der Divergenz der Reihen mit positiven Gliedern wiedernehmen; in einem ersten Teil werde ich mehrere Hilfssätze festsetzen welche in dem was folgt notwendig sind. Dieselben Ausdrücke, welche den Gegenstand der anwesender Vorarbeit bildet, hat Herr MONTEL [1]) noch auf anderem Wege untersucht.

1. **Hilfssatz I.** *Der Ausdruck*

$$a_m = \frac{\log\left\{\left(1+\frac{x}{r}\right)\left(1+\frac{x}{r+1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{r+m}\right)\right\}}{\log(r+m+1)}$$

wenn $m \to \infty$, *nach* x *strebt.*

Beweis. Ich wende ein bekannter Satz von CESÀRO [2]) an, und dann ist der Grenzwert von a_m derselbe wie derjenige des Ausdruckes

$$\frac{\log\left(1+\frac{x}{r+m}\right)}{\log(r+m+1)-\log(r+m)} = \frac{\log\left(1+\frac{x}{r+m}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{r+m}\right)}$$

[1]) P. MONTEL, *Nouv. Annales de Mathématiques* (1912), S. 80—93.

[2]) CESARO, *Einleitung in die Infinit.-rechnung*, S. 97; KNOPP, *Unendliche Reihen*, S. 74; BROMWICH, *Infinite Series*, S. 414 (1931); PIERPONT, *Functions of real variables*, Bd., I, S. 112; PRINGSHEIM, *Vorlesungen*, I, 1, S. 228.

wenn der letzte vorhanden ist. Der letzte Ausdruck kann man schreiben

$$\frac{\log\left(1+\frac{x}{r+m}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{r+m}\right)}=\frac{(r+m)\log\left(1+\frac{x}{r+m}\right)}{(r+m)\log\left(1+\frac{1}{r+m}\right)}=\frac{\log\left(1+\frac{x}{r+m}\right)^{r+m}}{\log\left(1+\frac{1}{r+m}\right)^{r+m}}.$$

Dieser letzte Ausdruck nach $\log e^x / \log e = x$ strebt.

2. **Hilfssatz II.** *Der Ausdruck*

$$b_m=\frac{\log\left\{\left(1+\frac{x}{(r+1)\log r}\right)\left(1+\frac{x}{(r+2)\log(r+1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{(r+m+1)\log(r+m)}\right)\right\}}{\log\log(r+m+1)}$$

für unendlich zunehmendes m, *nach* x *konvergiert.*

Beweis. Ich wende denselben Satz von Cesàro an. Der Grenzwert von b_m ist derselbe wie derjenige des Ausdruckes

$$\frac{\log\left(1+\frac{x}{(r+m+1)\log(r+m)}\right)}{\log\log(r+m+1)-\log\log(r+m)}=\frac{\log\left(1+\frac{x}{(r+m+1)\log(r+m)}\right)}{\log\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{r+m}\right)}{\log(r+m)}\right)}$$

wenn der letzte Grenzwert existiert. Der letzte Ausdruck kann auch folgendermassen geschrieben werden

$$\frac{\log\left(1+\frac{x}{(r+m+1)\log(r+m)}\right)^{(r+m+1)\log(r+m)}}{\log\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{r+m}\right)^{r+m+1}}{(r+m+1\log)(r+m)}\right)^{(r+m+1)\log(r+m)}}\to\frac{\log e^x}{\log e}=x,$$

wenn $m\to\infty$. Folglich $b_m\to x$ wenn $m\to\infty$ strebt.

3. **Hilfssatz III.** *Die Grenzwerte der Ausdrücke*

$$\frac{\log(n+a)}{\log(n+b)},\ \frac{\log_2(n+a)}{\log_2(n+b)},\ \ldots,\ \frac{\log_p(n+a)}{\log_p(n+b)},$$

wenn $n\to\infty$ *mit der Einheit gleich sind, für irgendwelche endliche Zahlen* a *und* b, p *eine positive ganze Zahl bedeutend, und später haben wir bezeichnet*

$$\log_1 x=\log x\ ,\ \log_2 x=\log\log x,\ldots\ldots\log_k x=\log\log_{k-1}x.$$

Beweis. Ich werde durch vollständinge Induktion verfahren

$$\frac{\log(n+a)}{\log(n+b)} = 1 + \frac{\log(n+a) - \log(n+b)}{\log(n+b)} = 1 + \frac{\log\dfrac{n+a}{n+b}}{\log(n+b)} \to 1.$$

$$\frac{\log_2(n+a)}{\log_2(n+b)} = 1 + \frac{\log_2(n+a) - \log_2(n+b)}{\log_2(n+b)} = 1 + \frac{\log\dfrac{\log(n+a)}{\log(n+b)}}{\log_2(n+b)} \to 1.$$

Setzen wir voraus, im Allgemeinen, dass $\log_p(n+a)/\log_p(n+b) \to 1$ und folgt zu sehen was es für die Zahl $p+1$ gibt.

Es gilt:

$$\frac{\log_{p+1}(n+a)}{\log_{p+1}(n+b)} = 1 + \frac{\log_{p+1}(n+a) - \log_{p+1}(n+b)}{\log_{p+1}(n+b)} = 1 + \frac{\log\dfrac{\log_p(n+a)}{\log_p(n+b)}}{\log_{p+1}(n+b)} \to 1.$$

4. **Hilfssatz IV.** *Bezeichnet man*

$$\lambda_0(x) = x,\ \lambda_{-1}(x) = 1,\ \lambda_p(x) = x \log_1 x \log_2 x \ldots\ldots \log_p x.$$

Durch solche Bedingungen die Ausdrücke

$$\lambda_0(r+m) \log \frac{\log_0(r+m+1)}{\log_0(r+m)},$$

$$\lambda_1(r+m) \log \frac{\log_1(r+m+1)}{\log_1(r+m)},$$

$$\lambda_2(r+m) \log \frac{\log_2(r+m+1)}{\log_2(r+m)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_{p+1}(r+m) \log \frac{\log_{p+1}(r+m+1)}{\log_{p+1}(r+m)},$$

haben als Grenzwert die Einheit, wenn $m \to \infty$ *strebt.*

Beweis. Wenn wir den Hilfssatz III bemerken, sieht man dass die vorhergehende Ausdrücke sich unter Formen ohne Bedeutung einstellen. Wir werden wieder durch vollständige Induktion verfahren. In der Tat, der erste Ausdruck ist

$$(r+m) \log \frac{r+m+1}{r+m} = \log\left(1 + \frac{1}{r+m}\right)^{r+m} \to \log e = 1.$$

Gleichfalls für die zwei anderen

$$(r+m)\log(r+m)\log\frac{\log(r+m+1)}{\log(r+m)} =$$

$$= \log\left\{1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{r+m}\right)^{r+m}}{(r+m)\log(r+m)}\right\}^{(r+m)\log(r+m)} \to 1$$

$$\lambda_2(r+m)\log\frac{\log_2(r+m+1)}{\log_2(r+m)} =$$

$$= \log\left\{1+\frac{\lambda_1(r+m)\log\frac{\log(r+m+1)}{\log(r+m)}}{\lambda_2(r+m)}\right\}^{\lambda_2(r+m)} \to 1.$$

Wenn man annimmt, im Allgemeinen, das Ergebnis wirklich für Index p, d. h. der Ausdruck von der Höhe p der Grenzwert 1 hat, wenn $m \to \infty$, dann ist

$$\lambda_{p+1}(r+m)\log\frac{\log_{p+1}(r+m+1)}{\log_{p+1}(r+m)} =$$

$$= \log\left\{1+\frac{\lambda_p(r+m)\log\frac{\log_p(r+m+1)}{\log_p(r+m)}}{\lambda_{p+1}(r+m)}\right\}^{\lambda_{p+1}(r+m)} \to 1.$$

5. **Hilfssatz V.** *Wenn man aufzeichnet*

$$A_n = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{\lambda_1(n)}+\frac{1}{\lambda_2(n)}+\ldots\ldots+\frac{1}{\lambda_p(n)},$$

dann strebt der folgende Ausdruck

$$W_m = \frac{\log\dfrac{\lambda_p(r+m)\left(A_{r+m}+\dfrac{x}{\lambda_{p+1}(r+m)}\right)}{\lambda_p(r+m+1)}}{\log_{p+2}(r+m+1)-\log_{p+2}(r+m)}$$

nach x, *während* m *nach Unendlich konvergiert.*

Beweis. Der Zähler von W_m wird geschrieben

$$\log\frac{A_{r+m}+\dfrac{x}{\lambda_{p+1}(r+m)}}{\left(\dfrac{\lambda_p(r+m+1)}{\lambda_p(r+m)}\right)} = \log\frac{\left(A_{r+m}+\dfrac{x}{\lambda_{p+1}(r+m)}\right)}{\left(A_{r+m}+\dfrac{\theta}{(r+m)^2}\right)} = \log\frac{\left(1+\dfrac{x}{A_{r+m}\lambda_{p+1}(r+m)}\right)}{\left(1+\dfrac{\theta}{A_{r+m}(r+m)^2}\right)}.$$

denn man hat die Beziehung [1])

$$\frac{\lambda_p(n+1)}{\lambda_p(n)} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\lambda_1(n)} + \frac{1}{\lambda_2(n)} + \ldots\ldots + \frac{1}{\lambda_p(n)} + \frac{\theta}{n^2},$$

in welcher θ endlich bleibt für irgendwelche Zahl n. Der Nenner von W_m schreibt man in der Form

$$\log_{p+2}(r+m+1) - \log_{p+2}(r+m) = \log \frac{\log_{p+1}(r+m+1)}{\log_{p+1}(r+m)}.$$

Ferner kann man den Ausdruck von W_m in folgenderweise

$$W_m = \frac{\log\left(1 + \dfrac{x}{A_{r+m}\lambda_{p+1}(r+m)}\right) - \log\left(1 + \dfrac{\theta}{A_{r+m}(r+m)^2}\right)}{\log \dfrac{\log_{p+1}(r+m+1)}{\log_{p+1}(r+m)}} =$$

$$= \frac{\log\left(1 + \dfrac{x}{A_{r+m}\lambda_{p+1}(r+m)}\right)^{\lambda_{p+1}(r+m)} - \log\left(1 + \dfrac{\theta}{A_{r+m}(r+m)^2}\right)^{\lambda_{(p+1}r+m)}}{\lambda_{p+1}(r+m)\log \dfrac{\log_{p+1}(r+m+1)}{\log_{p+1}(r+m)}}$$

darstellen. Der erste Ausdruck des Zählers von W_m wird geschrieben [2])

$$\log\left\{\left(1 + \frac{x}{A_{r+m}\,\lambda_{p+1}(r+m)}\right)\exp.\, A_{r+m}\,\lambda_{p+1}(r+m)\,\frac{1}{A_{r+m}}\right\} \to x$$

wenn $m \to \infty$, weil $1/A_{r+m} \to 1$. Der zweite Ausdruck des Zählers von W_m wird

$$\log\left\{\left(1 + \frac{\theta}{A_{r+m}(r+m)^2}\right)\exp.\, A_{r+m}(r+m)^2 . \frac{\lambda_{p+1}(r+m)}{A_{r+m}(r+m)^2}\right\} \to \log(e^{\theta_1})^0 = 0,$$

weil

$$\frac{\lambda_{p+1}(r+m)}{A_{r+m}(r+m)^2} = \frac{\lambda_{p+1}(r+m)}{(r+m)^2} \cdot \frac{1}{A_{r+m}} \text{ ist,}$$

und θ_1 eine endliche Zahl bedeudet. Aber $\lambda_{p+1}(n)/n^2 \to 0$, wenn $n \to \infty$ [3]).

---

[1]) BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*, S. 7.

[2]) Für m^n schreibt man m exp n.

[3]) In der Tat, es gilt

$$\frac{\lambda_{p+1}(n)}{n^2} = \frac{\log n \log_2 n \ldots \log_p(n)}{n^2} < \frac{(\log n)^p}{n}, \text{ weil } \log_2 n < \log n,\ \log_3 n < \log n, \ldots \log_p n < \log n.$$

Aber $\dfrac{(\log n)^p}{n} \to 0$ wenn $n \to \infty$. (KNOPP, *Unendliche Reihen*, S. 58-60).

Mithin konvergiert der Zähler von W_m nach x. Mit Bezug auf den Nenner von W_m, nach dem Hilfssatze IV, konvergiert er nach der Einheit. Dadurch ist der Satz bewiesen.

6. **Hilfssatz VI.** *Der Ausdruck*

$$U_m = \frac{\log\left\{\frac{1}{\lambda_p(r+m+1)}\left(A_r + \frac{x}{\lambda_{p+1}(r)}\right)\left(A_{r+1} + \frac{x}{\lambda_{p+1}(r+1)}\right)\cdots\left(A_{r+m} + \frac{x}{\lambda_{p+1}(r+m),}\right)\right\}}{\log_{p+2}(r+m+1)},$$

konvergiert nach x, *wenn* m *jede Grenze überschreitet.*

Beweis. Wenn man neuerdings den Satz von Cesàro anwendet, dann ist der Grenzwert von U_m derselbe wie derjenige des in dem Hilfssatze V betrachtetes W_m, wenn, offenbar, der letzte Grenzwert vorhanden ist. Aber wenn $m \to \infty$, haben wir gesehen dass $W_m \to x$, und folglich $U_m \to x$.

* * *

Nachdem wir diese Hilfssätze festgesetzt haben, können wir uns mit den anfänglich ausgesprochenen Fragen beschäftigen.

7. **Satz I.** *Wenn eine Reihe mit positiven Gliedern* Σa_n *gegeben ist, sobald*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \to l,$$

für $n \to \infty$, *dann auch*

$$\frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} \to l.$$

Beweis. Man kann eine ganze Zahl N bestimmen so dass für $n \geqq N$

$$\left| n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - l \right| < \varepsilon \text{ ist,}$$

wenn ε gegeben ist.

Folglich haben wir

$$l - \varepsilon < n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < l + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon + n < n\frac{a_n}{a_{n+1}} < l + \varepsilon + n, \text{ für } n \geqq N.$$

Also erhält man die Reihe von Ungleichungen

$$l - \varepsilon + N < N\frac{a_N}{a_{N+1}} < l + \varepsilon + N$$

$$l - \varepsilon + N + 1 < (N+1)\frac{a_{N+1}}{a_{N+2}} < l + \varepsilon + N + 1$$

. . . . . .

$$l - \varepsilon + N + K < (N+K)\frac{a_{N+K}}{a_{N+K+1}} < l + \varepsilon + N + K.$$

Wir können aber die ganze Zahl N so gross nehmen so dass die Ausdrücke von der Form $l - \varepsilon + N$, $l - \varepsilon + N + 1$, etc., positiv sein sollen. Durch die Multiplikation der vorigen Ungleichungen leiten wir ab:

$$\frac{1}{a_N} \cdot \frac{(l-\varepsilon+N)(l-\varepsilon+N+1)\ldots(l-\varepsilon+N+K)}{N(N+1)(N+2)\ldots(N+K)} < \frac{1}{a_{N+K+1}} <$$

$$< \frac{1}{a_N} \cdot \frac{(l+\varepsilon+N)(l+\varepsilon+N+1)\ldots(l+\varepsilon+N+K)}{N(N+1)(N+2)\ldots(N+K)}.$$

Aber $\log x$ ist eine wachsende Funktion, weil die Grundzahl $e > 1$, und demnach wenn $A < B$, $\log A < \log B$. Wenden wir aber die Logarithmen der vorigen Ungleichungen an, so erhält man durch Division mit $\log(N+K+1)$

$$(1)\quad \frac{\log\frac{1}{a_N}}{\log(N+K+1)} + \frac{\log\frac{(l-\varepsilon+N)(l-\varepsilon+N+1)\ldots(l-\varepsilon+N+K)}{N(N+1)(N+2)\ldots(N+K)}}{\log(N+K+1)} <$$

$$< \frac{\log\frac{1}{a_{N+K+1}}}{\log(N+K+1)} < \frac{\log\frac{1}{a_N}}{\log(N+K+1)} +$$

$$+ \frac{\log\frac{(l+\varepsilon+N)(l+\varepsilon+N+1)(\ldots(l+\varepsilon+N+K)}{N(N+1)(N+2)\ldots(N+K)}}{\log(N+K+1)}$$

Aber ein Ausdruck von der Form $\log\frac{1}{a_N} / \log(N+K+1) \to 0$ wenn $K \to \infty$. Die anderen Ausdrücke der vorigen Doppelungleichung haben identische Formen wie in dem Hilfssatze I untergesuchtem Ausdruck. Mithin die äussersten Glieder der Ungleichung (1) nach $l - \varepsilon$ bzw. $l + \varepsilon$ streben, wenn $K \to \infty$. Als Schlussfolgerung können wir eine ganze

Zahl $M \geqslant N$ bestimmen, wenn ε gegeben ist, so dass die Doppelungleichung

$$l - 2\varepsilon < \frac{\log \frac{1}{a_m}}{\log m} < l + 2\varepsilon$$

für $m \geqq M$ gilt. Mithin $\log \frac{1}{a_m} / \log m \to l$, wenn $m \to \infty$.

Der Satz ist folgendermassen bewiesen.

8. **Satz II.** *Wenn die Reihe mit positiven Gliedern* Σa_n *gegeben ist, sobald*

$$\left\{ n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right\} \log n \to l$$

für $n \to \infty$, *dann auch*

$$\frac{\log \frac{1}{n a_n}}{\log \log n} \to l \text{ strebt.}$$

Beweis. Verfahren wir wie im Vorigen. Es gibt eine ganze Zahl N, für gegebenen ε, so dass für $n \geqq N$ die Ungleichung

$$l - \varepsilon < \left\{ n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right\} \log n < l + \varepsilon, \text{ gilt.}$$

$$\therefore l - \varepsilon + (n+1) \log n < n \log n \frac{a_n}{a_{n+1}} < l + \varepsilon + (n+1) \log n.$$

Nehmen wir für n die Werte N, $N+1, \ldots\ldots, N+K$, hierauf multipliziert man die Ungleichungen und durch dieselben Transformationen wie im Vorigen, erhält man endlich:

$$\frac{\log \frac{1}{N a_N}}{\log_2 (N+K+1)} + \frac{\log \frac{[l-\varepsilon+(N+1)\log N] \ldots [l-\varepsilon+(N+K+1)\log(N+K)]}{(N+1)\log N \ldots (N+K+1)\log(N+K)}}{\log_2 (N+K+1)} <$$

$$(2) \qquad < \frac{\log \frac{1}{(N+K+1)\, a_{N+K+1}}}{\log_2 (N+K+1)} < \frac{\log \frac{1}{N a_N}}{\log_2 (N+K+1)} +$$

$$+ \frac{\log \frac{[l+\varepsilon+(N+1)(\log N] \ldots [l+\varepsilon+(N+K+1)\log(N+K)]}{(N+1)\log N \ldots (N+K+1)\log(N+K)}}{\log_2 (N+K+1)}.$$

Aber die Glieder von der Form

$$\log \frac{1}{Na_N} / \log_2 (N + K + 1) \to 0, \text{ wenn } K \to \infty.$$

Die anderen Glieder der vorigen Doppelungleichung haben Formen wie in dem Hilfssatze II betrachteten Ausdrücke. Folglich die äussersten Glieder der Ungleichung nach $l - \varepsilon$ bzw. $l + \varepsilon$ streben, wenn $K \to \infty$. Demnach für gegebenen ε, kann man eine ganze Zahl $M \geqq N$ bestimmen, so dass für $m \geqq M$

$$l - 2\varepsilon < \frac{\log \frac{1}{ma_m}}{\log \log m} < l + 2\varepsilon \text{ ist.}$$

$$\text{Dann ist } \lim \frac{\log \frac{1}{ma_m}}{\log \log m} = l.$$

9. **Satz III.** *Wenn die Reihe mit positiven Gliedern* Σa_n *gegeben ist, sobald*

$$x_n = \lambda_{p+1}(n)\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{\lambda_1(n)} - \ldots - \frac{1}{\lambda_p(n)}\right) \to l$$

wenn $n \to \infty$, *dann*

$$y_n = \frac{\log \frac{1}{\lambda_p(n)\, a_n}}{\log_{p+1} n} \to l \text{ strebt.}$$

Beweis. Schreibe man x_n in der Form

$$x_n = \lambda_{p+1}(n)\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - A_n\right).$$

Für gegebenen ε, gibt es eine ganze Zahl N, so dass für $n \geqq N$

$$l - \varepsilon + \lambda_{p+1}(n)\, A < \lambda_{p+1}(n) \frac{a_n}{a_{n+1}} < l + \varepsilon + \lambda_{p+1}(n)\, A_n$$

ist. Nehmen wir für n die Werte $N, N+1, \ldots, N+K$, multiplizieren

wir die erhaltenen Ungleichungen, wenden wir die Logarithmen, an und durch andere Transformationen, leiten wir schliesslich ab

$$\frac{\log \frac{1}{a_N}}{\log_{p+2}(N+K+1)} + \frac{\log\left\{\frac{1}{\lambda_p(N+K+1)}\left(A_N+\frac{l-\varepsilon}{\lambda_{p+1}(N)}\right)\cdots\left(A_{N+K}+\frac{l-\varepsilon}{\lambda_{p+1}(N+K)}\right)\right\}}{\log_{p+2}(N+K+1)}$$

(3)

$$< \frac{\log \frac{1}{\lambda_p(N+K+1)\,a_{N+K+1}}}{\log_{p+2}(N+K+1)} < \frac{\log \frac{1}{a_N}}{\log_{p+2}(N+K+1)} + \frac{\log\left\{\frac{1}{\lambda_p(N+K+1)}\left(A_N+\frac{l+\varepsilon}{\lambda_{p+1}(N)}\right)\cdots\left(A_{N+K}+\frac{l+\varepsilon}{\lambda_{p+1}(N+K)}\right)\right\}}{\log_{p+2}(N+K+1)}.$$

Lässt man K nach Unendlich streben und angesichts des vorigen Hilfssatzes VI, bemerkt man dass die äussersten Glieder der Doppelungleichung (3) nach $l-\varepsilon$ bzw. $l+\varepsilon$ streben. Also können wir eine ganze Zahl $M \geqq N$ für gegebenen ε bestimmen, so dass für alle Werte $m \geqq M$

$$l - 2\varepsilon < \frac{\log \frac{1}{\lambda_p(m)\,a_m}}{\log_{p+2} m} < l + 2\varepsilon$$

ist. Demnach, wenn $m \to \infty$, der Ausdruck

$$\frac{\log \frac{1}{\lambda_p(m)\,a_m}}{\log_{p+2} m} \to l \text{ konvergiert.}$$

Der Satz ist vollständig bewiesen.

10. Der Satz III verallgemeinert die Sätze I und II. In der Tat, für $p = 0$, findet man sehr leicht

$$x_n = \lambda_1(n)\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right) = n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \quad x_n = \left\{ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 \right\} \log n.$$

Wir haben den in dem Satze II betrachteten Ausdruck erhalten und welcher mit einem Kriterium zweiter Art in Verbindung steht.

Wenn man nimmt $p = -1$ und die Bedeutungen des Abschnittes 4 in Ansicht nehmen, dann haben wir für den Ausdruck von x_n

$$x_n = \lambda_0(n)\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Wir haben also denselben Ausdruck gefunden wie denjenigen in dem Satze I betrachtet.

11. Für jedes Kriterium von BERTRAND, gibt es ein Kriterium zweiter Art [1]). Nach den im Vorigen bewiesenen Sätze, kann man also behaupten: wenn das Kriterium zweiter Art einen Grenzwert gibt, dann gibt das entsprechende Kriterium erster Art denselben Grenzwert, aber der Umkehrsatz ist nicht wahr im Allgemeinen.

[1]) BOREL, *Lecons sur les séries*, S. 6

532.5 MÉCANIQUE DES FLUIDES

NOUVEAUX POINTS DE VUE SUR QUELQUES THÉORÈMES FONDAMENTAUX DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

par **I. Cârstoiu**

L'auteur donne des nouvelles démonstrations des théorèmes sur la circulation, de LAGRANGE, *des équations de* CAUCHY *et de l'équation de* BERNOULLI, *en observant que tous ces théorèmes sont des conséquences du fait que, dans certaines hypothèses, la variation du travail élémentaire de la vitesse est, à tout instant, une différentielle totale exacte.*

1. Considérons l'équation générale du mouvement d'un *fluide parfait*

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \tag{1}$$

où $\frac{d\bar{v}}{dt}$ désigne l'accélération d'un point (x, y, z) de la masse fluide, $\bar{g}$ la résultante des forces extérieures *par unité de masse*, ρ la densité et p la pression au point considéré.

Nous allons supposer que le vecteur de position $\bar{r}$ de composantes (x, y, z) est une fonction de coordonnées initiales (a, b, c) et du temps t

$$\bar{r} = \bar{r}(a, b, c, t).$$

Un cas très important est celui où sont satisfaites les conditions suivantes:

I. *Les forces de masse sont conservatives* $[\bar{g} = \operatorname{grad} U(x, y, z, t)]$.

II. *La densité* ρ *est une fonction de* p.

L'équation du mouvement (1) s'écrit alors

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \operatorname{grad}\left(U - \int \frac{dp}{\rho}\right). \tag{2}$$

Multiplions scalairement, à un moment donné t, les deux membres de l'équation (2) par $d\bar{r}$. On a

$$\frac{d\bar{v}}{dt}\,d\bar{r} = d\left(U - \int \frac{dp}{\rho}\right) \tag{3}$$

que nous allons intégrer dans l'intervalle de temps (t_0, t). On a

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\bar{v}}{dt}\,d\bar{r}\,dt = d\int_{t_0}^{t}\left(U - \int \frac{dp}{\rho}\right)dt.$$

En intégrant par parties la première intégrale et en passant l'intégrale non effectuée dans le second membre, on obtient

$$\bar{v}d\bar{r} - \bar{v}_0 d\bar{r}_0 = d\chi \tag{4}$$

avec

$$\chi = \int_{t_0}^{t}\left(U - \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}V^2\right)dt. \tag{5}$$

L'équation (4) que nous avons obtenue d'une manière directe, comme une conséquence immédiate de l'équation (2), est connue (voir par exemple: Lamb: *Hydrodynamics*, sixth edition, 1932, p. 17; Villat: *Théorie des Tourbillons*, 1930, p. 8).

Nous remarquons toutefois que c'est une *équation de l'énergie*. Elle exprime que *la variation du travail élémentaire de la vitesse est, à tout instant, une differentielle totale exacte.*

2. L'équation (4) dont nous venons de souligner l'importance mécanique, peut être considérée comme le point de départ pour une séries de théorèmes connus, fondamentaux qui, comme nous allons le montrer, apparaissent, simplement, comme des *propriétés intégrales* de cette équation.

3. Considérons une *ligne fluide* fermée C. Alors, en intégrant l'équation (4) à un moment t, au long de cette ligne, on obtient

$$\oint_{C} \bar{v}d\bar{r} = \oint_{C_0} \bar{v}_0 d\bar{r}_0 \tag{6}$$

égalité qui exprime que *la circulation* $\Gamma = \oint_{C} \bar{v}d\bar{r}$ *reste constante quand* t *varie* (et la ligne C en même temps).

4. Par la ligne C faisons passer une surface simplement connexe. De l'égalité (6) on tire

$$\iint_S \Omega_n d\sigma = \iint_S \Omega_{n_0} d\sigma_0 \tag{7}$$

Ω_n désignant la composante normale du tourbillon $\bar{\Omega}$ (ξ, η, ζ) à la surface S.

D'où il résulte que *le flux tourbillonaire a travers une surface quelconque S, reste constant.*

En particulier, *si à un moment donné le tourbillon est nul, il restera nul à tout instant.* C'est la *théorème de* LAGRANGE.

5. Nous nous proposons maintenant, en partant de l'égalité (7), de suivre la variation, en termes finis, du tourbillon $\bar{\Omega}$.

L'égalité (7) peut s'écrire.

$$\iint_S \bar{\Omega}\bar{n} d\sigma = \iint_{S_0} \bar{\Omega}_0 \bar{n}_0 d\sigma_0$$

ou encore

$$\iint_S (\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)\, d\sigma = \iint_{S_0} (\xi_0\alpha_0 + \eta_0\beta_0 + \zeta_0\gamma_0)\, d\sigma_0 \tag{8}$$

en désignant par $\bar{n}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ le verseur de la normale orientée de la surface S.

Remplacons l'intégrale de surface étendue à S par une intégrale de surface sur S_0.

Pour cela, soit

$$\bar{r} = \bar{r}\,(a,\ b,\ c,\ t)$$

la correspondance ponctuelle des surfaces S et S_0 à un moment donné t. On sait (voir p. ex.: GOURSAT: *Analyse*, cinquième édition, 1927, t. I, p. 355) qu'on a

$$\gamma d\sigma = \left[\frac{D\,(x, y)}{D\,(b, c)}\,\alpha_0 + \frac{D\,(x, y)}{D\,(c, a)}\,\beta_0 + \frac{D\,(x, y)}{D\,(a, b)}\,\gamma_0\right] d\sigma_0$$

et encore deux formules analogues pour $\alpha d\sigma$ et $\beta d\sigma$.

L'égalité (8) devient

$$\iint_{S_0} \left[\left(\xi\,\frac{D\,(y, z)}{D\,(b, c)} + \eta\,\frac{D\,(z, x)}{D\,(b, c)} + \zeta\,\frac{D\,(x, y)}{D\,(b, c)} - \xi_0\right)\alpha_0 + \right.$$

$$\left. + \left(\xi\,\frac{D\,(y, z)}{D\,(c, a)} + \ldots - \eta_0\right)\beta_0 + \left(\xi\,\frac{D\,(y, z)}{D\,(a, b)} + \ldots - \zeta_0\right)\gamma_0\right] d\sigma_0 = 0$$

qui doit être vraie quel que soient la surface S_0 et la courbe C_0.

On en conclut, les trois équations suivantes

$$(9)\qquad \begin{cases} \xi \dfrac{D(y,z)}{D(b,c)} + \eta \dfrac{D(z,x)}{D(b,c)} + \zeta \dfrac{D(x,y)}{D(b,c)} = \xi_0 \\ \xi \dfrac{D(y,z)}{D(c,a)} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \eta_0 \\ \xi \dfrac{D(y,z)}{D(a,b)} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \zeta_0 \end{cases}$$

qui sont les *équations de* CAUCHY (voir p. ex.: LAMB: *Hydrodynamics*, sixth edition, 1932, p. 204; VILLAT: *Théorie des Tourbillons*, 1930, p. 7) mais, que nous avons obtenues par un voie simple et naturelle.

6. En divisant l'équation (4) par dt, on obtient

$$V^2 - V_0^2 = \dot{\chi}$$

qui peut s'écrire encore, en tenant compte de (5)

$$(10)\qquad U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 = - V_0^2 = \text{const.}$$

C'est *l'équation de* BERNOULLI.

Il est intéressant de remarquer que *nous avons obtenu cette équation sans supposer l'existance d'un potentiel des vitesses.*

7. Nous avons obtenu les théorèmes sur *la circulation*, de LAGRANGE, les *formules* de CAUCHY et l'équation de BERNOULLI, comme des conséquences de l'équation différentielle (4).

On peut dire, que ce sont des *propriétés globales* de cette équation.

Du point de vue mécanique, ces théorèmes existent du fait que, dans les conditions I et II, la variation du travail élémentaire de la vitesse est, à tout instant, une différentielle totale exacte.

535 OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

SUR LES MIROIRS PARABOLIQUES

par **M. B. Bianu**

On établit la formule des miroirs paraboliques et l'on calcule l'aberration longitudinale pour un point-objet situé sur l'axe. Actuellement les miroirs paraboliques proviennent des miroirs sphériques, par retouches locales. L'auteur montre, ensuite, une méthode par laquelle on peut obtenir directement un miroir parabolique.

L'équation d'une parabole rapportée à l'axe et à la tangente au sommet est: $y^2 = 2px$. p est le paramètre et si l'on veut mettre en évidence la distance focale f, on remplace p par $2f$ et l'équation devient: $y^2 = 4fx$.

Soit A_1 un point lumineux, sur l'axe, et considérons un rayon quelconque A_1I. Le rayon réflechi sera IA_2 et fera avec la normale IN, deux angles égaux, suivant la seconde loi de DESCARTES. Menons la tangente en I à la parabole; elle coupe l'axe en T et parce que IN et IT sont les bisectrices de l'angle A_1IA_2, les quatre droites IA_1, IA_2, IN et IT forment un faisceau harmonique et déterminent, sur toute droite qui les coupe, une division harmonique. La droite qui nous intéresse, en particulier, est l'axe de la parabole TVA_1. On peut donc écrire:

$$\frac{1}{NA_1} + \frac{1}{NA_2} = \frac{2}{NT} \quad \text{et aussi:} \quad \frac{1}{TA_1} + \frac{1}{TA_2} = \frac{2}{TN}.$$

L'équation de la parabole étant rapportée au sommet, de ces deux relations, il faut considérer la dernière.

Sur la fig. 1 on voit que TN est composée de la sous-tangente TP et de la sous-normale PN. Dans le cas d'une parabole, on sait que la sous-normale est constante, quelque soit le point I, et égale au paramètre, c'est-à-dire à $2f$. La tangente en I rencontre l'axe en T, qui est

le symétrique de P par rapport à l'origine V. On aura donc: $TP = 2x$ et alors: $TN = TP + PN = 2x + 2f$.

En posant: $VA_1 = p_1$ et $VA_2 = p_2$ nous pouvons écrire:

$$TA_1 = x + p_1 \quad \text{et} \quad TA_2 = x + p_2$$

En tenant compte de ces valeurs la relation mentionnée plus haut devient:

$$\frac{1}{x + p_1} + \frac{1}{x + p_2} = \frac{2}{2x + 2f}.$$

Chassant les dénominateurs et en faisant les calculs algébriques, très simples, on obtient une relation que l'on divise, ensuite, par $p_1 p_2 f$ et après avoir arrangé les termes on obtient:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f} - \frac{x^2 + 2fx}{p_1 p_2 f}. \tag{1}$$

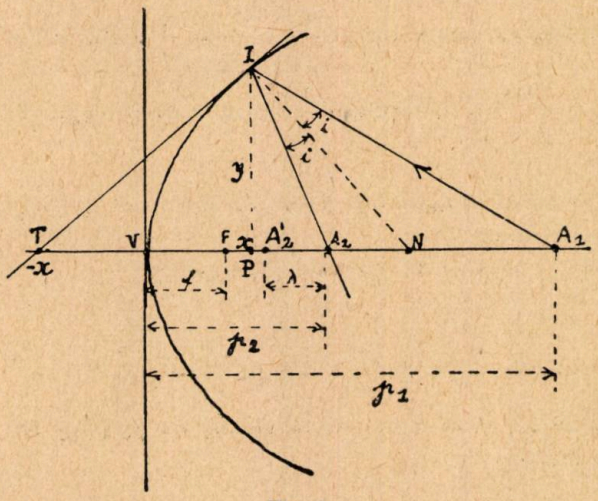


Fig. 1.

C'est la formule générale d'un miroir parabolique, avec l'origine au sommet. Dans cette formule, x est l'abscisse du point d'incidence I (fig. 1). Au point de vue pratique il est plus avantageux de mettre en évidence l'ordonnée y. La transformation est facile à faire, parce qu'on a: $x = \frac{y^2}{4f}$ et $x^2 = \frac{y^4}{16 f^2}$.

Portant ces valeurs dans (1) et en simplifiant on a:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f} - \frac{y^2}{2p_1 p_2 f} - \frac{y^4}{16 p_1 p_2 f^3}. \tag{2}$$

La conséquence de cette formule est que: le miroir parabolique n'est pas stigmatique pour un point quelconque.

En effet: si la valeur de p_1 est donnée, p_2 aura différentes valeurs suivant la valeur de y.

Si l'ouverture du miroir est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer: $y = o$, la relation (2) devient:

$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f}$ c'est-à-dire, la formule des miroirs sphériques, dans le cas de l'approximation de GAUSS.

En supposant le point-objet à l'infini ($p_1 = \infty$) la relation (2) nous donne: $p_2 = f$. Tous les rayons seront, donc, parallèles à l'axe et après réflexion, seront réunis dans le foyer et l'aberration longitudinale sera nulle.

Si le point-objet A_1 se trouve à une distance finie p_1, on aura une aberration longitudinale λ, qu'on peut, facilement, calculer. En effet: pour les rayons centraux on à: $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f}$. De cette relation on obtient: $p_2^c = \frac{p_1 f}{p_1 - f}$. L'exposant c indique qu'il s'agit des rayons centraux.

Désignons par d la demi-ouverture du miroir et qui représente, aussi, la plus grande valeur de y.

Avec cette notation la formule (2) devient:

$$(3) \qquad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f} - \frac{d^2}{2\,p_1 p_2 f} - \frac{d^4}{16 p_1 p_2 f^3}.$$

La formule (3) nous donnera la valeur de p_2 pour les rayons marginaux. On en tire:

$$p_2^m = \frac{p_1 f}{p_1 - f} + \frac{d^2}{2\,(p_1 - f)} + \frac{d^4}{16 f^2 (p_1 - f)}.$$

L'exposant m indique qu'il s'agit des rayons marginaux. La valeur de p_2 nous montre que, pour les miroirs paraboliques, les rayons marginaux rencontrent l'axe plus loin que les rayons centraux, en partant du sommet.

Pour calculer λ il faut écrire: $\lambda = -p_2^c + p_2^m$. En remplaçant les valeurs trouvées et effectuant la réduction on trouve:

$$(4) \qquad \lambda = \frac{d^2}{2\,(p_1 - f)} + \frac{d^4}{16 f^2 (p_1 - f)}.$$

On voit que pour $p_1 = \infty$ on a $\lambda_\infty = 0$. Les miroirs paraboliques sont, donc, très avantageux pour l'observation des objets très éloignés et de petit diamètre apparent.

* * *

Tenant compte de cette propriété, FOUCAULT a construit, le premier, un télescope dont l'objectif était un miroir parabolique. Actuellement, les seuls surfaces que l'on puisse obtenir facilement sont les surfaces sphériques, que l'on transforme en suite par des retouches locales en surfaces elliptiques et finalement en surfaces paraboliques.

On démontre facilement que dans le cas des grands miroirs de télescope, c'est-à-dire des miroirs ayant une grande distance focale, l'épaisseur de matière à enlever, au miroir sphérique initial, est très petite.

Au sommet V, le miroir parabolique peut être confondu avec un miroir sphérique de rayon $2f$, ayant le centre en c.

La sphère se trouve donc à l'intérieur du paraboloïde, de sorte que l'épaisseur à enlever, nulle au sommet, ira en croissant vers les bords.

Faisons le calcul de l'épaisseur maximum à enlever, $M_1 M_2$. Nous aurons:

$$\overline{CM_2}^2 = y^2 + (2f - x)^2 =$$
$$= y^2 + 4f^2 - 4fx + x^2.$$

En tenant compte de l'équation de la parabole: $y^2 = 4fx$ on obtient:

$$\overline{CM_2}^2 = \frac{y^4}{16f^2} + 4f^2.$$

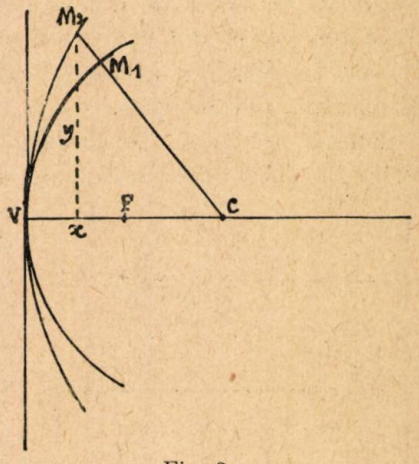


Fig. 2.

Le rayon de la sphère étant $2f$ on aura: $\overline{CM_1} = 2f$ et $\overline{CM_1}^2 = 4f^2$.

Nous pouvons donc écrire: $\overline{CM_2}^2 - \overline{CM_1}^2 = \frac{y^4}{16f^2}$ d'où:

$$CM_2 - CM_1 = M_1M_2 = \frac{1}{CM_2 + CM_1} \cdot \frac{y^4}{16f^2}.$$

En remplaçant CM_2 par CM_1, on obtient

$$M_1M_2 < \frac{1}{2CM_1} \cdot \frac{y^4}{16f^2} = \frac{y^4}{64f^3}.$$

Supposons $f = 10$ m. et $y = 1$ m. nous aurons:

$$M_1M_2 < \frac{1}{64.10^3} = 0{,}0156 \text{ mm.}$$

L'épaisseur à enlever (15,6 μ) est donc très petite et il est possible de faire l'opération par un simple polissage.

Si l'on voulait obtenir un miroir parabolique de même ouverture et ayant une distance focale de 1 m, seulement, c'est-à-dire un objectif très lumineux, l'épaisseur à enlever serait $\frac{1}{64} = 0{,}0156$ m. Cette fois-ci il faudrait enlever 1,56 cm.; opération plus difficile et qui demanderait un temps beaucoup plus long.

* * *

En 1933, j'ai publié dans le Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarest une méthode qui permet la construction d'une parabole par tracé continu et qui donnerait, en plus, la possibilité de concevoir un dispositif mécanique à l'aide duquel on pourrait construire, facilement, des miroirs paraboliques.

La fig. 3 indique le problème proposé. Considérons un triangle rectangle AMF dont le sommet F est fixe. Si le côté AM se déplace parallèlement à lui-même et si le triangle, toujours rectangle, se modifie de sorte que l'on ait:

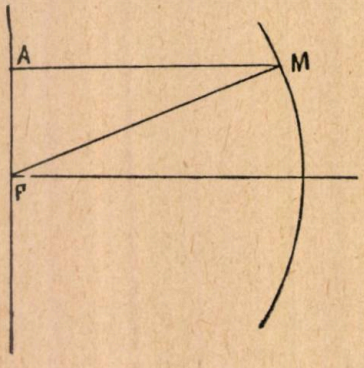


Fig. 3.

$AM + MF = K$ (constante), le sommet M décrit une parabole dont le foyer se trouve en F.

Pratiquement on prend, donc, un fil inextensible dont la longueur est égale au paramètre ($p = 2f$) de la parabole qu'on veut tracer. On fixe un bout en F et l'autre en A et par un dispositif approprié on tend le fil en M, en ayant soin que l'on ait toujours AM perpendiculaire à AF. Le support du fil, en M, doit être un cylindre qui puisse tourner, facilement, autour de son axe et aura, nécessairement, une certaine dimension. Les portions AM et MF ne feront pas un angle, tel qu'on le conçoit en géometrie et le point M ne sera, plus, bien déterminé.

Si nous réalisons le dispositif indiqué sur la fig. 4, la construction d'une parabole peut se faire très exactement.

En effet: considérons en M et en F deux cylindres de même rayon r. Le cylindre F est fixe et le cylindre M est, par contre, très mobile autour de son axe. Le fil, qui doit être tendu, est figuré par $A'M'M''F''F'$ et les bouts A' et F' doivent être solidement fixés. La longueur du fil étant constante on peut écrire: $A'M' + M'M'' + M''F'' + F''F' =$ C-te.

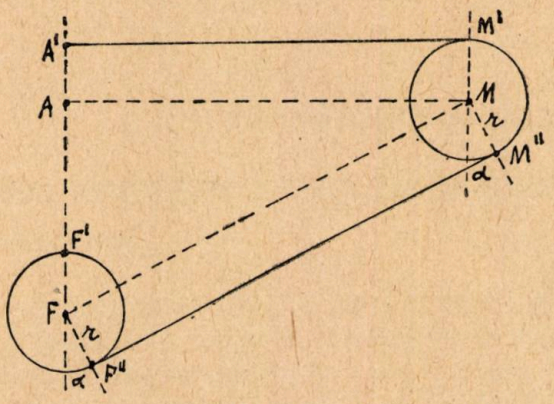


Fig. 4.

Or nous avons: arc $F'F'' = \pi r + r\alpha$ et arc $M'M'' = \pi r - r\alpha$. Si l'on porte ces valeurs dans l'égalité précédente on a:

$$A'M' + \pi r - r\alpha + M''F'' + \pi r + r\alpha = A'M' + M''F'' + 2\pi r = \text{C-te}$$

ou enfin: $A'M' + M''F'' =$ C-te. En remarquant que: $A'M' = AM$ et $M''F'' = MF$ on peut écrire: $AM + MF =$ C-te.

Il résulte de ces considérations que l'axe, M, du cylindre mobile décrit une parabole. La partie $A'M'$ du fil peut être assez courte afin que le dispositif, qui fixe le bout A' et l'axe du cylindre M, puisse être placé sur le support d'un tour. Le déplacement du support étant perpendiculaire à l'axe du tour, la partie $A'M'$ reste toujours perpendiculaire à ce déplacement et la condition imposée par le problème proposé plus haut est satisfaite.

541.1 CHIMIE PHYSIQUE

SUR LE MÉCANISME DE LA PRESSION OSMOTIQUE

par **Er. Toporescu**

Presque tous les savants qui ont cherché de donner une explication sur le mécanisme de la pression osmotique sont d'accord, aujourd'hui, que le facteur principal dans ce phénomène est dû au solvant.

Ainsi, dans le Traité de Chimie Physique de W. Lewis, tome II, p. 166 (édition française, 1921) on trouve, en dehors d'une étude critique de la théorie cinétique avec laquelle on a cherché d'expliquer le mécanisme de la pression osmotique, théorie imaginée par Van't Hoff, une description assez détaillée de la manière dont Tinker, en partant de la structure intime des liquides, explique le phénomène de l'osmose.

Fredenhagen K. dans ses publications (1) arrive à la conclusion que la substance dissoute formerait un complexe avec les molécules du solvant et, comme conséquence de ce phénomène prend naissance une sous-tension à laquelle correspond un aflux du solvant à travers la cloison semi-perméable.

Les publications de Fredenhagen ont données lieu à une discussion entre Fredenhagen (2) et Wohl (3), Meyer K. (4) etc. En même temps fut reprit l'étude de la pression osmotique par Hückel E. (5) et Thiele A. (6).

Tout récemment M. le Prof. N. Vasilescu-Karpen dans une communication faite à la Société de Physique de Bucarest et publiée dans le *Bull. Sect. Sc. Ac. Roum.* (1941), No. 8, 9 et 10, nous montre que la pression osmotique repose sur la notion de la pression interne des liquides.

De ces travaux, nous pouvons tirer la conclusion que le solvant subit une transformation interne par simple dissolution d'une substance quelconque. Tinker interprète ce changement, dans le sens que la

pression du solvant dans la solution a une valeur inférieure à celle qu'elle a dans le solvant pur, et FREDENHAGEN, que les molécules du solvant forme une aglomération autour de la substance dissoute.

Ces deux hypothèses nous conduisent théoriquement, avec quelques difficultés, à une interprétation du phénomène de l'osmose mais, une étude critique de ces travaux ne nous donne pas une image claire du mécanisme de la pression osmotique.

Une explication simple du mécanisme de la pression osmotique, et qui est en concordance avec tous les phénomènes de dissolution, on peut l'imaginer en ayant comme point de départ la notion que les liquides sont plus ou moins polymérisés.

On admet, d'après un grand nombre des plus variées expériences physico-chimiques que les liquides, et surtout l'eau liquide (7), sont formés par des molécules plus ou moins associées, c'est-à-dire elles présentent un degré de polymérisation. Par exemple, l'eau à la température ordinaire serait un mélange de $(H_2O)^3$ tri, $(H_2O)^2$ bi, et H_2O monohydrol (8), de sorte que la proportion entre ces trois formes prend des valeurs différentes d'après la température à laquelle se trouve l'eau. De même, les études faites pour l'absorption des spectres infrarouges de l'eau et les différentes solutions salines (9) nous conduisent à la même conclusion, c'est-à-dire l'eau liquide possède un degré de polymérisation.

Nous ne connaissons pas les degrés de polymérisations des liquides, nous ne pouvons pas les déterminer car, toute mesure directe suppose l'introduction d'une surface de discontinuité qui pourrait modifier l'état de l'association moléculaire du liquide. On peut seulement dire, que le degrés de polymérisation est une conséquence des forces de la cohésion moléculaire et, par conséquant, ces forces mesurent le degrés de polymérisation.

Les forces de cohésion, nous pouvons les représenter par la formule de VAN DER WAALS dans laquelle on fait p égal zéro, parce que les liquides sont très peu compressibles:

$$K\,(V - b) = R\,.\,T$$

K étant la force de cohésion moléculaire, V le volume du liquide et b le volume occupé par les molécules.

Une fois, la structure intime d'un solvant connue, nous n'avons qu'à nous imaginer comment se présente une dissolution, c'est-à-dire, de voir quelle est la forme que prend la substance dissoute, ainsi que le solvant. Pour cela nous n'avons qu'à dissoudre, dans un liquide quelconque une substance qui doit satisfaire deux conditions: premièrement il faut que la substance ne réactionne pas avec le solvant et deuxièmement

la substance ne doit pas être volatile car si les deux conditions ne sont pas satisfaites nous n'avons pas proprement dit une dissolution et donc nous ne pouvons pas réaliser le phénomène d'osmose. Ces conditions admises dissolvons dans une solvant un substance; il est facile à nous imaginer que la substance donnera une infinité de particules toutes petites, moléculaires, qui se trouveront à une distance quelconque les unes des autres d'après la concentration.

Cette image, nous pouvons la comparer avec un vase dans lequel il y a des petite billes, en verre par exemple, couvertes par le solvant, c'est-à-dire, nous avons dans la dissolution une infinité de capillaires dans lesquels se trouve le solvant, et dont le diamètre serait plus ou moins large d'après la concentration de la dissolution.

Une fois l'image de la dissolution formée, l'explication du mécanisme de la pression osmotique se réduit, pour moi, à un phénomène capillaire. Ainsi, parmi les expériences les plus variées que j'ai fait et, qui ont été l'objet de plusieurs notes (10) et dans lesquelles j'ai cherché de voir quel est le rôle qui a le degré de polymérisation dans différents phénomènes physico-chimiques, se trouvent aussi, les résultats par lesquelles je montre que l'eau dans les capillaires doit avoir une autre structure moléculaire que lorsque elle forme une masse continue. Différentes considérations physiques comme les tensions de vapeurs des liquides dans les capillaires ou sous forme de gouttes et, d'autres considérations qui sont mentionnées dans mes travaux m'ont déterminées à tirer la conclusion que l'eau dans les capillaires et partiellement dépolymérisée. Le degré de dépolymérisation est d'autant plus avancé que le rayon des capillaires est plus petit.

Appliquons cette hypothèse à une dissolution de sucre dans l'eau. Le solvant eau se trouvant dans les capillaires formés par les molécules de la substance dissoute, subira une dépolymérisation et cela d'autant plus grande que la concentration de la dissolution de sucre sera plus grande. Comme résultat de cette dépolymérisation nous avons un agrandissement d'énergie moléculaire qui se manifestera, dans le cas du phénomène d'osmose, par un afflux du solvant à travers la membrane semi-perméable.

Pour déterminer la valeur de cette pression nous n'avons qu'à suivre l'éxposé de TINKER avec la différence, de prendre cette fois comme base de raisonement les hypothèses que nous avons émises plus haut. Donc, écrivons le cycle thermodynamique que la force de cohésion subit, pour une température déterminée, quand une molécule gramme du solvant passe dans la dissolution et revient à son état primitif parce que, la pression osmotique n'est pas égale à la différence des forces

de cohésion du solvant qui se trouve de deux côtés de la cloison semi-perméable.

Soit K et K' les forces de cohésion du solvant et du même solvant dans les capillaires de la dissolution, et supposons qu'une molécule gramme du solvant passe à travers la cloison semi-perméable dans la dissolution. Le travail isothermique correspondant, ayant la relation $K(V\text{-}b) = RT$ comme base, est $RT \operatorname{Log} \frac{K}{K'}$.

Retirons, réversiblement, de la dissolution des molécules du solvant ainsi que, les molécules puissent avoir la possibilité de refaire la molécule gramme du solvant. Dans ce cas, le travail correspondant à cette opération se compose de deux facteurs, un facteur pour l'opération de retirer les molécules de dissolution au prix d'un travail effectué sur le système égal a PV', et le deuxième facteur correspondant à la formation d'une molécule gramme du solvant par les molécules retirées de la dissolution égal à

$$\int_{V'}^{V} K d\nu.$$

Le cycle étant reversible est isotherme la somme de tous les travaux est nulle

$$RT \operatorname{Log} \frac{K}{K'} - PV' + \int_{V'}^{V} K d\nu = 0.$$

En effectuant l'intégration, ayant pour K la valeur $\frac{a}{V^2}$, donnée par Van der Waals, on a

$$RT \operatorname{Log} \frac{K}{K'} - PV' + \frac{a(V - V')}{VV'} = 0$$

d'où la valeur de la pression osmotique

$$P = \frac{RT}{V'} \operatorname{Log} \frac{K}{K'} + \frac{a(V - V')}{VV'^2}.$$

En effet P représente la pression osmotique de la dissolution parce que la force effectuée pour retirer les molécules de solvant de la dissolution est numériquement égale à la pression osmotique. On mesure souvant la pression osmotique en appliquant une pression extérieure à la dissolution pour empêcher l'osmose.

K, K' représente les forces de cohésion moléculaire du solvent et du même solvant dans les capillaires, après avoir subi la dépolymérisation et V, V', les volumes d'une molécule gramme du solvant

dans les mêmes conditions. On voit de ces considérations que les valeurs du K, K', V et V' ne sont pas indépendantes l'une de l'autre.

Appliquons cette formule à une dissolution diluée: le terme $\frac{a(V-V')}{VV'^2}$ est négligeable a cause que V' diffère très peu de V, la formule devient

$$P = \frac{RT}{V'} \operatorname{Log} \frac{K}{K'}.$$

Comme les valeurs du K et K' different aussi très peu entre elles, on peut écrire $\operatorname{Log} \frac{K}{K'} = \frac{K-K'}{K'}$ d'où

$$P = \frac{RT}{V'} \frac{K-K'}{K'} \quad \text{ou} \quad P = A \frac{K-K'}{K'}$$

car pour un solvant donné, à une température déterminée $\frac{RT}{V}$ est une constante.

Donc, la pression osmotique de la dissolution est proportionnelle à $\frac{K-K'}{K'}$ relation qui contient des facteurs qui dépendent surtout du solvant.

BIBILIOGRAPHIE

1. FREDENHAGEN K., *Zeit. Physik*, 87, 62 (1934); *Physik Z.*, 36, 194, 321 (1935).
2. FREDENHAGEN K., *Zeit. Physik*, 88, 806 (1934); *Physik Z.*, 36, 566 (1935); *Z. Elektrochemie*, 43, 28, 415 (1937).
3. WOHL K., *Physik Z.*, 36, 566 (1935).
4. MEYER K., *Z. Elektrochemie*, 43, 148 (1937).
5. HÜCKEL E., *Z. Elektrochemie*, 42, 762 (1936).
6. THIELE A., *Z. Phys. Chem.*, 178, A. 374 (1937).
7. P. PASCAL, *Traité de Chimie Minérale*. Vol. I, p. 170.
8. RAC J. R., *Nature*. Vol. 132, p. 480 (1933).
9. LECOMPTE J., *Le spectre infrarouge*, p. 234.
10. TOPORESCU E., *C. R.*, t. 190, p. 300 (1930); t. 192, p. 280 (1931); t. 197, p. 1040 (1933); t. 202, p. 2075 (1936); t. 202, p. 1672 (1936); t. 194, p. 724 (1932).

545 CHIMIE ANALYTIQUE

SUR LA BROMOMÉTRIE (VII-ème note) [1])

par **Constantin Belcot**

Résumé. *La bromométrie est tout aussi précise que la méthode iodométrique et son domaine d'application est vaste. De plus le prix des produits bromés est plus abordable.*

Dans cette note on présente une vue d'ensemble et des résultats.

Depuis quelques années à cause du prix élevé du iode et des produits iodés, ainsi que de leur rareté on a songé de remplacer par la bromométrie l'excellente méthode iodométrique, établie par BUNSEN (1853) et MOHR (1855).

Même auparavant il existait des études dans ce domaine. Il suffit d'en citer la méthode de KOPPESCHAAR et GYÖRGY [2]) sur le dosage de l'antimoine. Mais c'est MANCHOT et OBERHAUSER [3]) qui ont étudié à fond la bromométrie. Ensuite on peut citer les travaux de ROSENMUND [4]) et d'ALBERTI [5]).

Aujourd'hui la méthode est entré dans la pratique courante et dans certains manuels elle constitue un chapitre de la titrimétrie [6]).

Parce que nous nous sommes occupé de cette question depuis longtemps, nous croyons utile d'en présenter quelques résultats et une vue d'ensemble.

---

[1]) Voyez notre VI-ème note dans le *Bull. de la Polyt. de Bucarest* [2] (1941).

[2]) GYÖRY, *Z. analyt. Chem.*, *32*, 415 (1893).

[3]) W. MANCHOT et F. OBERHAUSER: *a) Z. anorg. all. Chem.*, *130*, 161, 1923; *b)* id. *130*, 168, 1923; *c)* id. *131*, 40, 1924; *d) Berichte D. Ch. G. 57*, 29, 1924; *e) Z. f. Unt. d. Nahr. u. Gen.*, *47*, 261, 1924.

[4]) R. K. W. ROSENMUND, *Z. angew. Chem.*, *37*, 58, 1924.

[5]) H. ALBERTI, *Brennstoff Chem.*, *5*, 301, 1924.

[6]) Par exemple R. STREBINGER, *Praktikum der quantitativen chemischen Analyse*, II. Teil, p. 42 (1937).

Généralités. Si on fait écouler par gouttes dans une solution acide de bromure de potassium une solution de bromate de potassium, il se forme du brome libre. Si en même temps on la fait réagir sur une substance oxydable par le brome, celui-ci est utilisé sur place à l'oxydation.

On peut dire qu'en bromométrie on emploie une solution de bromate de potassium qui oxyde par le brome qu'elle met en liberté. Donc on peut représenter la réaction:

$$(1) \qquad BrO_3' + 5Br' + 6H^{\cdot} = 3Br_2 + 3H_2O$$

ou

$$BrO_3K + 5BrK + 3SO_4H_2 = 3Br_2 + 3SO_4K_2 + 3H_2O$$

Le plus simplement on reconnaît le brome qui n'est plus nécessaire à l'oxydation (c'est-à-dire les premières gouttes en excès de la solution bromatée) par la propriété qu'a le brome de détruire les matières colorantes organiques, par exemple le méthylorange et les autres substances « *azo* ».

Le brome en solution aqueuse ou chlorhydrique, ou dégagé par un oxydant d'une solution aqueuse de bromure de potassium, additionnée d'acide chlorhydrique, réagit quantitativement sur la solution arsénieuse suivant l'équation:

$$(2) \qquad As_2O_3 + 2Br_2 + 2H_2O = As_2O_5 + 4BrH$$

ou en notation ionique:

$$2AsO_3H_2' + 2Br_2' + 2H_2O = 2\,AsO_4H_2' + 4Br' + H^{\cdot}$$

On a soin de verser la solution bromée dans l'acide arsénieux pour éviter les pertes de brome par volatilisation.

Il n'y a pas réduction par l'acide bromhydrique de l'acide arsénique formé dans les conditions de dilution employées.

C'est surtout à la titration de l'antimoine et des combinaisons de l'arsenic trivalent qu'on a l'avantage d'employer la bromométrie. On se rappelle que le brome libre transforme les combinaisons tri-en pentavalentes aussi en milieu acide, tandis que le iode réagit seulement en solution alcalinisée par du bicarbonate de sodium.

Solutions titrées. 1. *Solution de bromate de potassium.*

On emploie presque toujours une solution 0,1 n. de bromate de potassium qu'on peut préparer par pesée directe de $\frac{Br0_3K}{6} = 2{,}7835$ g. de $Br\,0_3\,K$ par litre.

On dissout à chaud le bromate de potassium pur et séché à 120° C.

La solution dont le pouvoir oxydant varie avec le temps est titrée par exemple avec de l'antimoine pur ou de l'émétique ($C_4 H_4 O_6 K.SbO$ $(0,5\ H_2O)$.

On précipite la solution chlorhydrique d'émétique par l'hydrogène sulfuré, on filtre le sulfure et le traite comme de règle. Ou plus simplement on « dissout » le sulfure dans l'acide sulfurique concentré et bouillant (formation de sulfate antimonieux). Ou encore on traite de l'émétique pur (en masse connue) par de l'acide chlorhydrique et on titre directement par le bromate.

2. *Solution d'acide arsénieux.* On prépare la solution d'acide arsénieux en milieu de bicarbonate de sodium de la même manière qu'en iodométrie. Mais quand on travaille dans un milieu chlorhydrique, on prépare la solution comme suit:

On pèse et on dissout l'anhydride arsénieux (As_2O_3) pur dans hydroxyde de sodium et on sursature par de l'acide chlorhydrique, de façon à avoir une solution acide d'environ 0,2 n. (en ClH).

Cette solution, par vieillissement, ne renferme pas de moissisures; elle contienne 4,9480 g. As_2O_3, c'est-à-dire 3,7480 g. arsenic par litre.

On trouve dans le premier tableau les résultats du titrage par la méthode bromométrique:

TABLEAU I

	Grammes d'*As*		
	Calculé	Trouvé	Différences
1	10 cm³ = 0,0375	0,0377	+0,0002
2	10 cm³ = 0,0375	0,0379	+0,0004
3	10 cm³ = 0,0375	0,0378	+0,0003
4	15 cm³ = 0,0562	0,0565	+0,0003
5	15 cm³ = 0,0562	0,0564	+0,0002
6	15 cm³ = 0,0562	0,0564	+0,0002
7	20 cm³ = 0,0750	0,0752	+0,0002
8	20 cm³ = 0,0750	0,0753	+0,0003
9	20 cm³ = 0,0750	0,0752	+0,0002

3. *Indicateurs.* On peut employer le carmin d'indigo (2‰), le vert malachite et même le méthylorange.

Dosages. *a) Antimoine.* Le précipité de sulfure d'antimoine est mis en solution dans l'acide chlorhydrique concentré; on fait bouillir pour chasser l'hydrogène sulfuré, puis on fait en sorte que la solution contienne 50% d'acide chlorhydrique. On ajoute à la solution bouillante du sulfite de sodium en quantité suffisante pour réduire l'antimoine. Il

faut éviter d'introduire un excès de sulfite de sodium, car l'anhydride sulfureuse est difficile à chasser (souvent l'addition d'eau provoque un nouveau dégagement de ce gaz); 3 g. de sulfite de sodium suffisent à la réduction de 0,1 g. d'antimoine; un courant de gaz sulfureux vaut encore mieux. Lorsque le gaz sulfureux a été complètement chassé, on ajoute 5% d'acide chlorhydrique, on fait bouillir, on ajoute quelques gouttes de méthyl-orange, et on titre jusqu'à décoloration par une solution titrée de bromate de potassium:

$$(3) \qquad 3\,Sb\cdots + Br\,O_3' \rightarrow 3\,Sb\cdots Br' + 3\,H_2O$$

ou

$$3\,Cl_3\,Sb + Br\,O_3K + 7\,ClH \rightarrow 3\,Cl_5\,Sb + BrH + Cl\,K + 3H_2O.$$

Il est préférable de faire une première détermination rapide, ensuite, dans une seconde plus précise, ajouter les neuf dixièmes du volume nécessaire, puis, seulement alors, le méthyl-orange et on finit le titrage goutte à goutte.

On ajoute, d'après Györy, à la solution des sels d'antimoine trivalent, du bromure de potassium et on acidule bien par de l'acide chlorhydrique. Puis on chauffe à 60° C, on ajoute quelques gouttes du méthyl-orange et on titre immédiatement avec la solution 0,1 n. de bromate de potassium sous agitation continuelle, jusqu'à la décoloration. Vers la fin de l'opération il faut titrer lentement.

$$(4) \quad 3\,Cl_3\,Sb + Br\,O_3K + 5\,Br\,K + 6\,ClH = 3Cl_5\,Sb + 6\,Br.K + 3H_2O.$$

Il faut observer que dans les solutions très acides, il se forme du chlore qui a aussi un pouvoir oxydant; par conséquent on peut se passer du bromure:

$$(5) \qquad 2\,BrO_3K + 12\,ClH = 2\,ClK + 5\,Cl_2 + 6\,H_2O.$$

On voit, d'après les relations (2) ou (3) que:

1 mol. $Br\,O_3K$ oxyde. 3 atomes de $Sb\cdots$.

Donc chaque cm³ de la solution 0,1 n. de bromate de potassium représente 0,006 g. d'antimoine $\left(\frac{3\,Sb}{60.000}\right)$.

Les sels antimonieux se dosent comme les arsénites; il faut ajouter du sel de Seignette (tartrate double de sodium et de potassium), pour empêcher la précipitation de l'acide antimonieux qui gênerait le virage. On ajoute un excès de brome que l'on titre en retour à cause de la lenteur finale de l'oxydation de l'oxyde antimonieux ($Sb_2\,O_3$).

Nous avons dissout 8,3535 g. d'émétique ($COOK — (CHOH)_2 — COOSbO$, 0,5 H_2O) dans 500 centimètres cubes d'eau; donc 100 cm³ représentent 1,6707 g. d'émétique ou 0,601 g. d'antimoine. On voit les résultats dans le tableau II.

TABLEAU II

	Grammes *Sb*		
	Calculé	Trouvé	Différences
1	10 cm³ = 0,0601	0,0603	+0,0002
2	10 cm³ = 0,0601	0,0603	+0,0002
3	20 cm³ = 0,1202	0,1205	+0,0003
4	20 cm³ = 0,1202	0,1204	+0,0002
5	30 cm³ = 0,1803	0,1807	+0,0004
6	30 cm³ = 0,1803	0,1806	+0,0003
7	40 cm³ = 0,3404	0,3406	+0,0002
8	40 cm³ = 0,3404	0,3406	+0,0002
9	50 cm³ = 0,4005	0,4008	+0,0003
10	50 cm³ = 0,4005	0,4008	+0,0003

b) Arsenic. La détermination de l'arsenic trivalent se fait de la même manière. Pour le calcul on observe qu'une molécule de bromate de potassium représente trois atomes d'arsenic; donc chaque centimètre cube de solution décinormale de bromate de potassium, représente 0,0037 g. *As.*

C'est aussi NISSENSON et MITTASCH [1]) qui recommandent la méthode bromométrique pour le dosage de l'arsenic et de l'antimoine dans les composés du nickel.

Principe. On peut déterminer d'abord la somme *As* + *Sb* et ensuite dans une deuxième quantité on distille et on détermine le chlorure arsénieux dans un milieu très acide (acide chlorhydrique); par différence on a l'arsenic.

Pour l'aliage antimoine-étain (le métal Britannia) on procède, d'après STREBINGER [2]), de la manière suivante:

On dissout 2—3 g. d'aliage dans de l'acide chlorhydrique dilué (1 : 1) et on chauffe jusqu'à ce qu'il ne se dégage plus du gaz. On ajoute quelques petits cristaux du chlorate de potassium et on fait bouillir jusqu'à

[1]) NISSENSON et MITTASCH, *Chem. Ztg.*, *28*, 185, 1904; voyez aussi H. WÖLBLING, *Die Bestimmungsmethoden des Arsens, Antimons und Zinns*, Stuttgart, 1914, page 204.

[2]) NISSENSON et SIEDLER, *Chem. Ztg.*, *27*, 749, 1903.

[2]) R. STREBINGER, *loc. cit.*, II-ème partie, page 43.

ce qu'il ne reste plus du dépôt métallique. Après refroidissement on verse dans un balon jaugé de 250 cm³, on remplit jusqu'au trait et on agite bien.

TABLEAU III

	Grammes					
	As	*Sb*	*As*	*Sb*	*As*	*Sb*
	Calculé		Trouvé		Différences	
1	0,0375	0,0601	0,0376	0,0603	+0,0001	+0,0002
2	0,0375	0,0601	0,0378	0,0600	+0,0003	—0,0001
3	0,0375	0,0901	0,0377	0,0 03	+0,0002	+0,0002
4	0,0375	0,0901	0,0379	0,0899	+0,0004	—0,0002
5	0,0375	0,1202	0,0378	0,1203	+0,0003	+0,0001
6	0,0375	0,1202	0,0377	0,1201	+0,0002	—0,0001
7	0,0562	0,0601	0,0560	0,0604	—0,0002	+0,0003
8	0,0562	0,0601	0,0561	0,0597	—0,0001	—0,0004
9	0,0562	0,1202	0,0566	0,1204	+0,0004	+0,0002
10	0,0562	0,1202	0,0559	0,1206	—0,0003	+0,0004
11	0,0750	0,0601	0,0754	0,0604	+0,0004	+0,0003
12	0,0750	0,0601	0,0753	0,0599	+0,0003	—0,0002
13	0,0750	0,0901	0,0753	0,0898	+0,0003	—0,0003
14	0,0750	0,0901	0,0752	0,0903	+0,0002	+0,0002

Pour déterminer l'antimoine, il faut d'abord réduire sous forme trivalente, la quantité qui pendant la dissolution a été oxydée sous la forme pentavalente.

Pour cela on prend 25 cm³ de solution dans un vase à titrer, on y ajoute un peu de sulfite de sodium et on chauffe jusqu'à la disparition de l'odeur du gaz sulfureux (car il ne faut pas réduire aussi l'étain). Ensuite on fait le titrage comme d'habitude, avec la solution décinormale de bromate de potassium; on a pour 1 partie BrO_3K, trois parties *Sb*.

Pour la détermination de l'étain on prend une seconde prise dans une fiole conique, on ajoute en deux fois un peu de fer réduit, puis un volume d'acide chlorhydrique dilué égal à la moitié du volume du liquide, on laisse sur la bain-marie et on agite de temps en temps.

L'hydrogène naissant réduit les sels d'antimoine jusqu'au métal qui se dépose de la solution verdâtre, avec l'excès du fer, comme un précipité noir.

Maintenant on filtre, on recueille quantitativement le filtrat dans une fiole connique et on lave avec de l'eau bouillante. L'étain dans le filtrat est presque totalement sous forme de sels *stanno* et contient

aussi quelques sels *ferro* et *ferri*. On conduit ensuite un faible courant de gaz carbonique; il faut aussi absolument réduire avec quelques grains d'alluminium. On obtient l'étain sous forme métallique spongieuse.

Quand la réaction vient de se ralentir on ajoute avec précaution et toujours dans une atmosphère de gaz carbonique, de l'acide chlorhydrique concentré pour dissoudre l'éponge d'étain.

Après la complète dissolution on refroidie, on ajoute de l'empois d'amidon et, toujours dans l'atmosphère de gaz carbonique, on titre avec de la solution décinormale de iode, jusqu'à la décoloration.

Dans ces conditions de travail la présence du fer n'est pas nuisible.

On fait les calculs en tenant compte du fait que deux atomes d'iode représentent un atome d'étain.

On peut analyser aussi l'alliage de plomb, etc.

c) Etain. Le dosage de l'étain est basé sur l'oxydation de la solution chlorhydrique du chlorure de stanium avec de l'acide bromhydrique ou du brome-bromure de potassium. Pendant le titrage l'indicateur — le carmin d'indigo — disparaît et puis reparaît sur l'instant, un peu avant la fin de la réaction, pour disparaître de nouveau quand le brome est en excès.

TABLEAU IV

	Grammes *Sn*		
	Gravimétrie	Bromométrie	Différences
1	0,0593	0,0590	— 0,0003
2	0,1185	0,1183	— 0,0002
3	0,1781	0,1783	+ 0,0002
4	0,2376	0,2378	+ 0,0002

d) Chlorure de chaux (*Ca* (*ClO*) *Cl*). On laisse écouler dans la solution à analyser un mélange de 30 cm³ solution 0,2 n. de bromure de potassium et 30 cm³ d'acide chlorhydrique dilué (15%); ensuite on titre comme d'habitude avec une solution 0,1 n. d'arsenic.

TABLEAU V

	Grammes *Cl*		
	Iosométrie	Bromométrie	Différences
1	0,0112	0,0109	— 0,0003
2	0,0111	0,0106	— 0,0005
3	0,0112	0,0108	— 0,0004
4	0,0220	0,0218	— 0,0002
5	0,0222	0,0223	+ 0,0001
6	0,0218	0,0216	— 0,0002
7	0,0446	0,0443	— 0,0003
8	0,0445	0,0441	— 0,0004
9	0,0448	0,0451	+ 0,0003

e) La pyrolusite et l'oxyde de plomb. On met un excès d'acide arsénieux, on ajoute 0,5—1 g. de bromure de potassium, puis 30—40 cm³ d'acide chlorhydrique conc. et on chauffe à 50—70° jusqu'à la dissolution complète du superoxyde. On titre à froid l'acide arsénieux par la solution 0,1 n. de bromate de potassium.

La présence du fer ne gêne pas le titrage.

Nous avons trouvé les résultats suivants, pour deux échantillons:

TABLEAU VI

A) Iodométrie	78,5% MnO_2	80,4% MnO_2
Bromométrie	78,4%	80,2%
B) Iodométrie	92,6% PbO_2	94,3% PbO_2
Bromométrie.	93,5%	94,25%

f) Bicromate de potassium. On conduit le chlore comme plus haut dans une solution chaude d'acide arsénieux; on titre l'excès.

TABLEAU VII

	Grammes *Cr*		
	Calculé	Trouvé	Différences
1	10 cm³ = 0,0173	0,0177	+0,0004
2	10 cm³ = 0,0173	0,0175	+0,0002
3	15 cm³ = 0,0259	0,0257	—0,0002
4	15 cm³ = 0,0259	0,0258	—0,0001
5	20 cm³ = 0,0346	0,0347	+0,0001
6	20 cm³ = 0,0346	0,0348	+0,0002
7	25 cm³ = 0,0432	0,0434	+0,0002
8	25 cm³ = 0,0432	0,0435	+0,0003

g) Fer. On peut combiner le principe de l'oxydimétrie et de la bromométrie, mais plus simplement c'est d'appliquer seulement la méthode bromométrique.

Par conséquent on mélange une solution 0,1 n. de brome avec un peu de solution 0,5 n. d'hydroxyde de sodium. On y fait écouler la solution chlorhydrique ou sulfurique du sel fero réduite par du bioxyde de soufre (ou par du cadmium pur), on met un excès de solution d'acide arsénieux; on ajoute de l'acide phosphorique et du bromate de potassium et on titre en retour cet excès. Indicateur: carmin d'indigo.

L'acide arsénieux est oxydé rapidement et quantitativement par l'hypobromite de potassium (*BrOK*).

D'après nous c'est une des plus rapides méthodes, qu'on peut employer dans les divers dosages industriels.

TABLEAU VIII

	Grammes *Fe*		
	Calculé	Trouvé	Différences
1	10 cm³ = 0,0558	0,0560	+ 0,0002
2	10 cm³ = 0,0558	0,0556	— 0,0002
3	10 cm³ = 0,0558	0,0556	— 0,0002
4	15 cm³ = 0,0837	0,0836	0,0001
5	15 cm³ = 0,0837	0,0839	+ 0,0002
6	15 cm³ = 0,0837	0,0838	+ 0,0001
7	20 cm³ = 0,1116	0,1119	+ 0,0003
8	20 cm³ = 0,1116	0,1119	+ 0,0003
9	20 cm³ = 0,1116	0,1114	— 0,0002

Obs. La réduction a été faite par du gaz sulfureux.

h) L'eau oxygénée en solution alcaline est traitée par une solution d'hypobromite de potassium ($BrOK$); après le dégagement de l'oxygène, on acidule immédiatement et on titre l'excès de brome.

TABLEAU IX

	Grammes H_2O_2		
	Iodométrie	Bromométrie	Différences
1	0,0020	0,0018	— 0,0002
2	0,0038	0,0037	— 0,0001
3	0,0035	0,0032	— 0,0003
4	0,0044	0,0046	+ 0,0002
5	0,0047	0,0050	+ 0,0003

i) Magnésium. Nous avons indiqué dans une autre note [1]) une méthode volumétrique pour le dosage du magnésium.

On peut titrer aussi cet élément par voie bromométrique [2]), car divers composés organiques réagissent facilement avec le brome.

Par exemple la 8-oxy-quinoléine se transforme en dibrome-8-oxy-quinoléine d'après équation:

(6) $$C_9H_6NOH + 2Br_2 = C_9H_4Br_2NOH + 2BrH.$$

[1]) C. BELCOT, *Bull. Soc. chim. France* [3], *39*, 1483, 1926.
[2]) R. BERG., *Zts. anal. Chem.*, *71*, 23, 1932.

Ensuite le magnésium forme dans l'ammoniaque une combinaison insoluble qui par l'acide chlorhydrique dilué se décompose de nouveau en 8 — oxy — quinoléine et chlorure de magnésium, à savoir:

(7) $Cl_2Mg+2NH_3+2C_9H_6NOH=C_9H_6NO-Mg-ONC_9H_6+2NH_4Cl.$

(8) $C_9H_6NO-Mg-ONC_9H_6+2ClH=2C_9H_6NOH+Cl_2Mg.$

Donc le magnésium est équivalent avec une quantité de 8-oxy-quinoléine, par une quantité équivalente de brome de la solution 0,1 n. de bromate de potassium.

On précipite une solution ammoniacale de sel de magnésium (qui contient du chlorure d'ammonium), par une solution alcoolique d'oxy-quinolate de magnésium.

On filtre le précipité, on le lave bien par de l'eau chaude et faiblement ammoniacale et on le dissout sur le filtre par de l'acide chlorhydrique dil. (1 : 1) et chaud, en recueillant le filtrat; on lave bien avec de l'acide chaud.

On verse ensuite le liquide dans un ballon jaugé et on titre une partie par la solution de bromate de potassium. Pour cela on ajoute une petite cuillère de bromure de potassium, un peu de méthylorange et un excès mesuré de la solution 0,1 n. de bromate, jusqu'à ce que le liquide devienne d'une couleur jaune claire.

Maintenant on titre l'excès de brome. Pour cela on ajoute de l'iodure de potassium; le brome libre met en liberté une quantité équivalente de iode:

(9) $Br+IK=I+BrK,$

qui est enfin titré comme de règle par une solution 0,1 n. de thiosulfate de sodium.

En somme on a:

D'après l'équation (6): 1 mol. C_9H_6NOH..... 4 *Br.* et

D'après l'équation (7): 2 mol. C_9H_6NOH..... 1 *Mg.*, d'où

1 *Mg*..... 8 *Br*,

c'est-à-dire 0,0003 g. *Mg.* pour chaque cm³ de solution 0,1 n. de BrO_3K. Nous avons préparé une solution qui contienne 24,6500 g. $SO_4Mg.{}_7H_2O$ par litre, c'est-à-dire 4,0320 g. *MgO* ou 2,4320 g. *Mg.*

TABLEAU X

	Grammes *Mg*			
	Calculé	Trouvé		
		Méthode de Neubauer	Bromométrie	Différences
1	10 cm³ = 0,0243 . . .	0,0246	0,0240	— 0,0030
2	15 cm³ = 0,0364 . . .	0,0366	0,0361	— 0,0003
3	20 cm³ = 0,0486 . . .	0,0489	0,0485	— 0,0001
4	25 cm³ = 0,0607 . . .	0,0609	0,0603	— 0,0003
5	30 cm³ = 0,0729 . . .	0,0732	0,0727	— 0,0002
6	35 cm³ = 0,0850 . . .	0,0854	0,0848	— 0,0002
7	40 cm³ = 0,0973 . . .	0,0976	0,0970	— 0,0003

j) Benzène. On utilise la solution 0,1 n. de bromure — bromate de potassium en présence d'acide sulfurique étendu.

On prélève 5 cm³ de l'échantillon de benzène à analyser, que l'on verse dans un flacon bouché à l'émeri; on ajoute 20 cm³ d'acide sulfurique à 20% et on laisse couler de la solution bromurée jusqu'à ce que la liqueur surnageante conserve une teinte rouge orangée après cinq minutes d'agitation et cinq minutes de repos. On peut représenter le degré de pureté du benzène par le nombre de grammes de brome correspondant mis en liberté pour 100 cm³ de l'échantillon. Ce qui revient à multiplier par 0,008.20 = 0,16 le nombre de centimètres cubes de la solution employée (p. mol. du benzène = 80).

On peut simplifier les calculs par l'emploi de la table dressée par ALBERTI [1]).

* * *

A part ces déterminations, on peut doser aussi par cette méthode l'urée pure, l'ozone, l'éau de chlore, le barium, l'hypochlorite, le permanganate, le sulfite, l'acide sulfureux, etc.

On voit d'après les données des nos tableaux (les données sont la moyenne de plusieurs déterminations), que la bromométrie est une méthode très exacte, rapide et d'une application étendue.

C'est pour ces raisons que nous la récommandons à l'attention des chimistes de nos laboratoires.

Dans les notes suivantes nous exposerons nos recherches sur l'indice d'iode; ensuite sur le dosage du sodium, le dosage du soufre dans les huiles pour transformateurs, etc.

[1]) ALBERTI, *loc. cit.*

CONTRIBUTIONS À LA CHLORURATION DU PROPANE

par **Th. D. Ionesco** et **Const. Cretzulesco**

Par la chloruration directe du propane avec du chlore, on obtient un mélange de divers dérivés chlorés.

La chloruration thermique, peut être realisée entre 190—200°*C. Au-dessus de* 200° *il y a des réactions destructives.*

La chloruration du propane, en présence de SO_4H_2 *et en présence de l'eau se réalise à la température ordinaire sans réactions destructives.*

La chloruration du propane a été peu étudiée et c'est pour cette raison que les méthodes de chlorurations spécifique de cet hydrocarbure sont très réduites [1]).

En général, par la chloruration du propane on a obtenu des dérivés mono-et dichlorpropane et seulement dans peu de cas il a été constaté la présence de dérivés polychlorurés. Les dérivés plus riches en chlore, peuvent être obtenus, d'après les méthodes connues jusqu'à présent, par la chloruration indirecte des dérivés mono-et dichlore.

Schorlemmer [2]) traitant le propane avec du chlore gazeux, obtient un mélange de chlorures, formé en majeure partie de dichlorpropane et monochlorpropane. Par la chloruration de la fraction qui distille au-dessus de 80° C, pendant quelques jours, sous l'influence de la lumière solaire, il a obtenu une fraction plus lourde qui distille jusqu'a 200° C et dans laquelle il suppose l'existence d'un trichlorpropane.

H. B. Haas, E. T. Bee et Paul Weber [3]) chlorurant photochimiquement le propane entre — 60° et + 300° C, obtiennent un mélange de chlorures formé en majeure partie de 1 - monochlore et 2 - monochlorpropane.

---

[1]) Carlton Ellis, « The chemistry of petroleum derivates ».

[2]) Liebigs, *Annalen der Chemie*, 152, p. 159.

[3]) *Ind. Eng. Chem.*, Nr. 27, Oct. 1935, pp. 1190-95.

Mason et Wheeler [1]) obtiennent également des produits avec un grand pourcentage de 1 - monochlorpropane, le reste étant formé de 2 - monochlorpropane. Les dérivés monochlorés du propane peuvent être aussi obtenus dans l'obscurité.

Bataafsche Petroleum Maatschapij [2]) prépare industriellement les dérivés mono-halogenès du propane, du butane et du pentane en mélangeant le chlore avec l'hydrocarbure respectif dans l'obscurité, entre 320° C et 380° C.

H. Gault [3]) chlorure les hydrocarbures acicliques saturés en présence de catalyseurs: les chlorures de *P*, *Sb*, *Mo*, *Al*, *Fe*.

Fernando Somoza Vivas [4]) chlorure à 18° C, sous pression, un mélange de méthane, éthane, propane et buthane en présence des catalyseurs PCl_5 et $SbCl_5$. L'opération dure plusieurs heures en introduisant, par petites quantités entre 2,5% et 10% les hydrocarbures, en rapport au poids du chlore.

William E. Scharp [5]) chlorurant le propane et ses dérivés chlorés inférieurs, sous la forme liquide ou gazeuse, à des températures élevées et en présence des catalyseurs $CuCl_2$, $FeCl_3$ et $SbCl_5$ a obtenu parmi d'autres produits, des dérivés tri-halogénés.

H. B. Haas et E. T. Mc. Bee [6]) chauffent séparément le propane et le chlore à 250° C et introduisent ensuite les gaz dans une zone de réaction; ils obtiennent un mélange formé de 1 - chlorpropane, 1-1 dichlorpropane, 1-2 dichlorpropane, 1-3 dichlorpropane, 2-2 dichlorpropane, 1-2-2 trichlorpropane et d'autres dérivés ayant des points d'ébullition vers 132° C.

Chlorurant le 1 - chlorpropane séparément, ils obtienent le 1 - 3 dichlorpropane.

Lee H. Clark [7]) chlorure les hydrocarbures acicliques saturés en état gazeux *à de hautes températures, en les diluant avec un gaz inactif.*

L. H. Reyerson et Samuel Juster [8]) chlorurent le propane entre 52° et 324° C employant les catalyseurs: Al_2O_3, *Cu* et $CuCl_2$ sur gel de silicate (silicagel). Le rapport le plus avantageux chlor-hydrocarbure est de 1/1 ou 1/2. Les auteurs ont établis qu'une pression élévée

[1]) *Chem. Zblatt*, 1931. Bd. II, p. 3427.
[2]) *Ch. Z.* (1931), I, p. 1514.
[3]) *Ch. Z.* (1925), II, p. 912.
[4]) *Pat. americ.*, 1920282; 10.IX.1931.
[5]) *Pat. americ.*, 2010039; 8.IX.1931.
[6]) *Pat. americ.*, Nr. 2004.073; I.V.1934.
[7]) *Pat. americ.*, Nr. 2064.413 du 1.II.1934.
[8]) *Ch. Z.*, 1937, I, p. 1121.

du propane, en rapport avec la pression du chlore, facilite la formation des dérivés inférieurs. La pression plus élevée du chlore, la température élevée et la grande vitesse d'écoulement des gaz favorisent la formation des dérivés supérieurs. Une pression trop élevée du chlore réduit beaucoup l'activité des catalyseurs.

LEVINE et CASS [1]) de la « *Du Pont Company* », U. S. A. chlorurant le 1-3 dichlorpropane sous l'influence de la lumière et en présence de certains catalyseurs de fer, obtiennent un mélange avec 90% 1-2-3 *trichlorpropane, qui traité avec de l'eau, se transforme en glycérine.*

Tenant compte du fait que récemment, notre industrie pétrolière a commencé a séparer le propane des gaz de sonde et de ceux résultant du craking des mazouts et ayant en vue que le propane ainsi obtenu est en assez grande quantité, nous avons cru nécessaire d'étudier les possibilités de l'utilisation rationnelle de ce produit, pour être employé d'une façon plus rentable, que dans l'économie ménagère.

Nous présentons les résultats des essais que nous avons faits pour obtenir les dérivés chlorés du propane, produits pouvant être utilisés comme disolvants, pour la préparation des alcools respectifs et pour la préparation de la glycérine.

Pour obtenir de la glycérine, on peut employer plusieurs dérivés chlorurés du propane: le 1 - chlorpropane qui par chloruration se transforme en 1-3 dichlorpropane; le 1-2 dichlorpropane qui par chloruration, en présence de l'iode, passe en 1-2-3 trichlorpropane; le 1-2-3 trichlorpropane qui par pirolyse se transforme en chlorure d'alyle employée par ESSEX et WARD [2]) de la « *Du Pont Company* » U.S.A. pour la préparation de la glycérine. Le 1-2-3 trichlorpropane se transforme facilement en glycérine en le traitant avec de la vapeur, d'après le procédé LEVINE et CASS de la « *Du Pont Company* ».

Dans nos essais, nous avons étudié les possibilités de chlorurer le propane, tenant compte des conditions solicitées par une application industrielle éventuelle du procédé, cherchant en premier lieu un rendement élevé des produits, obtenus dans des conditions économiques (température et pression ordinaires) et avec des appareils simples.

Dans une prochaine communication, nous espérons pouvoir vous présenter les méthodes pour obtenir les dérivés du propane pour la fabrication économique de la glycérine.

---

[1]) *Ind. Engin. Chem.*, Nr. 31, 1939, pp. 515—519.
[2]) *Ind. Engin. Chem.*, Nr. 31 (1939), pp. 515—519.

PARTIE EXPÉRIMENTALE

La chloruration thermique du propane

Nous avons utilisé l'installation de la figure 1. Les volumes de chlore et de propane passés par des flacons contenant de l'acide sulfurique ont été mesurés avant d'être introduits dans le tube de réaction. Les produits obtenus ont été condensés dans le réfrigérant à eau et ensuite dans celui à glace. Le chlore non combiné et l'acide chlorhydrique qui en résulte, ont été captés dans des vases contenant une solution aqueuse de *NaOH*; le propane non combiné a été capté dans un entonnoir de séparation.

Pour nos expériences nous avons utilisé le chlore gazeux commercial en tubes.

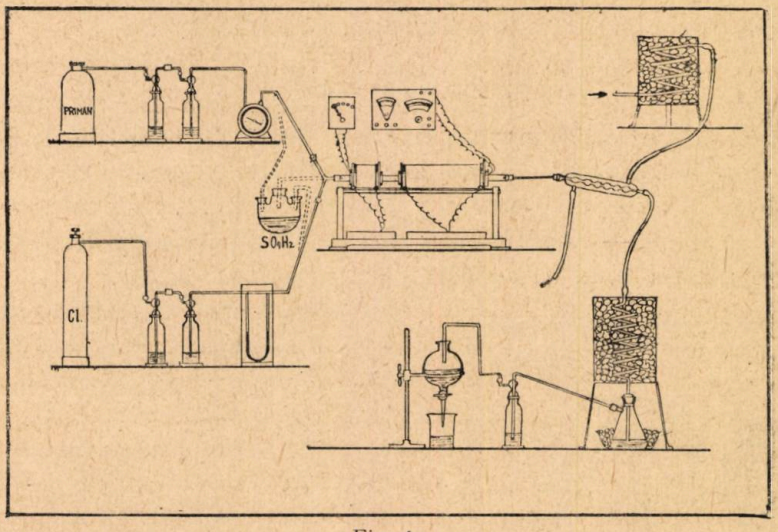


Fig. 1.

Le propane nous a été fourni par la raffinerie « *Astra Română* » qui le vend dans des récipients d'acier d'une capacité de 20 litres sous le nom de « *Priman* ». Analysé avec l'appareil Podbielniac, le propane que nous avons employé a la composition suivante:

Éthane + éthylène 0,85%

Propane + propylène .... 99,15 »

Nous avons séparé les hydrocarbures non saturés en faisant passer le « *Priman* » par un vase de lavage contenant de SO_4H_2 98%; le gaz ainsi lavé contenait 99,63% de propane.

Nous avons fait les premiers essais de chloruration à des températures comprises entre 20° C et 360° C, maintenant le rapport 1/1 entre les volumes de chlore et de propane. Jusqu'à 60° C la réaction est très faible; nous n'avons obtenu que quelque gouttes de chlorures. Après un certain temps apparaissent sur le tube de réaction, de petites zones de charbon, et immédiatement après, la réaction devient très active; la chloruration se fait d'une si forte façon que le propane est réduit jusqu'au charbon. Au-dessus de 60° C, en élevant la température, on réduit également le temps jusqu'à l'apparition des zones de charbon. Dans ce cas, à l'apparition de ces zones, la réaction est si violente que tout le long du tube de réaction l'hydrocarbure s'allume et tous les appareils se remplissent d'une fine pudre de charbon.

Comme les flammes se produisent immédiatement après l'apparition des premières traces de charbon, nous avons déduit que le charbon catalyse la réaction vers une chloruration destructive:

$$C_3H_8 + 4\,Cl_2 = 8HCl + 3C.$$

Pour vérifier cette supposition, nous avons introduit dès le début dans le tube de réaction, une petite quantité de poudre de charbon provenant d'un essai précédent; les flammes se sont produites — au-dessus de 60° C — immédiatement après que le mélange de chlore et de propane est venu en contact avec le charbon.

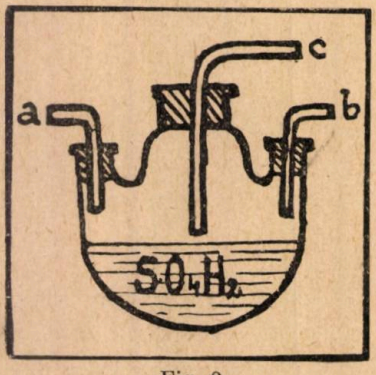


Fig. 2.

Observant que la première apparition de charbon a lieu dans le tube de raccord, où se produit le premier contact du chlore avec le propane, nous avons supposé que dans ce tube de raccord, à cause de son petit diamètre, les gaz se trouvent à une pression plus haute, pression qui croît avec le débit des gaz, et nous avons déduit que la pression favorise également la chloruration destructive.

Nous avons remplacé ce tube de raccord avec un récipient pour le mélange des gaz, d'une capacité de 2 litres (fig. 2); la réaction s'est apaisée et nous avons pu conduire la chloruration jusqu'à la température de 200° C. Nous avons établi que l'intervalle de température 190°—200° C est le plus favorable pour la chloruration; sous 190° C le mélange de gaz réactionne très peu, tandis que au-dessus de 200° C la réaction est destructive.

Nous avons trouvé que le rapport le plus favorable entre le chlore et le propane est de 10 l. de chlore pour 18 l. de propane, par heure.

Dans ces conditions, il se chlorure environ 60% de la quantité de propane introduite dans le tube de réaction.

Le mélange de chlorures a une couleur jaunâtre à cause du chlore dissous et possède une odeur étherée, pareille à celle du chloroform.

Nous avons scindé par distillation fractionnée avec un colonne à trois boules, le mélange de chlorures en fractions, comme ci-dessous:

45°— 47° C la fraction du 1-chlorpropane
47°— 75° » » » » 2-2 dichlorpropane
75 — 90 » » » » 1-1 »
90 —115 » » » » 1-2 »
115—124 » » » » 1-2-2 trichlorpropane
124°—130° » » » » 1-3 dichlorpropane
130°—145° » » » » 1-1-3 trichlorpropane.

La courbe de distillation est indiquée dans la figure 3.

En examinant la courbe, il résulte que par la chloruration thermique du propane, sans catalyseurs, dans un tube de verre (long. 1 m. d=20 mm.) entre 190° et 200°, il se forme en majeure partie les dérivés: 2-2 dichlorpropane en proportion de 37,65%, 1-2 dichlorpropane 27,30% et 1-1 dichlorpropane 20,25%.

On obtient également, en petite quantité, des dérivés trichlorurés: 1-2-2 trichlorpropane 2,10% et 1-1-2 trichlorpropane 1,80%.

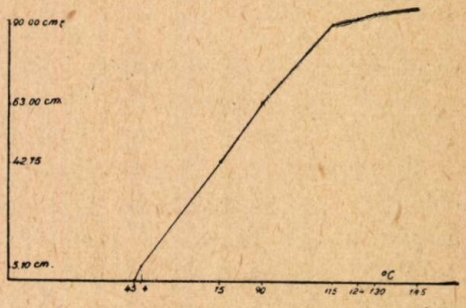


Fig. 3.

La courbe de distillation du mélange de chlorures obtenue par la chloruration thérmique du propane à la température de 190°—200° C.

La chloruration du propane avec du chlore gazeux en présence de l'acide sulfurique

Nous avons introduit le mélange de chlore et de propane dans un récipient dans lequel se trouve une quantité de SO_4H_2. La chloruration du propane en présence de l'acide sulfurique se fait à la *température normale* et il ne se produit plus d'allumage de l'hydrocarbure. La plus grande partie des produits chlorurés se condense elle-même

dans le récipient et se dépose sous la forme d'une couche au-dessus de l'acide sulfurique. Ces produits sont enlevés de temps en temps avec une pipette.

En laissant ces mélanges plus longtemps en contact avec SO_4H_2 ceux-ci se noircissent car ils sont en partie décomposés. Si on laisse barboter le chlore et le propane à travers la couche d'acide sulfurique, il se produit un réaction de chloruration destructive et après quelque temps l'acide se noircit. En filtrant l'acide on sépare une quantité de produits goudronneux et du charbon.

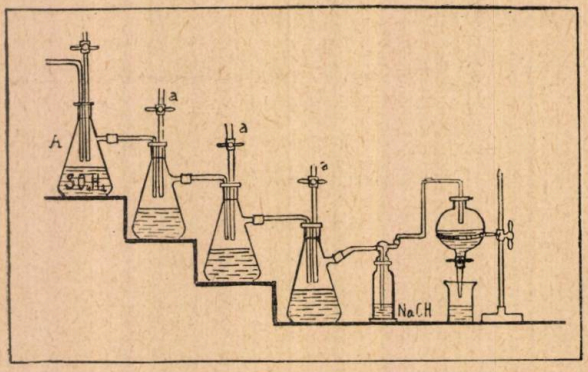


Fig. 4.

Pour réaliser une chloruration quantitative du propane, nous avons relié en série plusieurs vases contenant de l'acide sulfurique. En variant le rapport chlore/propane et la concentration de l'acide sulfurique, nous avons établi que pour le rapport 10 l. chlore/25 l. propane et SO_4H_2 96% la réaction est quantitative quand on fait passer le mélange de gaz à travers 7 vases de lavage avec SO_4H_2.

Nous avons réuni les chlorures de tous les vases. Le mélange des chlorures a été lavé avec de l'eau, pour éliminer l'acide chlorhydrique et le chlore et ensuite séché sur $CaCl_2$.

En fractionnant ce mélange, avec la colonne à trois boules, nous avons obtenu la courbe de distillation suivante (Fig. 5):

On peut observer que parmi les composants du mélange de chlorures on trouve en plus grande quantité les suivants: le 1-chlorpropane 24%, le 1-2 dichlorpropane 28,5%, le 1-1 dichlorpropane 14% et le 1-2-3 trichlorpropane 10%.

Les dérivés trichlorurés: le 1-2-2 trichlorpropane et le 1-1-2 trichlorpropane se trouvent en petite quantité, environ 2,5%.

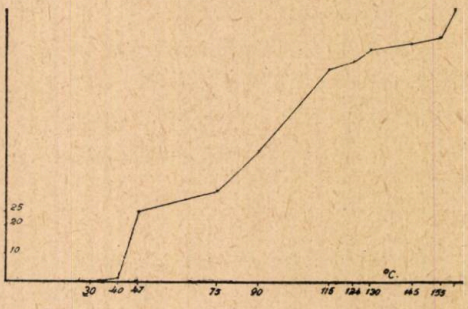


Fig. 5.

La courbe de distillation du mélange de chlorurés obtenu par la chlorurarion du propane en présence de SO_4H_2 96,0% à la température normale.

La chloruration du propane, en présence de l'acide sulfurique, va jusqu'à l'obtention des dérivés tétrachlorés; la fraction 145°—155° C qui représente à peu près 2% du volume du mélange de chlorures contient probablement des dérivés tétrachlorés 1-1-1-2 et 1-1-2-2 tétrachlorpropane.

En variant le rapport chlore/propane dans les différents vases de l'installation, on peut varier dans une certaine mesure la proportion des différents composants du mélange de chlorures.

Il est à observer qu'en présence de l'acide sulfurique, la chloruration s'étend plus loin que dans le cas de la chloruration thermique, obtenant, outre les quantités appréciables de trichlorpropane, de petites quantités probables de tétrachlorpropane.

Nous avons chloruré le propane en présence de SO_4H_2 à la température normale, observant qu'à des températures plus élevées ont lieu des réactions destructives.

La chloruration du propane en présence de l'eau

Pour éviter l'action destructive du chlore, nous avons préconisé la chloruration du propane dans un milieu neutre, et pour l'économie du procédé, nous avons écarté dès le commencement l'utilisation d'un gaz comme diluant du mélange de chlore et de propane.

Nous avons choisi l'eau comme milieu neutre dans lequel ont lieu les réactions de chloruration et dès les premiers essais nous avons obtenu des résultats satisfaisants.

L'appareil employé: plusieurs vases de lavage, combinés en série et remplis jusqu'au tiers avec de l'eau. (Fig. 4)).

On laisse barboter dans l'eau le chlore et le propane. Après un certain temps l'eau est saturée de chlore. Dans cet état on peut interrompre pour un certain temps le courant de chlore, la chloruration du propane ayant lieu sous l'action de l'eau de chlore.

Les réactions ont lieu à la pression et à la température ordinaires.

Il ne se produit pas de réactions destructives. Les dérivés chlorés obtenus sont séparés de l'eau avec un entonnoir de séparation. Il est à remarquer que le rapport chlore/propane varie dans les différents vases de notre installation. Nous pouvons toutefois régler le rapport chlore/propane par l'introduction d'un de ces gaz en quantité nécessaire dans n'importe quel vase, par les tubes *a*. Par ce procédé nous pouvons favoriser, en quelque sorte, l'obtention en plus grande quantité, d'un certain dérivé chloré.

Dans une installation comprenant 8 vases reliés en série, nous avons réalisé la chloruration quantitative du propane employé, introduisant

dans le premier vase de l'installation 10 l. chlore/20 l. propane par heure. En mélangeant les produits de chloruration de tous les vases, nous avons obtenu un mélange de dérivés chlorés qui par fractionnement donnent la courbe suivante:

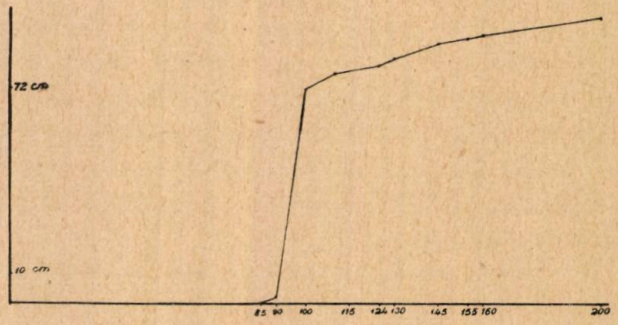


Fig. 6.

La courbe de distillation du mélange de chlorures obtenu par la chloruration du propane en présence de l'eau à la température ordinaire.

Nous observons que *la fraction 1-2 dichlorpropane* (*P. E* = 96,8° C) *est la plus riche, soit environ 70% de la quantité de mélange de chlorures.*

Changeant le rapport chlore/propane par l'augmentation du volume de chlore, on obtient dans les premiers deux vases un mélange de dérivés chlorés ayant un point d'ébullition de 90° C, le point finale étant porté à 200° C. La fraction 1-2 dichlorpropane diminue en faveur des fractions 115°—124° C et 130°—145° C dans lesquelles se trouvent les dérivés trichlorés, 1-2-2 et 1-1-2 trichlorpropane. La fraction 124—130° C du dichlorpropane se réduit tellement qu'elle disparaît à peu près.

Le mélange obtenu dans les vases suivants, a la même courbe de distillation que la précédente (fig. 6) avec la prépondérance de 1-2 dichlorpropane.

Quant le volume de chlore employé est plus petit que 10 litres de chlore pour 20 litres de propane par heure, la chloruration du propane ne se fait plus quantitativement dans une série de 8 vases.

Dans la chloruration du propane en présence de l'eau, le rapport le plus favorable est de 10 l. chlore/20 l. propane par heure.

CONCLUSIONS

Par la chloruration directe du propane avec du chlore gazeux, on obtient un mélange de divers dérivés chlorés, en proportions variables d'après les conditions de travail.

La chloruration thermique, sans catalyseurs, dans un tube de verre long de 1 m avec un diamètre de 20 mm peut être réalisé dans des conditions favorables entre 190—200° C. Au-dessus de 200°, il y a des réactions destructives. Les traces de charbon catalysent violemment la réaction.

Le mélange de dérivés chlorés obtenu est formé de corps qui distilent entre 45° C et 145° C avec une prépondérance de dérivés dichlorés.

On réalise la chloruration du propane, en présence de l'acide sulfurique 96% à la température ordinaire, sans réactions destructives. Le mélange de dérivés chlorés contient des corps à partir du monochlorpropane jusqu'au tétrachlorpropane avec une prépondérance de dérivés dichlorpropane.

La chlorurisation du propane en présence de l'eau se réalise également à la température ordinaire. Le mélange des dérivés chlorés est moins complexe; il y a une prépondérance de 1-2 dichlorpropane qui représente 70% du mélange total.

551.7 TECTONIQUE

PHÉNOMÈNES TECTONIQUES DANS LES SUBCARPATES ROUMAINES

par **Mircea D. Ilie**

A l'extérieur de la zone de flysch paléogène, se développe le long de nos Carpates la « zone subcarpatique » qui — du fait qu'elle est formée par des dépôts néogènes — porte aussi le nom de « zone néogène ».

La présence de massifs de sel, d'importance variable mais très constants et dont on connaît le rôle dans la formation des plis diapirs, a fait parfois donner à cette zone le nom de « zone des plis diapirs ».

Quelque soit l'opportunité de ce terme, parfait d'ailleurs en lui-même et consacré par un long usage, il n'est pas moins vrai que la question a pris un sens que l'observation ne justifie pas toujours. Il y a en effet des cas où le rôle tectonique attribué aux massifs de sel a été largement surestimé.

Dans les Subcarpates, ce qui attire du premier abord l'attention, c'est la disharmonie dans l'arrangement des masses sédimentaires; c'est ce qui constitue le caractère essentiel d'un pli diapire. On y remarque aussi très fréquemment des manifestations salines, qui sont un deuxième trait caractéristique des diapires.

Il arrive cependant que, le noyau de sel lui-même aussi la disharmonie qu'il provoque dans les couches avec lesquelles il arrive en contact, sont des faits sans doute très rarement observables d'une manière directe. Très souvent, en effet, la présence du noyau de sel est déduite de celle de minces lames de sel sans importance; plus souvent le critérium en est constitué par les sources salées, voire même par l'existence d'efflorescences salines. C'est ce qui explique toute une série d'interprétations erronées que l'on trouve dans la bibliographie actuelle relative à la structure de la zone néogène.

Il est évident que les noyaux de sel, dans leur ascension vers la surface, peuvent se déplacer suivant la normale, ou alors obliquement. Il en résultera pour ces massifs des formes essentiellement variables. correlativement d'une variété quasi-infinie dans les structures qui les environnent immédiatement. On comprend dans ces conditions l'avantage des interprétations partant de l'idée de diapirisme: elles pourront en effet rendre compte de toute complexité d'ordre structural. C'est au point que, les derniers temps, vu la commodité de son emploi, la formule offerte par le diapirisme a été envisagée pour interpréter les contacts anormaux si souvent montrés par les calcaires mésozoïques.

Les excursions de recherches, que nous avons eu l'occasion de faire ces derniers temps dans nos Subcarpates nous ont assez convaincu du véritable abus commis avec ces dernières interprétations. Elle nous ont en même temps fourni une série de données montrant que, même dans les Subcarpates, les phénomènes de diapirisme ne peut servir d'une manière bien efficace à expliquer sans reste tous les phénomènes tectoniques qui s'y présentent.

Une première constatation à faire est relative à la disharmonie des couches. Ce caractère essentiel des plis diapirs, la disharmonie, est très répandu en effet dans la zone néogène; mais il est en même temps à remarquer le fait suivant, dont l'importance ne peut échapper: dans le phénomène de diapirisme, sous sa forme classique, la disharmonie est plus accentuée pour les couches inférieures, au contact direct des des massifs de sel et s'efface de plus en plus à mesure que l'on monte dans la série des dépôts. Or, nous avons pu nous assurer maintes fois au cours de nos recherches que, les dépôts qui, dans les parties plus profondes, constituent, p. ex., un large synclinal, montrent dans les zones superficielles des déformations accentuées, qu'on ne pouvait soupçonner à l'intérieur d'un simple synclinal.

Il en résulte donc que la disharmonie spécifiée se présente dans des conditions inverses par rapport à celle du diapirisme classique; dans notre cas, les couches supérieures sont justement les plus disloquées, tandis que vers la base les dépôts se montrent de moins en moins dérangés.

La structure disharmonique accusée des couches supérieures, ne pourrait être expliquée — conformément au mode actuel d'interprétation — que comme le résultat d'un diapirisme inverse, de haut en bas; or, ceci n'est pas admissible dans les conditions géologiques bien connues de tous.

Une deuxième constatation concernant l'interprétation de la structure de la zone néogène — dans les endroits à dépôts superficiels

plus déformés que les profonds — c'est l'absence en surface, aussi bien de masses de sel, que de sources salées et d'efflorescences salines.

Vu que l'idée de diapirisme, si fréquemment employée du fait de sa commodité, ne saurait être utilement envisagée dans les cas spécifiés ici, nous essayerons de dégager une nouvelle interprétation de ces phénomènes. Dans ce but, nous analyserons d'abord les caractères des différentes déformations tectoniques, puis nous chercherons à nous rendre compte du mécanisme de leur formation.

Les déformations importantes rencontrées dans la zone néogène peuvent être groupées de la manière suivante: *plis disharmoniques*, *lignes de flexure* et *plis déversés*.

1. **Plis disharmoniques.** Il s'agit de déformations tectoniques ayant lieu dans les couches supérieures des masses mobiles de sédiments. Elles se caractérisent avant tout par l'abaissement de l'intensité du plissement avec la profondeur. On peut étudier cette sorte de plis dans les sédiments pliocènes au S de la ligne de dislocation *Scăioşi-Nistoreşti-Vâlcăneşti*, considérés jusqu'à présent comme le remplissage d'un simple synclinal. Nous avons eu l'occasion de déchiffrer ici les éléments composants de deux plis, à flancs fortement inclinés, et qui se trouvent bien développés entre la vallée du *Teleajen* et celle du *Verbilău*.

En poursuivant ces accidents vers le W, on constate leur disparition progressive, due au fait que nous nous trouvons ici dans un compartiment plus profond. Disparition aussi à l'E du *Teleajen*, causée cette fois par l'élévation axiale des plis. On y distingue uniquement les flancs d'un seul anticlinal, ainsi qu'il est figuré sur toutes les cartes géologiques.

Pour expliquer le mode de formation de ces plis disharmoniques, il n'est pas indiqué de nous croire dans le cas d'un edifice orogénique résultant de pressions tangentielles exercées par les blocs qui enserrent les dépôts d'un géosynclinal. L'idée de diapirisme est elle-même exclue, du fait du comportement tectonique inverse des dépôts interessés.

A notre avis, la disharmonie spécifiée est née au cours d'un déplacement, sous l'influence de la pesanteur, des masses sédimentaires à la surface d'un substratum plastique. La différence de vitesse dans le déplacement de ces masses sédimentaires d'une part; de l'autre, l'inhomogénéité de ces masses en voie de se déplacer, ont contribué dans la plus large mesure à déterminer cette disharmonie.

Le manque d'homogénéité, dans le sens de la nature des couches constituant ces masses de sédiments, a déterminé la naissance de zones où les sédiments s'écoulaient plus lentement, et de zones où le déplacement était plus rapide. Cela sans oublier que la pente du déplacement

a joué aussi un rôle très important. Les couches plus profondes ont donc pu se mouvoir plus lentement, se déformer moins et être dépassées dans ce mouvement par les couches supérieures, où le flux de matériel est arrivé à former des plis.

Les plis disharmoniques se sont constitués graduellement, la disharmonie étant plus réduite vers le N, vers le montagne, et s'accentuant à mesure qu'on approche la plaine roumaine. Cette graduation dans l'intensité du plissement peut être aussi mise en connexion avec la profondeur du tréfonds rigide; il est naturel en effet de penser que le déplacement soit plus réduit à mesure que ce voisinage augmente.

Dans le cas des Subcarpates, le rôle de tréfonds rigide est joué par le Paléogène, dont on trouve des blocs de dimensions variables arrachés et englobés dans la masse néogène. La position curieuse de ces blocs paléogènes par rapport aux roches voisines a déterminé les auteurs à les considérer comme de véritables klippes, ce qui a donné lieu à maintes discussions contradictoires.

2. **Lignes de flexure.** Dans la zone néogène, on rencontre d'une manière habituelle aussi des laminages de couches plus ou moins évidents. Ces laminages ont des intensités variées, pouvant arriver à déterminer l'apparition de discontinuités importantes à l'intérieur des masses en voie de déplacement. Pour ces sortes de discontinuités, le terme de « *ligne de dislocation* » est assez indiqué. On peut aussi employer, le cas échéant, le terme de « *ligne de flexure* », en évitant toutefois celui de « *ligne de fracture* », qui rappelle des ruptures profondes dans les roches; cela d'autant plus que, dans les cas dont il est question ici, le fait de déformation tectonique est superficiel. De telles lignes de flexure marquent habituellement le contact entre les dépôts miocène et les dépôts pliocènes, et peuvent s'étendre parfois sur des distances de plusieurs dixaines de kilomètres.

En suivant sur le terrain ces lignes de flexure, nous constatons de suite leur caractère superficiel; on s'apperçoit facilement qu'elles présentent — vers les extrêmités — des retours à la position normale.

Les phénomènes de laminage, assez répandus dans la zone néogène peuvent être expliqués par l'apport plus marqué de matériel à la limite de deux zones, dont les sédiments se déplacent avec des vitesses inégales.

3. **Plis déversés.** Ces plis résultent d'un déplacement plus accusé des masses sédimentaires en mouvement; car, le phénomène est connu qu'un plis, à inclinaison vers le S, p. ex., dans sa partie inférieure, montre une tendance à se coucher vers le S dans sa partie supérieure.

Les plis déversés sont connu dans l'entière zone néogène. Ils offrent une ampleur particulière aux approches de la limite de la plaine roumaine, comme aussi dans le voisinage des éperons paléogènes (*Văleni*, *Homorâciu*).

Le maximum d'intensité atteint au voisinage de la plaine s'explique par le fait que les masses en mouvement ont pu s'écouler ici plus librement, sans rencontrer de grandes résistances.

La présence de plis déversés s'observe aussi chez les dépôts paléogènes. Dans ce cas, les déversements ont un double sens: à savoir, que dans le flanc sud de l'éperon de *Văleni*, p. ex., les plis offrent des plongements vers le N, tandis que, dans le flancs nord ils s'inclinent vers le S. Ce cas de déversement à double sens a autrefois conduit à l'idée que l'éperon en question représenterait un reste de nappe de charriage.

Les déversements de plis ont occasionné des difficultés dans les régions caractérisées par la présence d'une structure en nappes; cela, en ce qui concerne l'établissement du sens du charriage, comme aussi dans la spécification des éléments de ces nappes. Les déversements gardent cependant de l'uniformité sur de grandes distances, ce qui n'arrive pas dans les cas des structures en nappes.

Pour ce qui regarde l'éperon de Văleni, nous sommes d'avis qu'il n'est pas question ici d'une nappe de second ordre, et cela du fait que les éléments d'une telle unité tectonique sont absents. Nous croyons bien plutôt être en présence de simples déversements des plis dans des sens opposés.

Si, à présent, nous analysons les plis déversés dans le sens longitudinal, nous observons qu'un plis donné, déjetté vers le S p. ex., peut montrer après un certain parcours un redressement graduel du plan axial, après quoi le déversement a lieu vers le N.

Mais cette variation dans le sens du déversement peut être observée — dans le cas d'affleurements propices, sur de grandes hauteurs — sur place, ou peut s'en faut. Ainsi, p. ex. un pli déversé vers le S à sa partie inférieure, peut présenter dans sa partie supérieure la tendance de se coucher vers le N.

En arrêtant, avec ces remarques, la description des déformations les plus notables, observables dans la zone subcarpatique, occupons-nous à présent de la question de leur mécanisme.

Ce mécanisme ne peut, à notre avis, être envisagé que dans l'écoulement des masses sédimentaires, à la surface d'un tréfonds rigide et compartimenté.

Le déplacement de cette masse mobile a eu lieu sous l'influence exclusive de la pesanteur. Grâce à celle-ci, les sédiments recouvrant un compartiment plus élevé ont glissé vers les compartiments voisins, à situation inférieure.

Si les phénomènes de *disharmonie tectonique* sont localisés à la partie supérieure des dépôts en mouvement, cela ne saurait surprendre: c'est en effet justement l'endroit où les frictions sur le fond ne peuvent intervenir, ni les pressions exercées par les masses surincombantes.

Les masses mobiles, habituellement hétérogènes, se déplacent d'une manière peu uniforme, aussi bien en surface qu'à leur intérieur. La disharmonie du plissement résulte des vitesses différentes du déplacement.

Dans le cas où la différence de vitesse est accrue dans une certaine zone, des charriages embryonnaires peuvent naître; mais ceux-ci n'arrivent jamais à avoir l'ampleur d'une nappe de second ordre.

A la limite de deux compartiments fortement dénivellés, des *flexures* ou des *laminages* plus ou moins accentuées peuvent apparaître, du fait de l'afflux plus accusé de matériel. Ces accidents ne représentent pas des interruptions profondes dans la masse des sédiments, dans le sens des lignes de fractures; ce sont des discontinuités superficielles.

Les *déversements* sont des déformations qui ont parfois occasionné des interprétations en nappes. Ils arrivent à se présenter dans certains cas avec un sens inverse par rapport au mouvement général; ils ont imprimé de ce fait aux diverses régions où ils existent des aspects qui ont été parfois pris par les auteurs pour la marque de véritables phénomènes de charriage.

Les plis disharmoniques, les flexures, les plis déversés sont, à notre avis, dus à de simples phénomènes d'entraînement des masses sédimentaires dans des sens variés, en rapport avec le tréfond rigide et compartimenté. Ces déformations offrent un aspect aérodynamique si on les analyse sur les profils, ou dans le sens longitudinal. C'est ce fait qui a déterminé certains auteurs à les considérer comme des manifestations liées aux phénomènes de diapirisme.

DIE BISHER AUS DER DOBROGEA BEKANNT GEWORDENEN *LECANORACEEN*

von **Paul Cretzoiu**

Die so ausserordentlich verbreitete und artenreiche Flechtenfamilie *Lecanoraceae* hat nur wenige Vertreter in der Dobrogea. Um so sind diese aber im Gebiete interessanter, da darunter auch einige für dieses Landstrich endemische Arten sowie einige seltene zu finden sind.

Es sind bisher aus der Familie der Lecanoraceae für Dobrogea folgende Gattungen festgestellt:

1. *Lecanora*, mit 10 Arten.
2. *Lecania*, mit 1 Art und
3. *Solenopsora*, mit 1 Art.

Weitere Forschungen werden gewiss die Anzahl der Arten und vielleicht auch der Gattungen erhöhen; ich lasse hier aber das was bisher aus dem Gebiete bekannt geworden ist folgen. Die Belege dazu befinden sich fast ausschliesslich in den Sammlungen des *Botanischen Laboratoriums der Forstlichen Fakultät*; einige Belege (*Lecanora Agardhiana* und *L. nigrimaris*) hat mir in freundlicher Weise Herr Dr. M. Vlădescu (Bot. Inst. d. Universität Bukarest) zur Verfügung gestellt, wofür ich ihm auch hier danken will.

Lecanora (*Ach.*) *Th. Fr.*, in Nova Acta R. Soc. Sc. Upsal. 3/III, 1861, p. 199.

Lecanora Agardhiana Ach., Synops. Lich. 1814, p. 152.

Distr. Caliacra: Capul-Caliacra, am oberem Rande des steilen Abhanges, cca 80 m Höhe ü.M., zusammen mit Verrucaria macrostoma, Caloplaca pyracea, C. lactea und Lecanora calcarea (P. Cretzoiu, in *Rev. St.* V. Adamachi, XXI, 1935, p. 123, fig. 1). — Distr. Durostor: im Walde Ghiurlerchioi zwischen Silistra und Curtbunar (leg. P. Cretzoiu). — Distr.

Tulcea: Heraclea-Höhe bei Enisala (leg. M. Vlădescu, in herb. Inst. Bot. București).

Alle hier angeführten Belege sind kalkbewohnend.

Diese leicht kennbare Art wird hier als Habitusbild und Apotheziumdurchschnitt figuriert (Fig. 2—3).

Ausser den genannten Fundorte in der Dobrogea ist die Art im Lande noch aus Bezirk Putna (Sovejanca) und Brașov (Tâmpa) bekannt. Die Verbreitung in Rumänien ist hier in der Abb. 4 kartiert.

Fig. 1. — Kap Caliacra, Ansicht nach S.: auf Kalkfelsen oberhalb des Ficus carica-Gesträuches, Fundorte der *Lecanora Agardhiana*, *L. albescens* und *L. calcarea*, in Gesellschaft mit *Candelariella aurella* (Hoffm.) A. Zahlbr., *Verrurcaria minuta* (Hepp) Zschacke, *Verrucaria confluens* Mass., *Verrucaria macrostoma* Duf., *Caloplaca pyracea* (Ach.) Th. Fr., *Caloplaca callopisma* (Ach.) Th. Fr.

Lecanora albescens (*Hoffm.*) *Flk.*, apud Fw., in *Flora* XI, 1828, p. 633.

Distr. Caliacra: auf Kalkfelsen am Kap Caliacra nahe des Meeresufers (P. Cretzoiu, in *Rev. St.* V. Adamachi XXI, 1935, p. 123).

Lecanora calcarea (*L.*) *Sommft.*, Suppl. Fl. Lapp. 1826, p. 102.

Distr. Tulcea: Heraclea-Höhe bei Enissala, auf Kalkfelsen (leg. P. Cretzoiu). — Distr. Caliacra: Kap Caliacra, nahe des Meeresufers auf Kalk bei cca 40—50 m Höhe ü.d.M. (leg. P. Cretzoiu).

Die Sporen dieser Art sind infolge gegenseitegem Drucke nicht immer kugelig, sondern eckig (Fig. 5).

Auf Kalkfelsen im Lande sonst verbreitet aber nicht häufig. *var. concreta Hepp*, Flecht. Europ. 1860, No. 627.

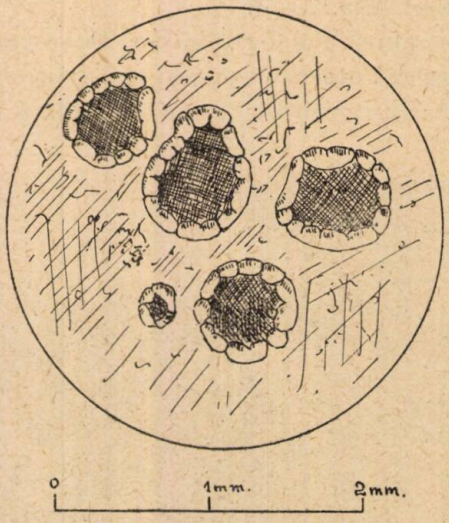


Fig. 2. — *Lecanora Agardhiana* Ach.: Habitusbild mit Apothezien.

Distr. Caliacra: auf Kalkfelsen bei Ghiaursuiuciuc, oberhalb des Meeresufers, cca 70 m H.ü.d.M. (leg. P. Cretzoiu).

Lecanora cavarnensis Cretz., in *Verh. u. Mitteil. d. Siebenbürg. Ver. f. Naturwiss.*, Sibiu 1940, p. 242.

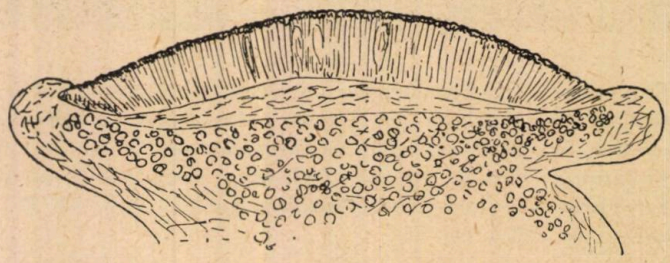


Fig. 3. — *Lecanora Agardhiana* Ach.: Schnitt durch Apothezium.

Distr. Caliacra: bei Cavarna auf Ziegeln (leg. P. Cretzoiu).

Lecanora cervinocuprea (*Arn.*) *Mig.*, Fl. v. Deutschl. XII/1, 1926, p. 233.

Distr. Tulcea: auf Felsen am Kloster Cocoș, südlich von Isaccea (leg. P. Cretzoiu).

Lecanora crassa Ach., Lich. Univ. 1810, p. 413.

Distr. Caliacra: bei Kap Caliacra in Kalkfelsritzen, 20—40 m H.ü.d.M. (leg. P. Cretzoiu).

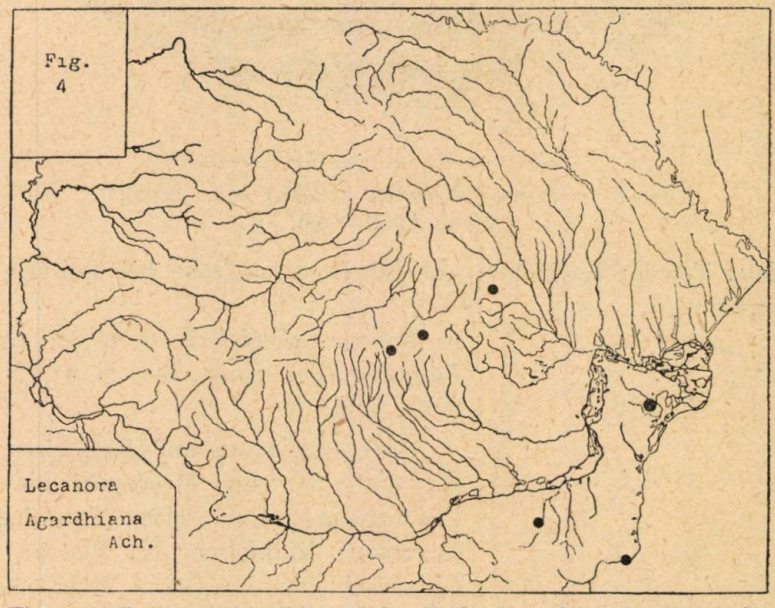


Fig. 4. — *Lecanora Agardhiana* Ach.: Verbreitungskarte für Rumänien.

Lecanora frustulosa (*Dicks.*) *Ach.*, Lich. Univ. 1810, p. 405.

Distr. Tulcea: am Felsen bei Kloster Cocoș südlich von Isaccea (leg. P. Cretzoiu).

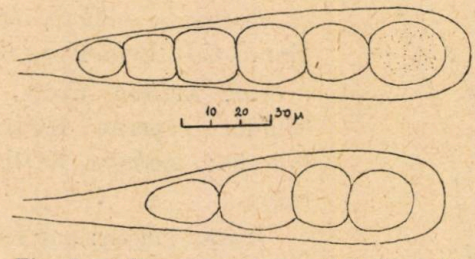


Fig. 5. — *Lecanora calcarea* (L.) Sommft.: Schläuche mit Sporen.

Diese sonst im Lande nur noch aus Bezirk Hunedoara, Prahova und Severin bekannt gewordene Art, wird hier in der Fig. 6—7 abgebildet (Apotheziumdurchschnitt und Schlauch mit Sporen).

Lecanora muralis (*Schreb.*) *Rabh.*, Deutsch. Krypt.-Fl., II, 1845, p. 42.
var. vulgare Koerb., Syst. Lich. Germ. 1855, p. 115.

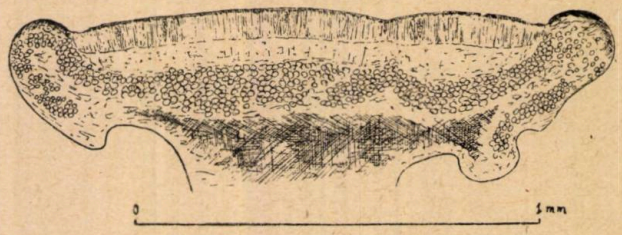


Fig. 6. — *Lecanora frustulosa* (Dicks.) Ach.: Schnitt durch Apothezium.

Distr. Tulcea: Kalkfelsen auf der Heraclea-Höhe bei Enisala (leg. P. Cretzoiu).

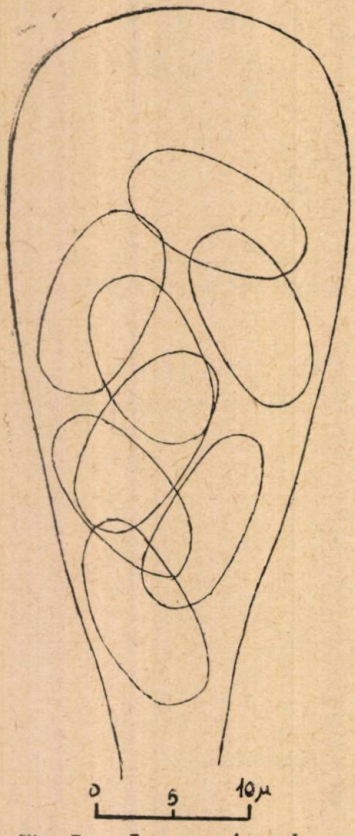


Fig. 7. — *Lecanora frustulosa* (Dicks.) Ach.: Schlauch mit Sporen.

Lecanora nigrimaris Cretz., in *Acta p. Fauna et Flora Univ.*, Ser. II, II/12—13, 1937, p. 4.

Distr. Caliacra: auf Kalkfelsen bei Kap Caliacra, vom Meeresufer bis zum Leuchtturm und zum altem Tore (leg. P. Cretzoiu; Kalkfelsen des Plateaus bei Ghiaursuiuciuc, 50—70 m Höhe ü.d.M. (leg. P. Cretzoiu). Distr. Tulcea: Kalkfelsen am Berge Consul (leg. M. Vlădescu, in Herb. Inst. Bot. București).

Diese bisher nur aus der Dobrogea bekannte Art, figuriere ich hier zum ersten Male (Fig. 8—10).

Lecanora radiosa (*Hoffm.*) *Schaer.*, Enum. Crit. Lich. Eur., 1850, p. 61.

var. radiosa Cretz., mom. nov. — Thallus superne KOH + demum rubescens; medulla KOH + flava deinde rubra.

Distr. Tulcea: auf Felsen bei Kloster Cocoș, südlich von Isaccea (leg. P. Cretzoiu).

Lecania (*Mass.*) *A. Zahlbr.*, in Engler et Prantl, Die natürl. Pflanzenfam. I/1, 1907, p. 204.

Lecania syringea (*Ach.*) *Th. Fr.*, Lich. Scand. I, 1871, p. 290.

Distr. Tulcea: im Walde Letea in der Donau-Delta, auf Eichenrinde (P. Cretzoiu, Contr. Fl. Lich. Rom., 1931, p. 7).

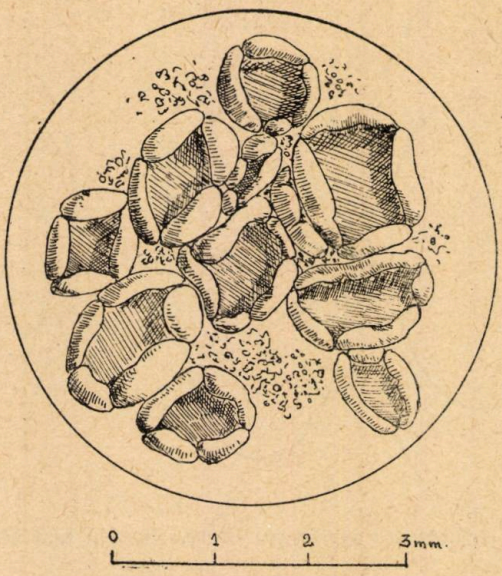


Fig. 8. — *Lecanora nigrimaris* Cretz.: Habitusbild mit Apothezien.

Solenopsora Mass., Framm. Lich. 1855, p. 20.

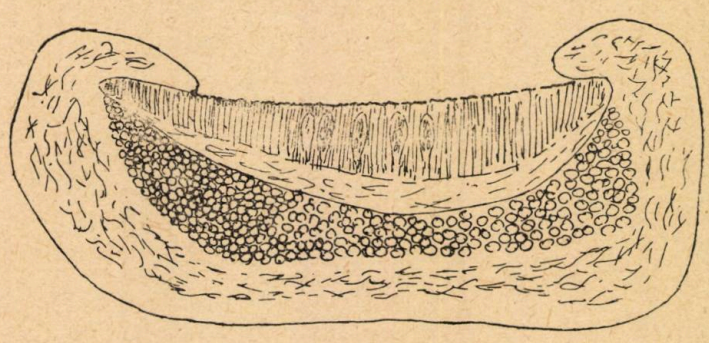


Fig. 9. — *Lecanora nigrimaris* Cretz.: Schnitt durch Apothezium.

Solenopsora caliacrae Cretz., in *Verh. u. Mitteil. d. Siebenbürg. Ver. f. Naturwiss.*, Sibiu 1940, p. 243.

Distr. Caliacra: auf den Kalkfelsen des Kap Caliacra, S-W-Exp., cca 50 m Höhe ü.d.M. (leg. P. Cretzoiu).

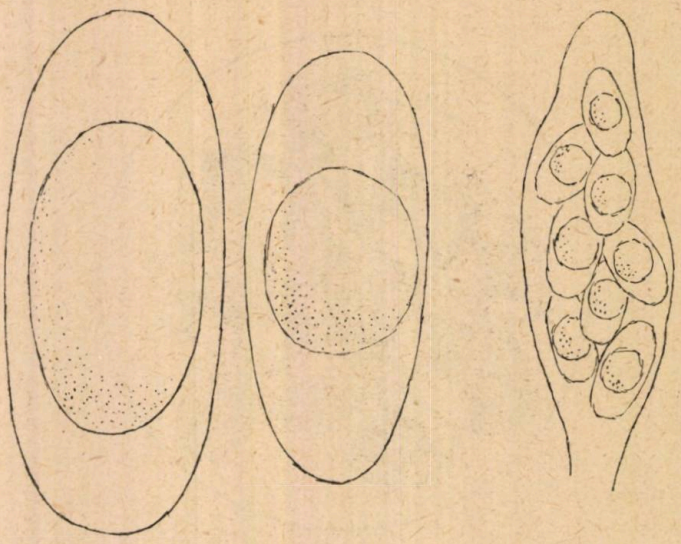


Fig. 10. — *Lecanora nigrimaris* Cretz.: Sporen und Schlauch.

Eine bisher nur aus dem Locus classicus bekannte Art.

ZUR KENNTNIS DER EICHENFORMEN DES BEZIRKES VLAŞCA IN DER WALACHEI

von C. C. Georgescu, P. Cretzoiu und I. Lupe

Das hier behandelte Material wurde von I. Lupe im Herbst 1938 aus dem Vorsteppengebiete südlich vom Glavacioc und Câlnicea (Bezirk Vlaşca) gesammelt; es wird im Herbarium der Forstlichen Versuchsanstalt Bukarest und im Herbarium der Forstlichen Fakultät Bukarest aufbewahrt.

1. *Quercus corcyrensis* A. Camus, Les Chênes, Atlas, Tome II, Expl. d. Pl., Paris 1936, p. 59 et Pl. 162, fig. 8—11. (= *Quercus pendunculiflora* × *Quercus pubescens*).

Distr. Vlaşca: im Walde Ogarca, zusammen mit den Eltern.

Unsere Exemplare passen gut zu den Abbildungen die A. Camus, *l. c.*, wiedergiebt.

Zweige kahl oder nur sehr spärlich mit einzelstehenden Haaren versehen. Blätter mittelgross, derb, mit 10—16 mm langen, kahlen oder sehr spärlich behaarten Stielen. Blattspreite 7—10 cm lang, 4—6,5 cm breit, eiförmig bis breit-eiförmig, an der Basis abgerundet, unregelmässig seicht fiederlappig, mit breiten, meist spitzlichen, ganzrandigen, nur selten wiederum gelappten Abschnitten und offenen Buchten. 4—5 Lappenpaare. Blätter oberseits kahl, unterseits pedunculiflora-ähnlich behaart. Knospen breit-eiförmig, bis 5 mm lang und 4 mm dick.

Durch die Blattstiellänge, die allgemeine Blattform und Lappungsart erinnert dieser Mischling an *Quercus pubescens*, während sie sich durch Kahlheit der Zweige und die Behaarungsart der Unterseite der Spreite an *Quercus pedunculiflora* nähert.

Diese hybride Art ist für die Flora Rumäniens neu.

2. *Quercus pubescens Willd. subsp. lanuginosa* (*Lam.*) *Schwz. var. lanuginosa* (*Lam.*) *Schwz. f. pubescens* (*Loud.*) *Schwz.*, Monogr. d. Eichen,

1937, p. 170. — *Quercus sessiliflora* 2. *pubescens* Loud., Arb. Brit., III, 1838, p. 1736.

Distr. Vlașca: im Walde Ogarca.

3. *Quercus Virgiliana Ten. var. Tenorei* (*DC.*). *Schwz. f. typica* (*Posp.*) *Schwz.*, l. c. 1937, p. 160. — *Quercus croatica* α typica Posp., Fl. Oest. Küst. I, 1897, p. 320.

Distr. Vlașca: im Walde Ogarca.

f. brachyphylloides (*Vuk.*) *Schwz.*, l. c. 1937, p. 160. — *Quercus brachyphylloides* Vuk., Rad. jugosl. Ak., LI, 1880, p. 19.

Distr. Vlașca: im Walde Ogarca.

4. *Quercus pedunculiflora* K. Koch, *var. atrichoclados* (*Borb. et Bornm.*) *Schwz.*, *f. typica Schwz. subf. obtusiloba Schwz.*, l. c., 1937, p. 114.

Distr. Vlașca: in den Wälder Comoara, Dandara, Teșila, Ruica-Buciumeni und Ogarca.

subf. goniolobula (*Borb.*) *Schwz.*, l. c. 1937, p. 114.—*Quercus pedunculiflora var. goniolobula Borb.*, in Beih. Bot. Centralbl. XXIX, 1891, p. 121.

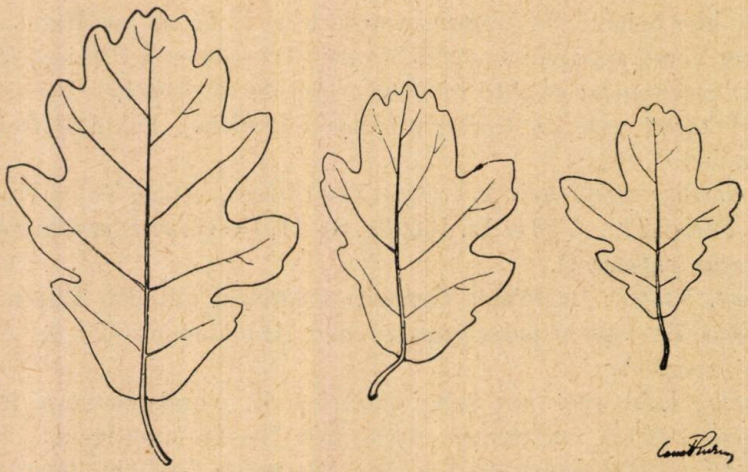


Fig. 1. — *Quercus corcyrensis* A. Camus, Blattformen, ½.

Distr. Vlașca: im Walde Comăneasca und Ruica-Buciumeni.

f. Borzae C. Georg. et Cretz., nov. f. — Folia usque 19 cm (rarius — 20 cm) longa, profunde pinnatiloba.

subf. frainettoides C. Georg. et Cretz., nov. subf. — Foliorum lobi rotundati vel obtusati, 2-3-lobulati.

Distr. Vlașca: zwischen Naipu und Drăgănești; in den Wäldern Comoara, Comăneasca und Ogarca.

subf. simplex C. Georg. et Cretz., nov. subf. — Foliorum lobi integri, rotundati vel obtusati.

Distr. Vlașca: in den Wäldern Dandara, Teșila und Ogarca.

f. maxima C. Georg. et Cretz., in *Bul. Grăd. Bot. Muz. Bot. Cluj*, XXI, 1941, p. 102.

Distr. Vlașca: zwischen Naipu und Drăgănești; in den Wäldern Comoara, Dandara und Teșila.

Fig. 2. — *Quercus corcyrensis* A. CAMUS. Blattformen auf dem selben Zweige wie Fig. 1. ½.

Blätter gross, 16—26 (oder auch mehr) cm lang und bis 20 cm breit. Fruchtbecher sehr dickwandig, bis 27 mm in Durchmesser, Eichel bis 4 cm lang und 1,8 cm dick (Fig. 3).

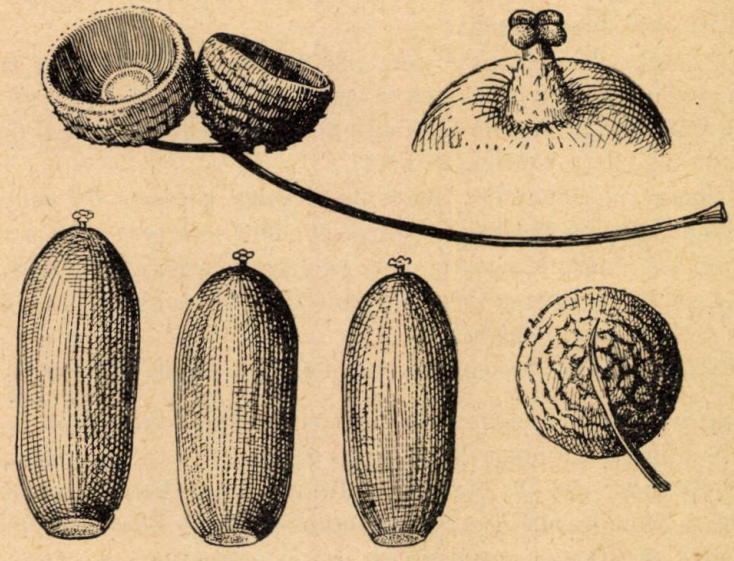


Fig. 3. — *Quercus penduculiflora v. atrichoclados f. maxima* C. GEORG et CRETZ. Fruchtbecher, Eicheln (1/1) und Narbe (vergrössert).

5. *Quercus robur L. subsp. pendunculata DC. var. glabra* (*Godr.*) *Schwz. f. vulgaris* (*DC.*) *Schwz.*, l. ., 1937, p. 105. — *Quercus robur ssp. pendunculata α vulgaris DC.*, Prodr. XVI/2, 1864, p. 4.

Distr. Vlașca: im Walde Slătioara.

RÉSISTANCE DES CONSTRUCTIONS CHARGÉES AU DELÀ DES PRÉVISIONS RÉGLEMENTAIRES

par **Cristea Mateescu**

On classifie les charges en: permanentes (g), mobiles (p_1) et accidentelles (p_2). Tandis que les charges permanentes — résultant des poids propres et des poids morts, — peuvent être connues avec exactitude, les charges mobiles et les charges accidentelles ont une variabilité beaucoup plus grande.

Les charges mobiles (qui sont souvent les charges utiles mêmes) ont un caractère conventionnel et elles sont dépassées pratiquement dans de limites assez larges. (Par ex.: les charges des véhicules de toute sorte ont augmenté continuellement).

Les charges accidentelles (poids de la neige, pression du vent, etc.), prévues par les prescriptions, ne correspondent non plus à leurs valeurs maximum maximorum, parce que ces valeurs maxima sont extrêmement rares, et en les admettant comme générales, les constructions deviendraient excesivement chères.

Nous dénommons les charges mobiles (p_1) et les charges accidentelles (p_2) par une seule expression: *charges additionnelles* ($\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$). Il serait utile d'examiner la résistance des différentes constructions dans l'hypothèse que les charges additionnelles réelles dépassent d'une quantité notable les charges réglementaires. Nous allons voir que pour les mêmes résistances admissibles, les constructions se comportent d'une manière très différente d'une construction à l'autre, si les charges additionnelles dépassent les valeurs réglementaires.

Quand les charges additionnelles (p) sont éventuellement dépassées, nous les considérons multipliées par un coefficient $\zeta > 1$, tel que les charges additionnelles réelles seront ζp.

Presque toutes les prescriptions prévoient deux cas de chargement:

a) On charge la construction du poids utile (p_1) et l'on demande qu'une certaine résistance admissible σ_1 ne soit pas dépassée;

b) On charge la construction du poids utile (p_1) et de la charge accidentelle (p_2) et l'on demande qu'une autre résistance admissible $\sigma_2 > \sigma_1$, ne soit pas, elle-aussi dépassée.

D'autre part, il est utile que les constructions soient dimensionnées de manière que, — si grandes que soient les charges extérieures, — les contraintes des matériaux ne dépassent la limite des grandes déformations permanentes, que nous désignerons σ_s.

Nous aurons donc à calculer une construction dans les trois hypothèses avec les trois résistances admissibles suivantes:

$$\begin{array}{ccccccccc} \vec{g} & + & \vec{p}_1 & < & \vec{g} & + & \vec{p}_1 & + & \vec{p}_2 \\ \sigma_1 & & & < & & & \sigma_2 & & \end{array} = \vec{g} + \vec{p} < \vec{g} + \zeta \vec{p} \quad ; \quad (\zeta > 1).$$

$$< \sigma_s$$

Dans la troisième hypothèse nous calculerons le coefficient ζ correspondant à la résistance σ_s. C'est suivant ce critérium que nous examinerons les suivantes constructions. Dans tout ce qui suit, nous emploierons des coefficients de sécurité ν rapportés à la résistance σ_s, non à la charge de rupture, donc $\nu = \sigma_1/\sigma_s$ ou σ_2/σ_s.

Nous n'examinerons pas dans cet article les questions concernant la résistance des matériaux dans le domaine de la plasticité.

A. CONSTRUCTIONS AUXQUELLES ON PEUT APPLIQUER LA SUPERPOSITION DES EFFETS

1. **Poutres, non soumises aux charges accidentelles** p_2.

On dimensionne la poutre suivant l'hypothèse $g + p_1$, avec la résistance σ_1:

$$\sigma_1 = K_1 (g + p_1) l^2 = K (g + p_1).$$

Dans l'hypothèse $g + \zeta p_1$, la résistance doit être σ_s, donc:

$$\sigma_s = K_1 (g + \zeta p_1) l^2 = K (g + \zeta p_1).$$

Nous en déduisons, avec $\nu = \sigma_s/\sigma_1$:

$$(1) \qquad \zeta = \nu + \frac{g}{p_1} (\nu - 1).$$

2. **Arcs.** (Contraintes dûes à la poussée H).

Nous avons, si l est la portée et f la flèche de l'arc:

$$H = K_1 (g + p) \frac{l^2}{f} \quad ; \quad \sigma_1 = K (g + p) \quad ; \quad \sigma_s = K (g + \zeta p).$$

Le coefficient ζ s'exprime donc par la même formule (1).

3. **Compression excentrique, à excentricité fixe.**

Soit une section rectangulaire $b \times d$; la force concentrée P, excentrique, dans un plan diamétral; l'excentricité e; G le poids au centre de gravité.

Les contraintes de la maçonnerie sont calculées suivant les formules:

Si $e < \frac{d}{6}$; $\sigma_1 = \frac{G + P}{bd}\left(1 \pm \frac{6e}{d}\right)$;

$$\sigma_s = \frac{G + \zeta P}{bd}\left(1 \pm \frac{6e}{d}\right);$$

Si $e > \frac{d}{6}$; $\sigma_1 = \frac{2}{3}\frac{(G + P)}{\left(\frac{d}{2} - e\right)}$;

$$\sigma_s = \frac{2}{3}\frac{(G + \zeta P)}{\left(\frac{d}{2} - e\right)}.$$

Les expressions de σ_1, σ_s, sont de la même forme que plus haut, donc la formule (1) est toujours applicable.

Remarque. L'expression (1) de ζ démontre que la surchargeabilité de la construction n'est pas mesurée par le coefficient de sécurité ν, mais par le coefficient ζ, qui dépend, en dehors de ν, du rapport $\frac{g}{p_1} = C$ aussi, rapport qu'on peut regarder comme une sorte de coefficient de stabilité.

Étude numérique.

Soit: $\sigma_1 = 1.200$ Kg/cm² ; $\sigma_s = 2.000$ Kg/cm² ; $\nu = 1{,}667$

$C = g/p_1$	0	0,5	1,0	2,0
ζ	1,667	2,000	2,333	3,000

Nous voyons que la résistance σ_s est atteinte pour des surcharges d'autant plus grandes que le rapport du poids propre par rapport aux charges mobiles est plus grand aussi (par ex., les poutres de grandes portées seront plus résistantes que les poutres de petites portées, plus légères par rapport au poids utile).

4. **Pylône soumis à une charge permanente G et à la pression du vent, ou à une traction au sommet, P horizontale.**

Si le pylône est en treillis, la contrainte d'une pièce AB est à un facteur près:

$$\sigma_2 = \frac{K_1 G}{2\Omega} + K_1 \frac{Ph}{a\Omega};$$

$$\sigma_s = \frac{K_1 G}{2\Omega} + \zeta K_1 \frac{Ph}{a\Omega}.$$

(2) $$\zeta = \nu + \frac{Ga}{2Ph}(\nu - 1).$$

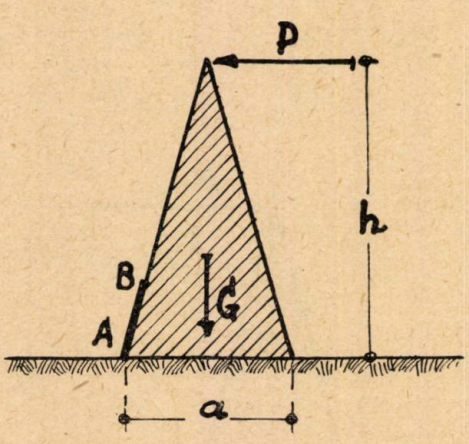


Fig. 1.

5. **Poutre soumise à la pression du vent p Kg/m l., perpendiculairement à la charge propre g Kg/m l.**

Si la poutre est en bois ou en métal, la contrainte maxima est:

$$\sigma_2 = K_1 \frac{gl^2}{W_x} + K_2 \frac{pl^2}{W_y};$$

$$\sigma_s = K_1 \frac{gl^2}{W_x} + K_2 \zeta \frac{pl^2}{W_y}.$$

Nous en déduisons:

(3) $$\zeta = \nu + \frac{K_1}{K_2} \cdot \frac{W_y}{W_x} \cdot \frac{g}{p}(\nu - 1).$$

Remarque. On voit des exemples 4 et 5 que ζ est toujours fonction de ν et d'une expression qu'on pourrait appeler coefficient de stabilité.

Ce coefficient a exactement la même importance que le rapport g/p dans les premiers trois exemples et nous ne répétons plus d'application numérique.

B. CONSTRUCTIONS AUXQUELLES LA LOI DE LA SUPERPOSITION DES EFFETS NE PEUT PAS ÊTRE APPLIQUÉE

1. **Fondation d'un pylône soumis à une charge permanente G appliquée au centre de gravité de la surface de la base et à une traction horizontale, P, au sommet.**

Si l'excentricité $e > \frac{d}{6}$, les pressions maxima au terrain sont:

$$\sigma_2 = \frac{2G}{3b\left(\frac{d}{2} - e_2\right)} \quad ; \quad \sigma_s = \frac{2G}{3b\left(\frac{d}{2} - e_s\right)} \; ;$$

$$e_2 = \frac{Ph}{G} \; ; \qquad e_s = \zeta \frac{Ph}{G} .$$

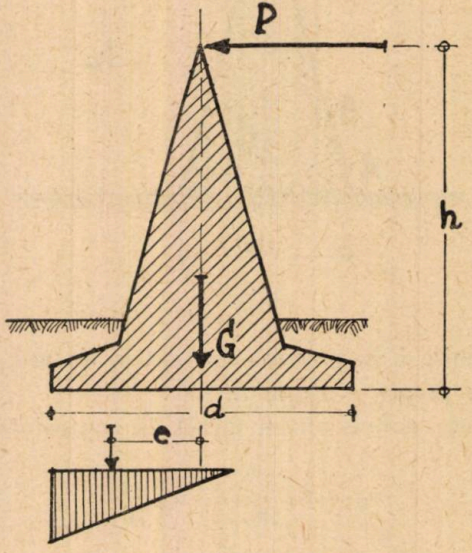


Fig. 2.

Des relations ci-dessus et de la relation $\sigma_s/\sigma_2 = \nu$, on déduit:

$$(4) \qquad \zeta = \frac{1 + C(\nu - 1)}{\nu} \; ; \quad \text{où } C = \frac{Gd}{2Ph} = \frac{d}{2e_2}$$

est le coefficient de stabilité. C doit être plus grand que 1, parce que si $C = 1$, $\sigma_2 = \infty$. On voit que ζ dépend d'une autre façon des grandeurs ν et C que dans les autres exemples précédents.

Étude numérique. La fonction ζ aura les valeurs suivantes, pour différentes valeurs usuelles de ν.

$\nu = 1{,}25$; $\quad \zeta = 0{,}800 + 0{,}200\,C$;
$\nu = 1{,}50$; $\quad \zeta = 0{,}667 + 0{,}333\,C$;
$\nu = 1{,}75$; $\quad \zeta = 0{,}572 + 0{,}500\,C$;
$\nu = 2{,}00$; $\quad \zeta = 0{,}500 + C$.

On voit que l'importance du coefficient C est d'autant plus grande que ν est plus grand.

Admettons maintenant $\nu = 1{,}5 =$ constant, et faisons varier C. Dans ce cas; pour $C = 1{,}5$; $\zeta = 1{,}167$.

Si donc la force P augmente de 16,7%, la pression σ atteint la pression limite σ_s, c'est-à-dire: quoique les coefficients de sécurité (ν) et de stabilité (C) sont égaux à 1,5, la stabilité de la construction est moindre, toute augmentation de la force extérieure dépassant 16,7% entraînant des déformations permanentes, d'autant plus que si la force P augmente de 50%, σ devient ∞.

Pour $C = 2{,}5$; $\zeta = 1{,}5$. Dans ce cas, ζ et ν mesurent d'une manière égale la sécurité de la construction.

Pour $C = 3{,}5$; $\zeta = 1{,}833$. Dans ce dernier cas, la sécurité et la stabilité sont en réalité plus grandes qu'il résulte de la valeur de ν ($\zeta > \nu$). La pression limite σ_s n'est atteinte que si P est dépassée de plus de 83%.

De cet exemple on voit que *la véritable stabilité et sécurité de la construction est mesurée par ζ qui est une fonction de ν (coefficient de sécurité) et de C (coefficient de stabilité), et que même si ν et C ont des valeurs paraissant satisfaisantes, la véritable stabilité mesurée par ζ peut être précaire.*

2. Lignes aériennes.

Soit un conducteur aérien, monté suivant les prescriptions, dans les conditions suivantes:

Section du conducteur ..... ω mm²
Portée ..... a m
Poids spécifique propre ..... g Kg/m¹ × mm² de section.
Charge additionnelle, spécifique conformément aux prescriptions ..... p Kg/m¹ × mm² de section.
Charge additionnelle spécifique correspondant à la température t_s et à la résistance limite admissible σ_s, sous la charge $g + \zeta p$ .. ζp Kg/m¹ × mm²

Résistance admissible correspondant à la charge totale $g + p$ et à la température t_0 . σ_0 Kg/mm²
Charge totale prescrite ..... $q_0 = g + p.$
Charge totale probable ..... $q_s = g + \zeta p$
Résistance limite admissible (limite des grandes déformations) ..... σ_s Kg/mm²
L'inverse du module d'élasticité ..... β mm²/Kg
Coefficient de dilatation thermique ..... α
Température en degrées Celsius ..... t_0 , t_s.
Coefficient de sécurité rapporté à la limite des grandes déformations ..... $\nu = \frac{\sigma_s}{\sigma_0}$.

L'équation de la ligne est exprimée assez exactement par:

$$\sigma_s - \frac{a^2 q_s^2}{24 \sigma_s^2 \beta} = \sigma_0 - \frac{a^2 q_0^2}{24 \sigma_0^2 \beta} = \frac{\alpha}{\beta}(t_s - t_0).$$

Admettons $t_s = t_0$ et que le conducteur est en cuivre. Alors l'on a: $\beta = 77 \times 10^{-6}$; $\sigma_s = 28$ Kg/mm² (d'après certains auteurs, une limite bien précise des grandes déformations n'existe pas). Nous déduisons de (5) et des relations de définition ci-dessus, la relation suivante:

$$(6) \qquad \zeta = \nu \left(\frac{g}{p} + 1 \right) \sqrt{1 + \frac{24\beta (\nu - 1) \sigma_s^3}{\nu^2 a^2 q_0^2}} - \frac{g}{p}.$$

Nous voyons qu'il existe une relation assez compliquée entre ζ et ν, et que ζ dépend dans une grande mesure — pour le même matériel, de la portée a, du rapport g/p et de la section ω (parce que q_0 et p sont des poids spécifiques, par mm² de section).

Si toutefois, on établit les prescriptions de manière que les charges extérieures soit supposées d'emblée assez grandes pour que la contrainte σ atteigne σ_s, on aura $\nu = 1$, donc $\zeta = \nu$ pour toutes les lignes, quelques soient la portée et la section.

Examinons maintenant, d'après le même critérium que dans les exemples précédents, quelles valeurs prendra ζ dans des cas bien déterminés de lignes aériennes, établies d'après les prescriptions allemandes, par ex. avec $p = 180 \sqrt{d}$ g/m et avec $\sigma_0 = 16$ Kg/mm². Dans ce cas

$$\nu = \frac{\sigma_s}{\sigma_0} = \frac{28}{16} = 1{,}75.$$

CUIVRE ÉLECTROLYTHIQUE

ω mm²	0	16	50	95	∞
$\overset{g}{\text{Kg/m}} \times \text{mm}^2$	0,0089	0,0089	0,0089	0,0089	0,0089
$\overset{p}{\text{Kg/m}} \times \text{mm}^2$	∞	0,0254	0,0108	0,0067	0
$\overset{q_0}{\text{idem}}$	∞	0,0343	0,0197	0,0156	0,0089

g/p	0	0,350	0,823	1,330	∞
ζ	ν	$2{,}37\sqrt{1+\frac{4950}{a^2}}-0{,}35$	$3{,}19\sqrt{1+\frac{14800}{a^2}}-0{,}823$	$4{,}09\sqrt{1+\frac{23400}{a^2}}-1{,}33$	∞

VALEURS DE ζ EN FONCTION DE a

a (m) \ ω (mm²)	0	16	50	95	∞
0	∞ et = 1,75	∞	∞	∞	∞
50	1,75	3,73	7,49	11,87	∞
100	1,75	2,55	4,20	6,15	∞
200	1,75	2,17	2,91	3,80	∞
500	1,75	2,03	2,46	2,95	∞
∞	1,75	1,98	2,37	2,76	∞

Ce dernier tableau est particulièrement instructif. Les charges additionnelles dues au givre et au verglas sont, — sur une grande partie du territoire de Roumanie, — de 4 à 5 fois plus grandes que la charge prévue dans les prescriptions allemandes. Les valeurs de ζ contenues dans le dernier tableau ci-dessus, sont la plupart du temps — moindres que 4; on voit que pour les petites portées et les grandes sections, les prescriptions allemandes peuvent être appliquées en pleine sécurité; mais en général, on ne peut pas les employer, avec $\sigma_0 = 16$ Kg/mm². Mais, si l'on fait le montage, avec $\sigma_0 = 12$ Kg/mm² au lieu de 16 Kg/mm²,

la sécurité croît d'une manière appréciable; dans ce dernier cas, $\nu = \frac{28}{12} = 2{,}33$ et pour une section $\omega = 50$ mm² par ex.

$$\zeta = 2{,}33 \times 1{,}823 \sqrt{1 + \frac{26300}{a^2}} - 0{,}823.$$

Donc pour $a =$	100	200	500 m.
	$\zeta = 7{,}28$	4,68	3,65

Variation de ζ, *pour* $\nu = 1{,}75$ *en fonction de la siction et de la porté.*

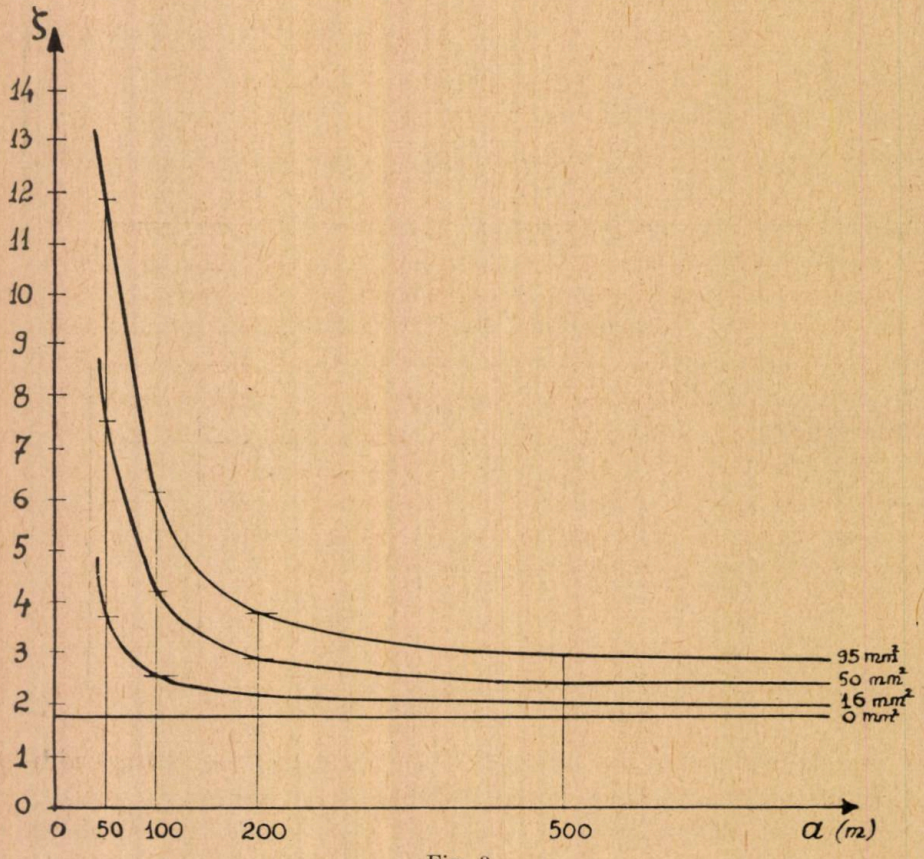


Fig. 3

On voit que dans ce cas les lignes résistent bien au verglas, mais elles sont montées dans des conditions d'inégale sécurité (ζ varie de 7,28 à 3,65 suivant la portée). Les prescriptions actuelles roumaines évitent d'une manière simple et radicale cet inconvénient, en supposant les charges extérieures environ 4 fois plus grandes que les prescriptions

allemandes, avec $\sigma_0 = \sigma_s$. Alors, on a $\nu = 1$; $\zeta = \nu = 1$, conformément à la formule (6) et de cette façon on réalise sécurité égale pour toutes les lignes.

Finalement, quelle signification physique présente une relation tellement compliquée entre ζ et ν? C'est certainement le fait que la chaînette de portée a prend des flèches différentes pour différentes charges, donc la figure ne reste plus identique à elle-même, comme dans toutes les constructions statiques connues. Certainement que, dans ces conditions, les notions de coefficient de sécurité et de résistance admissible même, n'ont plus de sens.

CONCLUSIONS

La possibilité d'une construction de résister à des charges plus grandes que celles prévues par les prescriptions, sans toutefois que la limite des grandes déformations σ_s soit dépassée, dépend non seulement du coefficient de sécurité ν, défini comme rapport entre σ_s et σ_0 (résistance admissible), mais aussi du rapport g/p entre le poids propre et la surcharge, ou du coefficient de stabilité C défini — dans certaines catégories de constructions — comme un rapport de moments. Surtout dans les cas où la superposition des effets ne peut pas être appliquée, la véritable sécurité d'une construction n'est pas mesurée ni par ν, ni par C, mais par des fonctions plus compliquées dépendant de certaines dimensions géométriques des pièces, comme portée, section, etc.

On a montré que même si ν et C ont, tous les deux, des valeurs satisfaisantes, la sécurité d'une construction peut devenir précaire pour une surcharge même peu différente, mais plus grande que celle réglementaire — pour laquelle le projet a été élaboré.

620.1 ESSAIS DE MATÉRIAUX

DAS QUELLEN DES ZEMENTMÖRTELS IN FEUCHTER LUFT

von **C. C. Teodorescu**

Zusammenfassung. *Es wird das Quellen des Zementmörtels untersucht, indem die Proben nach Vorbereitung dauernd in feuchter Luft aufbewahrt und durch Messung verfolgt wurden. Die Temperatur und Feuchtigkeit wurden auch verfolgt, obwohl es nicht möglich war feste Werte erhalten zu können.*

Es ist in derselben Zeitschrift über verschiedene Versuche berichtet worden, die das Schwinden und Quellen verschiedener Zementmörteln zeigten. Die Versuche wurden mit Proben 10 × 10 × 500 mm durchgeführt, die aus verschiedenen Gründen als zweckmässig erschienen. Der Längenmessapparat, ein Komparator eigener Konstruktion, ist auch geschildert worden [1]).

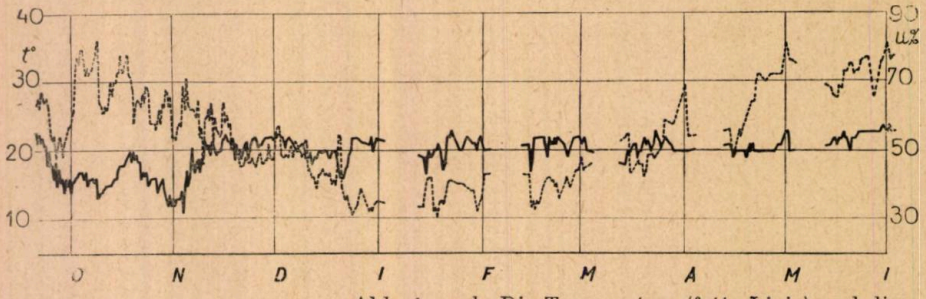


Abb. 1a — b. Die Temperatur- (fette Linie) und die

[1]) Sur le retrait linéaire du ciment. *Bull. Mathém. Phys.* pures et appl. de l'École Polytechnique de Bucarest. X, (1940), p.

Das Quellen des Zementmörtels unter Wasser, *C.R. Séances Acad. Sc. Roumanie.* V, (1941), Nr. 1—2, p. 159—162.

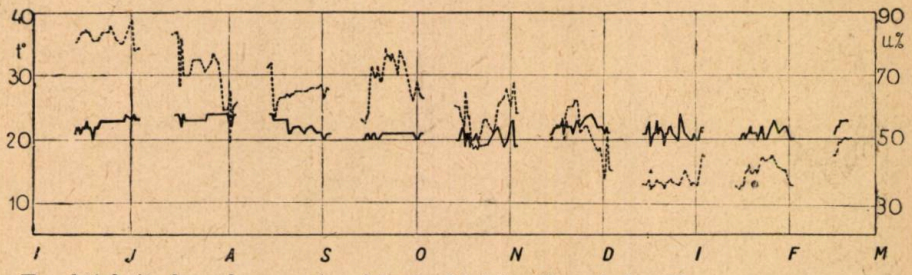
Die Beziehung zwischen dem Quellen und der Wasseraufnahme des Zementmörtels, *Mitt. d. Technische Hochschule Bukarest.* XII, (1941), S. 131.

Die fünf Portlandzemente, in verschiedenen sechs Mischungsverhältnissen mit Normalsand, hat man mit der nötigen Wassermenge verarbeitet und zu Prismen geformt. An den Enden hatten die Prismen zwei Messingstifte, um die Messung zu erleichtern.

Die Proben waren auf Glasplatten in einem Kasten aufbewahrt, in dem immer Wasser war, so dass eine konstante Feuchtigkeit vorhanden war. Die Messung selbst erfolgte in einem separaten Zimmer, wo man eine konstante Temperatur und Feuchtigkeit erzielen wollte, was aber nicht leicht möglich war, oder aber sich nur sehr schwer verwirklichen liess. Trotzdem hat man jeden Tag wann Probemessung war, die Temperatur und die Feuchtigkeit am Haarhygrometer, die im Zimmer, auf dem Messungtisch lagen, abgelesen. Das Diagramm der Schwankungen, für 17 Monate, ist in der Abb. 1 angegeben.

Die Messungen sind für jede probe in Tausendstel, das ist in mm/m, gerechnet, und dann die Mittel für alle Zementmörtel derselben Mischung im Tafel 1 angegeben.

Diese Ergebnisse sind in der Abb. 2 wiedergegeben, wo man der Deutlichkeit halber in der Perspective, im Raume nach drei Achsen, die Zeit logarithmisch, das Mischungsverhältnis nach Nummer, und in der Ordinate das Quellen in mm/m gezeichnet sind. Die Mittel sind mit einer fetten Linie angegeben, und die einzelnen Resultate, für jede Zementart, mit dünnen Linien angedeutet. Diese Resultate sind auch Mittelwerte von mehreren Messungen, wobei man in der Regel fünf Proben angefertigt hat, jedoch einige brachen oder konnten nicht bis zu Ende aller Messungen durchgehalten worden.



Feuchtigkeitschwankungen (punktierte Linie) während der Messungen.

Man kann aus der Figur entnehmen dass das Quellen im Laufe der Zeit regelmässig zunimmt. Für reiche Zementmischungen ist das Zunehmen grösser, während für den 1: 3 Mörtel, der praktisch mehr angeführt wird, das Quellen kleiner ist und nicht dieselbe Tendenz höher zu steigen zeigt.

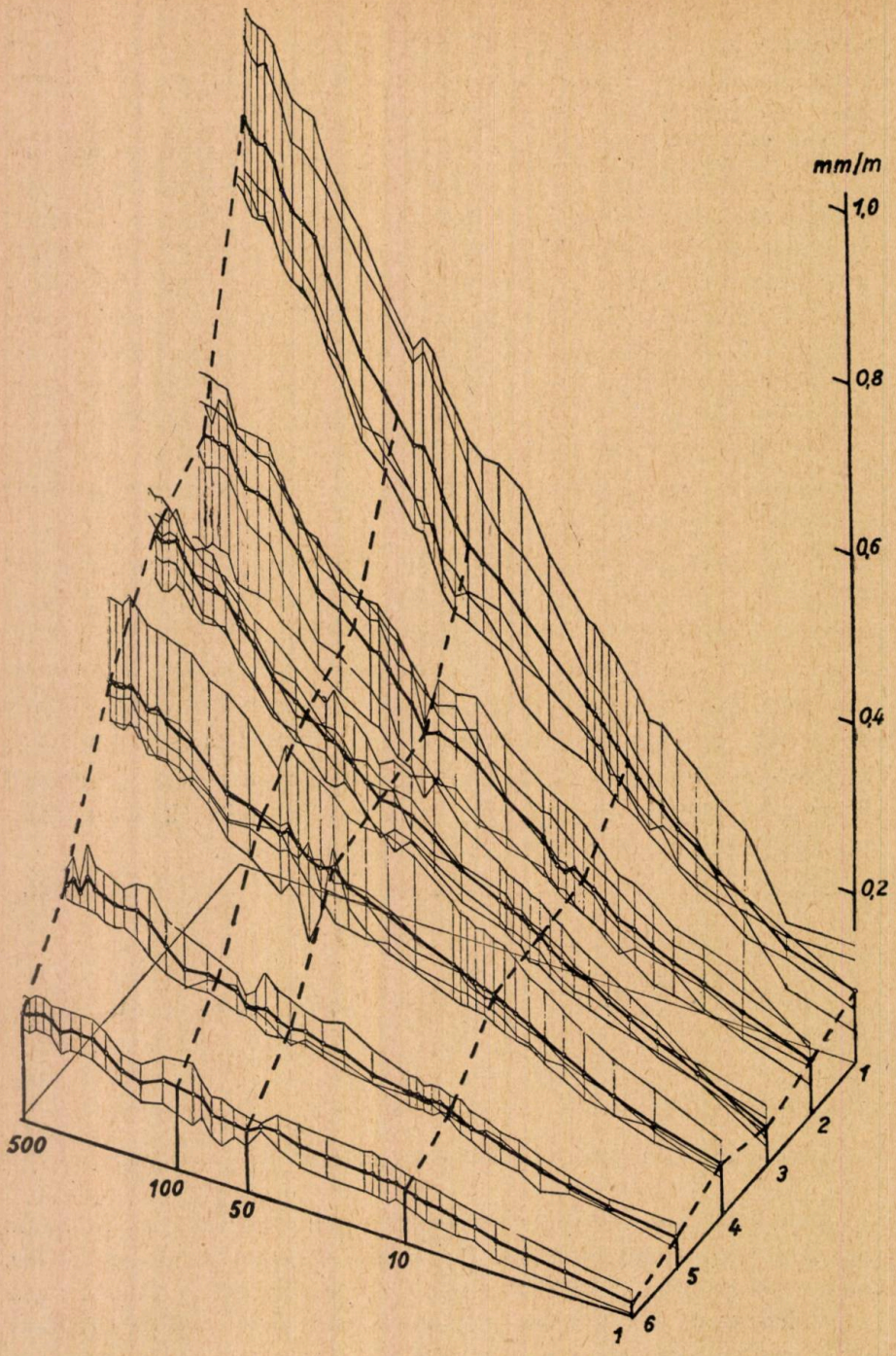


Abb. 2. — Das Quellen des Zementmörtels mit der Zeit.

TAFEL I

Das Quellen des Zementmörtels in ‰

Tage	1 Reiner Zem. 27% W	2 3Z: 1S 20% W	3 2Z: 1S 18,5% W	4 1Z: 1S 13,4% W	5 1Z: 2S 11,7% W	6 1Z: 3S 9,17% W
1	0,086	0,062	0,044	0,061	0,035	0,018
2	0,110	0,094	0,[illegible]00	0,082	0,043	0,028
3	0,151	0,112	0,102	0,099	0,053	0,033
4	0,171	0,126	0,118	0,114	0,059	0,038
5	0,192	0,138	0,131	0,128	0,070	0,047
6	0,208	0,150	0,149	0,139	0,076	0,049
7	0,228	0,156	0,152	0,151	0,083	0,054
8	0,235	0,170	0,162	0,158	0,086	0,056
9	0,253	0,181	0,172	0,166	0,092	0,059
10	0,259	0,189	0,183	0,173	0,098	0,063
11	0,280	0,198	0,189	0,177	0,103	0,068
12	0,290	0,191	0,198	0,180	0,102	0,067
13	0,304	0,195	0,201	0,186	0,101	0,067
14	0,311	0,204	0,205	0,188	0,104	0,070
15	0,319	0,223	0,210	0,194	0,104	0,070
16	0,367	0,253	0,231	0,212	0,110	0,073
29	0,404	0,285	0,257	0,228	0,126	0,076
36	0,434	0,299	0,274	0,239	0,128	0,084
43	0,449	0,306	0,282	0,246	0,136	0,084
50	0,465	0,301	0,282	0,263	0,134	0,074
57	0,482	0,331	0,298	0,258	0,139	0,078
64	0,507	0,345	0,311	0,264	0,148	0,074
71	0,537	0,361	0,323	0,275	0,145	0,077
78	0,559	0,377	0,332	0,290	0,144	0,094
85	0,558	0,380	0,333	0,282	0,157	0,095
115	0,613	0,415	0,364	0,303	0,167	0,101
145	0,646	0,429	0,383	0,309	0,164	0,089
175	0,695	0,467	0,416	0,333	0,185	0,096
205	0,729	0,488	0,436	0,354	0,207	0,111
235	0,767	0,513	0,462	0,361	0,215	0,122
265	0,782	0,519	0,467	0,369	0,213	0,123
295	0,790	0,520	0,467	0,383	0,214	0,123
325	0,812	0,538	0,478	0,377	0,219	0,118
355	0,842	0,561	0,495	0,390	0,225	0,127
385	0,858	0,562	0,511	0,400	0,236	0,132
415	0,857	0,565	0,507	0,394	0,213	0,131
445	0,866	0,563	0,504	0,395	0,228	0,126
475	0,882	—	0,511	0,396	0,219	0,127
505	0,806	—	—	—	—	—

Der grösste Wert 1,012‰ ist für einen reinen Zementmörtel erreicht, der kleinste 0,107‰ für den 1: 3 Mörtel. Es stellt sich heraus dass, obwohl nur in feuchter Luft gelagert, das Quellen verhältnismässig ähnlich ist wie für die Zementmörtel unter Wasser. Insbesonders reine Zementmörtel sind imstande viel Wasser zu nehmen, und ein entsprechendes Quellen aufzuweisen.

620.1 ESSAIS DE MATÉRIAUX

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE ZERSETZUNG DES ERHÄRTETEN MÖRTELS UND BETONS MIT SALZÄURE

von Dr. **A. Steopoe**

Es ist bekannt, dass bei der Mischungsverhältnis-Bestimmung im Mörtel oder Beton, das Material mit Salzsäure zersetzt und mit einer alkalischen Lösung gewaschen wird, um den Zementleim zu entfernen und die Zuschlagstoffe im reinen Zustand zu erhalten. Für das alkalische Waschen schreiben die deutschen Normen die 2%-ige NaOH-Lösung vor. Um eine lösende Einwirkung dieser Lösung auf die feinen Sandkörner zu vermeiden, hauptsächlich dann, wenn mit gepulvertem Material gearbeitet wird, hat man auch die 5%-ige Na_2CO_3-Lösung mit gutem Erfolg benützt (V. Rodt: *Zement* (1928), S. 138; A. Steopoe: *Zement* (1934), Nr. 52).

Bei der Zersetzung von Zementmörtel oder -Beton mit Salzsäure, treten häufig gallertartige SiO_2-Ausscheidungen ein, welche das Waschen des unlöslichen Rückstandes erschweren und bei der Behandlung mit Na_2CO_3-Lösung, nicht mehr vollständig in Lösung gehen, so dass die erhaltenen Werte für den Zementgehalt zu klein ausfallen. Um den Unterschied zwischen den berechneten und den gefundenen Werten deutlicher zu zeigen, habe ich vier verschiedene Mörtelproben bekannter Zusammensetzung in folgender Weise zersetzt: 450 g zerkleinerter Mörtel wurden mit 450 cm^3 Salzsäure 1 : 2 zuerst in der Kälte und dann auf dem siedenden Wasserbade behandelt, und nach 2 und 4 Tagen diese Behandlung mit derselben Säuremenge wiederholt, was eine vollständige Zersetzung des Mörtels verursachte. Der unlösliche Rückstand wurde zuerst mit Leitungswasser durch Dekantierung säurefrei gewaschen, dann mit einer 5%-igen Na_2CO_3-Lösung behandelt, nach dieser Behandlung die alkalische Lösung absiphoniert, mit schwach angesäuertem Wasser und schliesslich mit reinem Wasser ausgewaschen,

geglüht und gewogen. Die Ergebnisse dieser Bestimmungen sind in der Tafel 1 angeführt, aus welcher hervorgeht, dass je höher der Zementgehalt des Mörtels ist, um so mehr Unlösliches gefunden wurde, infolge der teilweise Gelatinierung der gelösten Kieselsäure.

TAFEL 1

Mörtelnummer	1	2	3	4
Wahres Mischungsverhältnis	1 : 1,82	1 : 2,43	1 : 3,35	1 : 4,26
Glühverlust %	10,91	9,20	8,02	6,84
Unlösliches %	62,22	68,22	73,33	77,11
Bindemittel (durch Differenz)	26,87	22,58	18,65	16,05
Gefundene Mischungsverhältnis	1 : 2,31	1 : 3,02	1 : 3,93	1 : 4,80
Prozentuelle Zunahme des gefundenen Zuschlagsstoffs in Bezug auf den berechneten	26	24	19	14

Vor diesen Ergebnissen beschloss ich die Arbeitsbedingungen zu finden, unter welchen die Gelatinierung der gelösten Kieselsäure vermeidet werden kann, oder die ausgeschiedene Gallerte wieder vollständig in Lösung zu bringen ist.

Beschreibung der Versuche.

Von den vier obenangezeigten Mörteln in Pulverform (ohne Rückstand auf dem 900-Maschensieb) wurden solche Mengen genommen, um ungefähr denselben unlöslichen Rückstand zu erhalten; jede Mörtelart wurde mit wachsenden Salzsäuremengen zersetzt, welche um so kleiner genommen wurden, je kleiner der Zementgehalt des Mörtels war, nämlich:

Mörtelnr.	Genommene Menge (*g*)	Benützte HCl-cm³ für die Zersetzung			
		a	*b*	*c*	*d*
1	10	10 cm³	15 cm³	20 cm³	30 cm³
2	7	10 »	15 »	20 »	30 »
3	6	4 »	8 »	12 »	20 »
4	5	3 »	6 »	10 »	15 »

Die Arbeitsweise war die folgende: die genaugewogene Mörtelmenge wurde in einen 200 cm³-fassenden Becher eingeführt, mit Wasser bedeckt (die Wassermenge war die doppelte der entsprechenden Säuremenge) und dann mit Salzsäure behandelt. Die Zersetzungsart der Mörtel,

sowie die weitere Behandlung des Zersetzungsproduktes, wurde in dreierlei Weise durchgeführt und zwar:

A) Die Einführung der Salzsäure in die wässerigen Mörtelsuspensionen geschah rasch, um die Gelatinierung der Kieselsäure zu begünstigen. Das Reaktionsprodukt wurde 48 Stunden stehen gelassen, dann mit Wasser genommen und im 700 cm^3-fassenden Becher durch sorgfältige Dekantation säurefrei gewaschen, mit 200 cm^3 5%-iger Na_2CO_3-Lösung behandelt, nach Absetzen die überstehende Lösung durch Siphonierung entfernt, einmal mit Wasser gewaschen, schwach angesäuert und dann säurefrei auf dem Filter gewaschen, geglüht und gewogen.

B) Die Zersetzung mit Salzsäure wurde wie bei *A* durchgeführt, aber das Zersetzungsprodukt nur 15 Minuten stehen gelassen, dann mit heissem Wasser aufgenommen, abfiltriert, der Filter säurefrei gewaschen, geglüht und gewogen.

C) Um eine Kieselsäure-Ausscheidung zu vermeiden, wurde die Behandlung mit Salzsäure tropfenweise und unter Kühlung durchgeführt, der unlösliche Rückstand nach 15 Minuten stehen abfiltriert, 5 mal mit heissem Wasser gewaschen, dann mit 100 cm^3 Na_2CO_3-NaCl-Lösung (5% Na_2CO_3 + 2,5% NaCl) auf dem Filter behandelt, einmal mit heissem Wasser, zweimal mit 0,7%-iger Salzsäure und schliesslich 5 mal mit heissem Wasser gewaschen, geglüht und gewogen.

Die erhaltenen Ergebnisse sind in der Tafel 2 angeführt und die gefundenen Mischungsverhältnisse in den Abb. 1—3 graphisch dargestellt, je eine für jede Arbeitsweise *A*, *B* und *C*. Für diese Darstellungen habe ich die benützten Säuremengen auf 1g vorhandenes Bindemittel bezogen und die, in dieser Weise berechneten Säuremengen (Tafel 3) in die Abszisse eingetragen. Die Mischungsverhältnisse sind auf der Ordinate genommen und die berechneten durch eine wagerechte Linie

TAFEL 3

Nr. des Mörtels	Bindemittel in der Analyseprobe	Berechnete Säuremenge (cm^3) auf 1 g Bindemittel bezogen				
1	3,1592 g	Benützte HCl (cm^3) . .	10	15	20	30
		HClcm^3/1 g Zement. . .	3,16	4,71	6,33	9,49
2	1,6530 g	Benützte HCl (cm^3) . . .	10	15	20	30
		HClcm^3/1 g Zement. . .	6,04	9,07	12,09	18,13
3	1,2684 g	Benützte HCl (cm^3) . . .	4	8	12	20
		HClcm^3/1 g Zement. . .	3,15	6,30	9,45	15,76
4	0,8855 g	Benützte HCl (cm^3) . . .	3	6	10	15
		HClcm^3/1 g Zement. . .	3,38	6,77	11,29	16,93

TAFEL 2

Die benützte Arbeitsmethode		A				B				C			
Mörtel Nr. 1 1 : 1,82	HCl-Menge (D. 1,19) für 10 g Mörtel. . . . . (cm³)	10	15	20	30	10	15	20	30	10	15	20	30
	Unlösliches %.	56,79	60,18	59,61	58,16	58,88	58,27	58,17	57,90	57,73	57,57	57,64	57,60
	Bindemittelgehalt %.	32,30	28,91	29,48	30,93	30,21	30,82	30,92	31,19	31,36	31,52	31,45	31,49
	Gefundenes Mischungsverhältnis	1 : 1,75	1 : 2,08	1 : 2,02	1 : 1,88	1 : 1,94	1 : 1,89	1 : 1,88	1 : 1,85	1 : 1,84	1 : 1,82	1 : 1,83	1 : 1,82
Mörtel Nr. 2 1 : 2,43	HCl-Menge (D. 1,19) für 7 g Mörtel . . . . . (cm³)	10	15	20	30	10	15	20	30	10	15	20	30
	Unlösliches %.	62,83	62,96	62,33	61,88	64,60	64,34	64,46	64,48	64,10	63,82	63,85	63,99
	Bindemittelgehalt %.	27,97	27,84	28,47	28,92	26,20	26,46	26,34	26,32	26,70	26,98	26,95	26,81
	Gefundenes Mischungsverhältnis	1 : 2,24	1 : 2,26	1 : 2,18	1 : 2,13	1 : 2,46	1 : 2,43	1 : 2,44	1 : 2,44	1 : 2,40	1 : 2,36	1 : 2,36	1 : 2,37
Mörtel Nr. 3 1 : 3,35	HCl-Menge (D. 1,19) für 6 g Mörtel . . . . . (cm³)	4	8	12	20	4	8	12	20	4	8	12	20
	Unlösliches %.	71,16	70,80	70,26	69,97	71,54	71,25	71,38	71,11	71,01	70,74	70,96	70,91
	Bindemittelgehalt %.	20,82	21,18	21,72	22,01	20,44	20,73	20,60	20,87	20,97	21,24	21,02	21,07
	Gefundenes Mischungsverhältnis	1 : 3,41	1 : 3,34	1 : 3,23	1 : 3,17	1 : 3,50	1 : 3,43	1 : 3,46	1 : 3,40	1 : 3,38	1 : 3,33	1 : 3,37	1 : 3,36
Mörtel Nr. 4 1 : 4,26	HCl-Menge (D. 1,19) für 5 g Mörtel . . . . . (cm³)	3	6	10	15	3	6	10	15	3	6	10	15
	Unlösliches %.	74,67	73,61	73,94	73,61	76,00	75,86	75,79	75,80	75,68	75,56	75,61	75,54
	Bindemittelgehalt %.	18,49	19,55	19,22	19,55	17,16	17,30	17,37	17,36	17,48	17,60	17,55	17,62
	Gefundenes Mischungsverhältnis	1 : 4,03	1 : 3,76	1 : 3,84	1 : 3,76	1 : 4,42	1 : 4,38	1 : 4,36	1 : 4,36	1 : 4,32	1 : 4,29	1 : 4,30	1 : 4,28

und die gefundenen durch eine, für jeden Mörtel charakteristische Kurve dargestellt, um so die Abweichungen der gefundenen Werte von den berechneten deutlicher zu zeigen. Aus diesen Abbildungen geht folgendes hervor:

1. Die nach der Arbeitsweise *A* erhaltenen Werte (Abb. 1) zeigen die grössten Abweichungen von den berechneten, sowie die grössten Schwankungen in Bezug auf die benützte Säuremenge, infolge der starken Kieselsäure-Ausscheidung und der teilweise Unlöslichkeit der gebildeten Gallerte in Na_2CO_3-Lösung.

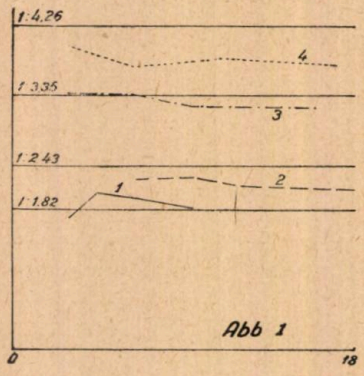


Abb 1

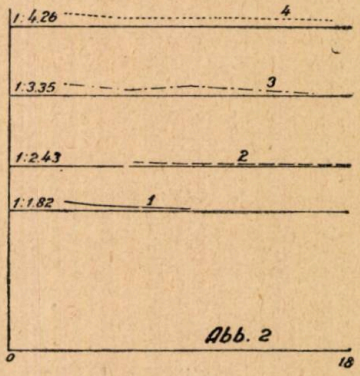


Abb. 2

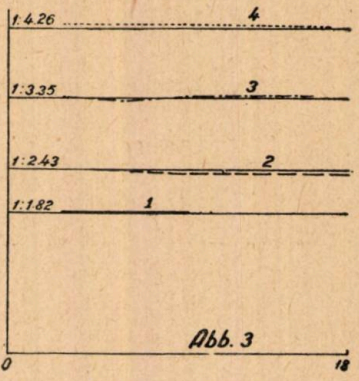


Abb. 3

2. Die Arbeitsweise nach *B* hat Werte gegeben, welche fast unabhängig von der benützten Säuremenge sind, aber ein wenig höher als die berechneten ausfallen, infolge des Fehlens eines alkalischen Waschens.

3. Die Arbeitsweise nach *C* hat die besten Werte geliefert, welche sehr gut mit den berechneten übereinstimmen und unabhänging von der benützten Säuremenge sind.

Um zu prüfen ob die Verwendung einer NaOH-Lösung bei der Arbeitsweise nach *C* nicht zu grosse Werte für den Bindemittelgehalt der Mörtel liefert, infolge einer lösenden Einwirkung des Natriumhydroxydes

auf den feingemahlenen Sand, habe ich eine neue Reihe von Bestimmungen mit den vier Mörteln durchgeführt und zwar: von jedem Mörtel wurde eine solche Menge genommen, um ungefähr 4 g unlöslichen Rückstand zu bekommen, mit 12 cm³ Salzsäure *D.* 1,19 nach der Arbeitsweise *C* behandelt und das alkalische Waschen mit 100 cm³ 2%-iger NaOH-Lösung gemacht (Arbeitsweise *D*). Weiter habe ich neue Mörtelmengen so genommen, um in jeder Probe ungefähr 1 g Bindemittel zu haben; diese neuen Proben wurden nach derselben Arbeitsweise mit 10 cm³ HCl *D.* 1,19 zersetzt, ebenfalls mit 100 cm³ 2%-iger NaOH-Lösung gewaschen und weiter wie oben behandelt (Arbeitsweise *E*). Bei dieser Gelegenheit ist es zu bemerken, dass bei dem Endwaschen mit heissem Wasser, die Filtrierung um so schwerer geht, je weitgehender die Elektrolyte aus dem Unlöslichen ausgewascht sind; das Waschen muss aufhören, wenn die auslaufende Flüssigkeit eine Neigung zur Trübung zeigt. Die in Analyse genommenen Mörtelmengen, die erhaltenen Ergebnisse, sowie die berechneten und gefundenen Mischungsverhältnisse sind in der Tafel 4 angeführt, aus welcher hervorgeht, dass die Arbeitsweise nach *C* auch dann sehr gute Werte liefert, wenn das alkalische Waschen mit der 2%-igen NaOH-Lösung durchgeführt wird. Das zeigt uns dass die kalte 2%-ige NaOH-Lösung den feinen Sand nicht angreift.

TAFEL 4

	Mörtel Nr.	1	2	3	4
Arbeitsweise D	Genommene Mörtelmenge (g) .	6,9000	6,2500	5,6000	5,3000
	Unlösliches (g)	3,9653	3,9944	3,9759	4,0030
	Entspr. Glühverlust (g)	0,7527	0,5750	0,4491	0,3625
	Zement durch Differenz (g) . .	2,1820	1,6806	1,1750	0,9345
Arbeitsweise E	Genommene Mörtelmenge (g) .	3,2000	3,7000	4,7500	5,7000
	Unlösliches (g)	1,8448	2,3708	3,3682	4,3072
	Entspr. Glühverlust (g) . . .	0,3491	0,3404	0,3809	0,3898
	Zement durch Differenz (g) . .	1,0061	0,9888	1,0009	1,0030
Mischungsverhältnis	Berechnet	1 : 1,82	1 : 2,43	1 : 3,35	1 : 4,26
	Gefunden nach D	1 : 1,81	1 : 2,37	1 : 3,38	1 : 4,28
	» » E.	1 : 1,83	1 : 2,38	1 : 3,36	1 : 4,29
	Maximale Abweichung	0,01	0,06	0,03	0,03

Bei der Arbeitsweise nach *A* habe ich beobachtet, dass die Volumina der Zersetzungsprodukte, je nach der zugestezten Säuremenge verschieden waren. Daher beschloss ich eine neue Reihe von Untersuchungen durchzuführen, um diese qualitative Beobachtung quantitativ

zu verfolgen und gleichzeitig festzustellen ob zwischen den voluminösen Kieselsäure-Ausscheidungen und der Abweichung des gefundenen Mischungsvehältnisses von dem berechneten eine Beziehung besteht. Die Arbeitsweise war die folgende: um ungefähr dieselbe Bindemittelmenge in Reaktion zu bringen, habe ich von den vier Mörteln die folgenden Quantitäten genommen:

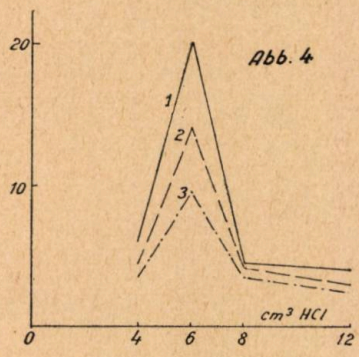
Mörtelnr.	1	2	3	4
Genommene Menge	4 g	4,7 g	6 g	7 g

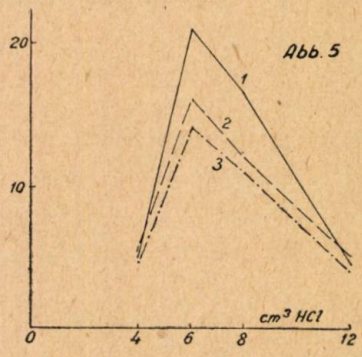
TAFEL 5

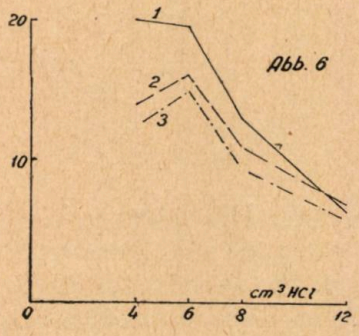
		Benützte HCl-Menge (cm³)	4	6	8	12
Mörtel 1	Volumina der Sedimente	Nach der HCl-Zersetzung	6,0	20,0	4,5	4,0
		In Na_2CO_3-Lösung	4,5	14,0	4,2	3,0
		Nach dem Waschen	3,5	9,5	3,5	2,5
		Unlösliches %	56,98	57,17	56,84	56,63
		Entspr. Mischungsverhältnis	1 : 1,77	1 : 1,79	1 : 1,76	1 : 1,74
Mörtel 2	Volumina der Sedimente	Nach der HCl-Zersetzung	5,0	21,0	16,5	4,5
		In Na_2CO_3-Lösung	5,5	16,0	12,0	5,0
		Nach dem Waschen	4,5	14,0	11,0	4,0
		Unlösliches %	63,73	66,78	65,40	63,41
		Entspr. Mischungsverhältnis	1 : 2,35	1 : 2,78	1 : 2,57	1 : 2,31
Mörtel 3	Volumina der Sedimente	Nach der HCl-Zersetzung	20,0	19,5	13,0	6,5
		In Na_2CO_3-Lösung	14,0	16,0	11,0	7,0
		Nach dem Waschen	12,5	15,0	9,5	6,0
		Unlösliches %	72,35	72,64	71,40	70,22
		Entspr. Mischungsverhältnis	1 : 3,68	1 : 3,75	1 : 3,46	1 : 3,22
Mörtel 4	Volumina der Sedimente	Nach der HCl-Zersetzung	17,0	17,0	7,0	60,9
		In Na_2CO_3-Lösung	12,5	14,0	9,0	7,5
		Nach dem Waschen	10,5	12,0	7,0	5,5
		Unlösliches %	76,30	76,55	75,07	74,73
		Entspr. Mischungsverhältnis	1 : 4,52	1 : 4,60	1 : 4,14	1 : 4,05

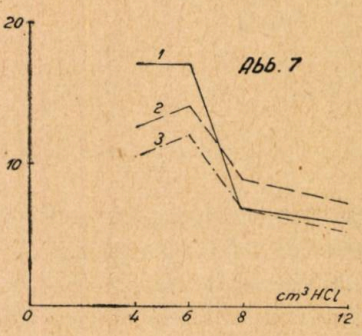
Von jeder Mörtelart wurden vier gleiche Proben genau gewogen, in vier graduierten (bis 100 cm³) und mit geschliefenem Stöpsel versehenen Röhren eingebracht, mit 8, 12, 16 bzw. 24 cm³ Wasser und dann mit 4, 6, 8 bzw. 12 cm³ HCl *D.* 1,19 versetzt und bis zur vollständigen Zersetzung des Mörtelpulvers geschwenkt (also bis zum Aufhören der CO_2-Entwicklung). Dann wurden die Röhren gestopft und 48 Stunden stehen gelassen, um eine weitgehende Gelatinierung der gelösten Kieselsäure

zu begünstigen. Nach dieser Aufbewahrungszeit wurden die Röhren mit Wasser auf 100 cm³ gefüllt, gut geschüttelt und 24 Stunden stehen gelassen, um die Volumina der Sedimente nach ihrer vollständigen Absetzung zu lesen. Dann wurde die klare, überstehende Lösung abpipettiert und noch einmal mit reinem Wasser in derselben Weise gewaschen. Nach der Entfernung des zweiten Waschwassers, habe ich 50 cm³ 5%-ige Na_2CO_3-Lösung zugesetzt, kräftig geschüttelt und nach 24 Stunden stehen, die Volumina der Sedimente für das zweite Mal gelesen. Dann wurde die überstehende Lösung abpipettiert, ein wenig Wasser zugesetzt, mit Salzsäure angesäuert, mit Wasser auf 100 cm³ gefüllt, 24 Stunden stehen gelassen und die Volumina der Sedimente für das dritte Mal gelesen. Die gebliebenen Sedimente wurden dann mit heissen Wasser auf das Filter gebracht, säurefrei gewaschen, geglüht, gewogen und aus dem erhaltenen Ergebnis das Mischungeverhältnis berechnet. Alle gefundenen Werte sind in der Tafel 5 angeführt.



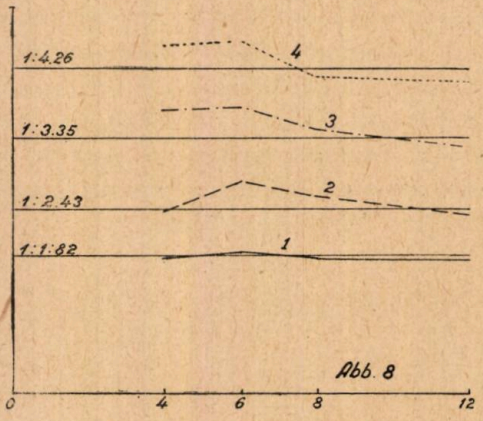


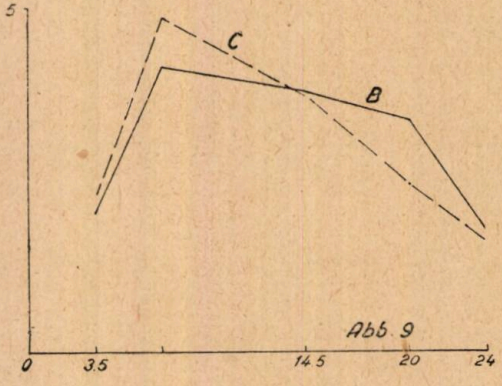




Um die Variation der Sediment-Volumina in Beziehung mit der angewandten Säuremenge besser zu zeigen, habe ich für jede Mörtelart eine graphische Darstellung gezeichnet, in welchen die Säuremenge als Abszisse und die Sediment-Volumina als Ordinate genommen wurde, und die Volumina der Sedimente nach der HCl-Zersetzung (1), nach

der Behandlung mit der Na_2CO_3-Lösung (2) und nach dem Waschen (3) mit besonderen Kurven angezeigt sind. Aus diesen vier Abbildungen (4—7) ist ersichtlich, dass das Volumen des Zersetzungsproduktes von der benützte Säuremenge abhängt und für eine bestimmte Quantität ein Maximum zeigt. Das Waschen mit der 5%-igen Na_2CO_3-Lösung kann diese Unterschiede nicht beseitigen und daher zeigt auch der unlösliche Rückstand ein Maximum für diese Säuremenge, was eine Herabsetzung des berechneten Zementgehaltes hervorruft.





Diese Behauptung geht deutlicher aus der Abb. 8 hervor, in welcher die benützten Säuremengen auf die Abszisse und die Mischungsverhältnisse auf die Ordinate eingetragen sind. Die berechneten Mischungsverhältnisse sind durch wagerechte Linien und die gefundenen durch eine für jeden Mörtel charakteristische Kurve gezeichnet. Für die Proben welche mit 6 cm³ Salzsäure *D.* 1,19 zersetzt wurden, zeigen die Kurven ein Maximum, welches deutlicher bei den Mörteln 2, 3 und 4 hervortritt. Das bedeutet dass die Kieselsäure-Ausscheidung stärker für diese Salzsäuremenge war.

Eine ähnliche Erscheinung habe ich auch bei der Zersetzung des Zementes in der Kälte mit wachsenden Salzsäurekonzentrationen beobachtet. Ich habe nämlich 1 g Zement almählich und unter Rühren, in 120 cm³ 3,5%-ige oder 60 cm³ 7, bzw. 14,5, 20 und 24%-ige HCl eingeführt, nach 3 Minuten das Unlösliche durch Filtrierung getrennt, mit heissem Wasser ausgewaschen, geglüht, gewogen und auf den ursprünglichen Zement bezogen. Die erhaltenen Ergebnisse mit zwei Zementen *B* und *C* sind in der Tafel 6 angeführt und in der Abb. 9 graphisch dargestellt, aus welcher hervorgeht, dass das Unlösliche ein Maximum für eine gewisse Säurekonzentration anzeigt.

TAFEL 6

Konzentration der Säure		3,5%	7%	14,5%	20%	24%
Unlösliches %	Zement B	1,82	3,72	3,41	3,05	1,59
	Zement C	2,03	4,34	3,37	2,21	1,48

Um zu sehen ob die Benützung der 2%-ige NaOH-Lösung als alkalische Waschflüssigkeit die ausgeschiedene Kieselsäure vollständig lösen kann, habe ich die obenangezeigten Bestimmungen in graduierten Röhren und mit 6 cm³ Salzsäure für Mörtel 2, 3 und 4 wiederholt und unter denselben Bedingungen wie oben gearbeitet, nur statt Na_2CO_3-Lösung, NaOH-Lösung verwendet. Die beobachteten Volumina der Sedimente, die erhaltenen unlöslichen Rückstände, sowie die aus ihne berechneten Mischungsverhältnisse sind in der Tafel 7 angeführt. Es ist ersichtlich dass die lösende Wirkung der NaOH-Lösung so gross ist, dass die gefundenen Mischungsverhältnisse etwas unter den berechneten bleiben.

TAFEL 7

Mörtelnummer		2	3	4
Volumina der Sedimente (cm³)	Nach der HCl-Zersetzung	19,0	17,5	13,0
	In NaOH-Lösung	12,5	12,5	11,5
	Nach dem Waschen	3,5	4,5	5,5
Unlösliches %		63,45	70,34	74,89
Entspr. Mischungsverhältnis		1 : 2.31	1 : 3,25	1 : 4,09
Berechn. Mischungsverhältnis		1 : 2,43	1 : 3,35	1 : 4,26

ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Zersetzung der Mörtel oder Betone mit Salzsäure, um ihre Mischungsverhältnisse zu bestimmen, treten häufig voluminöse Kieselsäure-Ausscheidungen ein, welche das Waschen des Unlöslichen erschwe-

ren und nur teilweise in Na_2CO_3-Lösung sich lösen, so dass der Zementgehalt der erhärteten Mischungen zu klein gefunden wird.

Aus den durchgeführten Untersuchungen wurde gefunden, dass diese Kieselsäure-Ausscheidungen von den benützten Salzsäuremengen und von der Arbeitsweise abhängen und zwar: bei grösseren Säuremengen oder bei einer kürzeren Einwirkungsdauer der Säure auf den zerkleinerten oder gepulverten Mörtel und beim Arbeiten in der Kälte, kann die Kieselsäure-Ausscheidung auf ein Minimum herabgesetzt werden.

Das alkalische Waschen des unlöslichen Rückstandes ist unentberlich um genaue Werte für das Mischungsverhältnis zu erhalten. Die 5%-ige Na_2CO_3-Lösung gibt nur dann gute Ergebnisse, wenn die Zersetzungsart des Mörtels nicht grosse Kieselsäure-Ausscheidungen verursacht hat und das Waschen des Rückstandes auf dem Filter durchgeführt wird. Sind diese Ausscheidungen eingetreten, so muss man die 2%-ige NaOH-Lösung benützen, welche die ausgeschiedene Kieselsäure vollständig in Lösung bringt, ohne den feinen Sandanteil merklich anzugreifen.

Nach der Behandlung des Rückstandes mit der alkalischen Lösung, ist es notwendig schwach anzusäuern, was eine starke Verminderung der Sediment-Volumina hervorruft und das Endwaschen erleichtert.

621 ÉLECTRICITÉ

AU SUJET DE LA CONNEXION ENTRE LES PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES ET MAGNÉTIQUES

par **C. Budeanu**
Professeur à l'Ecole Polytechnique Bucarest

Les phénomènes magnétiques ont été conçues au début indépendamment des phénomènes électriques. C'était très naturel d'ailleurs à l'époque du commencement du XIX-e siècle.

Les connaissances de l'électricité, après la découverte de VOLTA, se résumaient à peu près au fonctionnement de la pile électrique et au phénomène connu généralement sous le nom de « courant galvanique ».

C'est cette dénomination qui, à la suite d'une proposition, assez modeste d'ailleurs, d'ANDRÉ AMPÈRE a été remplacée par celle d'aujourd'hui de « courant électrique ».

Dans le domaine du magnétisme les connaissances se limitaient seulement aux manifestations des aimants.

Il paraît que déjà en 1760 AEPINUS avait entrevu la connexion de ces deux catégories de phénomènes de la nature. Mais c'est seulement après 60 ans qu'OERSTED a prouvé expérimentalement l'effet des courants sur les aimants.

Immédiatement après OERSTED, AMPÈRE étudiant les effets mutuels entre les courants est arrivé à la conclusion que l'effet magnétique représente, au fond, une des manifestations des courants électriques. Ensuite quelques années plus tard FARADAY découvre le phénomène de l'induction.

Ce rappel sommaire historique nous permet de fixer vers 1820 l'établissement de la corrélation entre les phénomènes électriques et magnétiques. C'est spécialement AMPÈRE qui a précisé la nature du magnétisme. Dans son mémoire célèbre présenté à l'Académie des Sciences le 10 juin 1822 il affirme textuellement, que les « aimants doivent leurs

propriétés à une disposition de l'électricité autour de chacune de leurs particules, identiques à celle de l'électricité dans les fils conducteurs, disposition que j'ai désignée sous le nom de *courant électrique* ».

C'est AMPÈRE qui prouve que les champs magnétiques sont dus à des « courants électriques ».

Les travaux d'AMPÈRE et de FARADAY ont fixé donc des lois fondamentales ce qui a permis ensuite au savants d'établir des relations quantitatives entre les grandeurs électriques et magnétiques.

Même les deux relations classiques de MAXWELL concernant la propagation des ondes électromagnétiques reposent, au fond, sur l'application et l'interprétation des lois d'AMPÈRE et de FARADAY. C'est ce qui explique que les relations de MAXWELL malgré leurs grandes importances, n'introduisent pas des *liaisons expérimentales nouvelles* entre les grandeurs électromagnétiques.

Toutefois, malgré toutes ces connaissances les savants ont continué à exposer dans leurs traités certains phénomènes magnétiques indépendamment des phénomènes électriques. Les champs et les flux magnétiques continuaient à être envisagés comme des effects des « masses magnétiques ». Cette manière inexpliquable d'exposer les lois magnétiques a figuré et figure encore même aujourd'hui, 120 ans après les travaux d'AMPÈRE, dans des traités assez importants. Quelquefois on commence même à exposer d'abord le magnétisme en partant de la fiction de la « *masse magnétique* » indépendamment de tout phénomène électrique.

Le premier exposé complet de l'ensemble des phénomènes électromagnétiques en concordance avec la réalité physique est dû, à notre connaissance, à M. le Prof. VASILESCU-KARPEN, qui dans son cours professé à l'Ecole Polytechnique de Bucarest depuis plus de 30 ans, présente et explique toutes les lois du magnétisme en faisant abstraction de la « masse magnétique » grandeur prenant le caractère d'une simple fiction. C'est un travail qui implique une révision d'ensemble et originelle de la présentation classique de ces phénomènes.

* * *

Dans ces conditions nous considérons l'inutilité de la notion de « masse magnétique » comme suffisamment prouvée, non seulement du point de vue fondamental physique, mais aussi bien du point de vue des besoins pratiques concernant la présentation courante des lois en question.

Nous nous proposons de relever également quelques considérations concernant la corrélation entre les phénomènes électriques et magnétiques, en concordance avec le principe de l'inutilité de la « masse magnétique ».

Considérations d'opportunité et de commodité mathématique. Le maintien de la fiction de « masse magnétique » est dû en grande partie à la possibilité pour cette conception d'être exprimée mathématiquement, d'une manière assez commode et en même temps symétrique avec les relations électriques.

Au fond, toute notion physique mesurable est susceptible de caractériser certaines propriétés, dont les réalités intrinsèques constituent un but de nos recherches sans jamais pouvoir l'atteindre. Mais dès que nous avançons dans ce domaine inconnu de la réalité physique nous sommes obligés d'adapter les notions envisagées aux réalités.

La fiction de la « masse magnétique » a constitué une hypothèse qui habilement adaptée a été susceptible de nous permettre d'exposer mathématiquement les phénomènes magnétiques.

MAXWELL connaissait très bien les recherches d'AMPÈRE et ses idées au sujet de la nature électrique du magnétisme. Ceci a contribué même à doter la science électrique d'une nouvelle loi fondamentale, dont MAXWELL a été le premier à se servir brillamment dans l'élaboration de sa théorie des ondes électromagnétiques. Dans son ouvrage classique, MAXWELL réserve une place importante aux « hypothèses d'AMPÈRE »[1]). Il reconnaît même la simplicité et la vérification de ces « *hypothèses* ».

Pourtant MAXWELL n'ose pas déranger l'exposé mathématique basé sur l'ancienne conception de la « masse magnétique ». Il explique même que la suppression des grandeurs, dont nous nous sommes servis mathématiquement, pourrait nous procurer plutôt d'inconvenients que d'avantages.

MAXWELL commence l'étude du magnétisme en utilisant la loi de COULOMB appliquée aux « masses magnétiques ». Il va plus loin, et envisage même les hypothèses du « fluide magnétique » d'une manière symétrique aux conceptions valables en électricité à cette époque[2]).

Toutefois MAXWELL n'attribue pas un caractére physique définitif à la théorie de la « masse magnetique ».

Mais il faut le reconnaître que cette présentation mathématique de MAXWELL a laissé des traces profondes et durables dans l'exposé du magnétisme.

Or dans ces conditions la revision apportée par M. le Prof. VASILESCU-KARPEN à l'exposé du magnétisme a eu le grand mérite de nous montrer depuis longtemps, que même du point de vue de la présentation mathématique on peut se débarasser facilement de la fiction de « masse magnétique » dans tout le domaine du magnétisme sans introduire

[1]) MAXWELL, *Electricity and Magnetisme*, Vol. II, Chap. XXII.
[2]) MAXWELL, *Op. cit.*, Part. III. Chap. I.

aucune complication, mais au contraire en simplifiant cet exposé, même pour les besoins d'ordre didactique.

Ce résultat était d'ailleurs à prévoir. Toute adaptation aux réalités physiques est susceptible généralement d'introduire de simplifications.

Il est intéressant de remarquer que M. VASILESCU-KARPEN a prouvé également que les solenoïdes caractérisés par $NIs\mu$ (N étant le nombre des spires par unité, I le courant, s la section et μ la perméabilité), sont équivalents à des aimants dont la « masse magnétique » m serait

$$m = NIs\mu \tag{1}$$

ou en système électromagnétique et dans l'air,

$$m = NIs. \tag{2}$$

M. VASILESCU-KARPEN démontre ensuite que l'attraction entre les solénoïdes élémentaires est proportionnelle au produit $(NIs\mu)$ $(N'I's'\mu')$ et inversement proportionnelle au carré de la distance. On retrouve donc la loi de COULOMB appliquée aux grandeurs hypothétiques

$$m = NIs\mu \quad \text{et} \quad m' = N'I's'\mu'.$$

Cette démonstration nous relève que les solenoïdes *se comportent comme s'ils étaient remplacés par des « masses magnétiques » hypothétiques définies par les relations* (1) *et* (2).

Les mêmes relations nous permettent d'établir la relation dimensionnelle entre la « masse magnétique » m et le courant I sous la forme:

$$[m] = [I.L\mu] = [L^2 M\ T^{-2} I^{-1}]. \tag{3}$$

Nous remarquons qu'ici nous nous sommes servis de la dimension de $[\mu] = [LMT^{-2} I^{-2}]$ valable dans tout système cohérent d'unités.

De cette manière une corrélation mathématique précise et complète, est établie entre la conception basée sur la fiction de la « masse magnétique » et celle basée sur la réalité du courant électrique (ou respectivement de la quantité d'électricité).

La « masse magnétique » apparaît seulement comme une grandeur hypothétique en fonction du courant I représentant la vraie réalité physique.

Considérations concernant la synthèse des lois et des grandeurs électromagnétiques. Le premier savant qui a élaboré une vraie synthèse des lois et des grandeurs électriques et magnétiques a été MAXWELL. Il s'est servi de cette synthèse pour introduire ses méthodes d'analyse dimensionnelle, ainsi que pour étudier le problème des systèmes d'unités.

En étudiant de cette manière le bilan des grandeurs et des unités, à la suite d'une analyse scientifique détaillée, MAXWELL arrive le premier

à la conclusion que dans le domaine de l'électricité et du magnétisme nous avons besoin d'une seule unité indépendante nouvelle en dehors des unités utilisées en mécanique.

MAXWELL expose ensuite les dimensions des grandeurs électriques et magnétiques dans deux hypothèses, au sujet de la quatrième unité à adopter, à savoir: la quantité d'électricité e, ou la masse magnétique m [1]). Il exprime donc les équations aux dimensions dans les systèmes $L.M.T.e$, ou $L.M.T.m$.

Ensuite MAXWELL explique comment en faisant les conventions $\mu_0 = 1$ ou $e_0 = 1$ pour le vide, nous pouvons passer aux systèmes particuliers *électromagnétique* ou *électrostatique*.

Les conclusions de MAXWELL, au sujet du nombre des unités fondamentales, sont encore valables. Depuis MAXWELL on n'a decouvert aucune nouvelle loi fondamentale entre les mêmes grandeurs pour modifier ses conclusions à ce sujet.

Dans ces conditions MAXWELL adopte comme nouvelle grandeur fondamentale indépendante ou bien la quantité d'électricité ou bien la « masse magnétique », *mais non les deux à la fois.* Si nous adoptons la quantité d'électricité comme grandeur indépendante la « masse magnétique » est dérivée et inversement.

Nous avons vu d'ailleurs plus haut (relation 1, 2 et 3) que maintenant nous possédons même des relations mathématiques entre la « masse magnétique » m et le courant I (ou respectivement la quantité d'électricité $Q = It$).

En tenant compte également de la relation aux dimensions (3) et de la dimension de I sous la forme $[I] = [QT^{-1}]$ nous vérifions l'identité entre les deux systèmes de référence de MAXWELL $L.M.T.e$ et $L.M.T.m$.

Pourtant MAXWELL ne se prononce pas entre ces deux systèmes. Il préfère de s'imposer une certaine réserve à ce sujet.

Pour lui, par des considérations que nous venons de voir plus haut, les deux grandeurs e et m sont symétriques. Elles correspondent toutes les deux aux mêmes hypothèses et s'expriment mathématiquement d'une manière équivalente.

Mais aujourd'hui nous nous trouvons en présence des faits nouveaux, qui nous permettent de ne plus hésiter entre la quantité d'électricité et la « masse magnétique ».

Considérations de la pratique courante. Aussi bien dans la pratique des recherches scientifiques, que dans le domaine de la technique nous

---

[1]) MAXWELL, *Op. cit.* Vol. II, Art. 623.

ne rencontrons pas la « masse magnétique ». On l'emploie, tout au plus, comme une fiction de calcul, *qui disparaît dès que nous passons dans le domaine des applications.*

Ce n'est plus le cas pour la quantité d'électricité que nous la rencontrons comme une réalité physique aussi bien dans les applications scientifiques que dans la pratique courante technique.

C'est une considération suffisante pour nous fixer sur la préférence à donner à la quantité d'électricité par rapport à la « masse magnétique » entre les deux systèmes de référence de MAXWELL.

Considérations électroniques. La quantité d'électricité envisagée autrefois sous l'aspect d'un « fluide » continu représentait une hypothèse analogue à celle de la « masse magnétique ». Son existence physique a reçu ultérieurement une confirmation par l'identification du quantum élémentaire de l'électricité.

Cette conception granulaire remonte aux hypothèses des FARADAY. Elle a été soutenue avec enthousiasme par HELMHOLTZ. L'électron est devenu une réalité expérimentale à la suite des travaux de PERRIN vers 1895.

Nous avons eu déjà l'occasion de montrer que cette structure granulaire de l'électricité pose certains problèmes au sujet de l'exposé mathématique des phénomènes électriques [1]).

En effet, les lois électriques telles que nous sommes habitués à les utiliser reposent sur la notion de l'infiniment petit dQ de la quantité d'électricité.

Or, rigoureusement ce dQ n'existe pas. La charge élémentaire e d'un électron est vraiement petite mais elle n'est pas un *infiniment petit.*

Nous avons montré qu'à l'échelle macroscopique de nos possibilités d'investigations les différences sont largement couvertes par les erreurs normales de mesure. En même temps il faut faire une distinction concernant la signification des lois électriques entre le domaine macroscopique et celui microscopique.

Mais de toute façon, on a déjà essayé d'exposer les lois et les grandeurs électriques en fonction de la charge e d'un électron. Nous nous réservons de revenir plus tard sur cette question. Pour le moment nous nous résumons à relever seulement quelques exemples à ce sujet, nous donnant une indication sur la possibilité d'un pareil exposé électronique.

---

[1]) C. BUDEANU, « Sur l'encadrement mathématique des phénomènes électriques par rapport à la structure granulaire de l'électricité » *(Bull. Sect. Scientifique Ac. Roum.* Tome XXIII, No. 1).

En effet, pour le *courant électrique* nous avons relevé qu'avec une certaine hypothèse d'approximation nous pouvons adopter l'expression électronique qui a été déjà envisagée sous la forme:

$$i = Ke\,Sv. \tag{4}$$

K étant le nombre d'électrons libres participant à la conduction par unité de volume, S la section du conducteur, v la vitesse des électrons et e le quantum d'électricité.

Pour la résistivité on a donné l'expression électronique

$$\rho = \frac{mw}{Ke^2\,a} \tag{5}$$

ou m et e sont la masse et la charge élémentaire de l'électron, K la même signification que dans l'expression (4), w la « vitesse d'agitation » des électrons libres, a le « libre parcours moyen » ou le « saut » des électrons [1]).

Le *champ électrique* s'exprime en fonction de la force de Coulomb, f subie par un électron sous la forme:

$$\mathfrak{E} = \frac{f}{e}. \tag{6}$$

L'*induction magnétique* peut être exprimée électroniquement en partant de la force de Lorentz F subie par un électron ayant la vitesse u, dans un champ d'induction B. Si α est l'angle entre les vecteurs B et u nous avons:

$$B = \frac{F}{eu \sin \alpha}. \tag{7}$$

La *tension électrique* V est le travail du vecteur $\mathfrak{E}$ entre les points envisagés

$$V = \int_c \mathfrak{E}\,dl = -\frac{1}{e}\int_c f\,dl. \tag{8}$$

La *résistance électrique* s'exprime électroniquement en utilisant la relation (5)

$$R = \rho\,\frac{l}{S} = \frac{mw}{Ke^2\,a}\,\frac{l}{S}. \tag{9}$$

Le *flux magnétique* se déduit de la relation (7)

$$\Phi = BS = \frac{F}{eu \sin \alpha}\,S. \tag{10}$$

---

[1]) M. Boll, *Exposé électronique des lois d'électricité* (1932).

Le *champ magnétique*, produit par un courant électrique est exprimé, par définition, dans un milieu homogène par

$$H = i\frac{d\Omega}{da} = Ke\,Sv\frac{d\Omega}{da}. \tag{11}$$

L'*induction électrique* produite par une charge électrique $Q = ne$ et traversant une surface dS est exprimée par

$$D = \frac{d\Psi}{dS} = ne\frac{d\Omega}{dS} \tag{12}$$

ou n est le nombre d'électrons de la charge Q et $d\Omega$ l'angle sous lequel on voit la surface dS du point ou se trouve la charge Q.

La perméabilité μ devient, dans ce cas:

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{F}{Ke^2\,Suv\sin\alpha}\frac{da}{d\Omega}. \tag{13}$$

La constante diélectrique ε devient également

$$\varepsilon = \frac{D}{\mathcal{E}} = \frac{ne^2}{f}\frac{d\Omega}{dS}. \tag{14}$$

En continuant, on peut arriver à exprimer électroniquement toutes les grandeurs électriques et magnétiques. Nous précisons qu'il ne s'agit pas ici de la définition pratique de ces grandeurs, mais simplement de leurs *expressions électroniques.*

Ces expressions nous permettent également d'établir les dimensions de toutes ces grandeurs en attribuant à la charge e la dimension $[Q]$ ou $[IT]$.

Grandeurs	Dimensions en prenant comme grandeurs fondamentales	
	L.M.T.Q.	*L.M.T.I.*
Courant électrique	$T^{-1}Q$	I
Champ électrique	$L.M.T^{-2}Q^{-1}$	$L.M.T^{-3}I^{-1}$
Induction magnétique	$M.T^{-1}Q^{-1}$	$M.T^{-2}I^{-1}$
Tension électrique	$L^2M.T^{-2}Q^{-1}$	$L^2MT^{-3}I^{-1}$
Résistance	$L^2M\,T^{-1}Q^{-2}$	$L^2MT^{-3}I^{-2}$
Flux magnétique	$L^2M\,T^{-1}Q^{-1}$	$L^2MT^{-2}I^{-1}$
Champ magnétique	$L^{-1}T^{-1}Q$	$L^{-1}I$
Induction électrique	$L^{-2}Q$	$L^{-2}TI$
Perméabilité	LMQ^{-2}	$LMT^{-2}I^{-2}$
Constante diélectrique	$L^{-3}M^{-1}T^2Q^2$	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$

Ces considérations de nature électronique nous permettent d'arriver aux quelques constatations suivantes:

a) Toutes les grandeurs électriques et *magnétiques* peuvent être exprimées en fonction des grandeurs mécaniques fondamentales et en plus de *la charge électronique e* ayant les dimensions $[Q]$ ou $[IT]$.

b) En passant du domaine des grandeurs mécaniques à l'*Electricité* et au *Magnétisme* nous avons besoin d'*une seule nouvelle grandeur et unité fondamentale.* Ceci confirme la constatation qui a été déjà faite par MAXWELL.

c) La charge électrique *e* ainsi que sa dimension disparaît de toute combinaison des grandeurs électriques et magnétiques nous ramenant dans le domaine de la mécanique.

Ainsi par exemple:

Le produit entre la tension et le courant nous donne

$$[V.I] = [L^2 M.T^{-2}Q^{-1}.T^{-1}Q] = [L^2 MT^{-3}].$$

C'est la dimension d'une puissance.

De même, le produit entre la perméabilité et la constante diélectrique nous donne:

$$[\mu\varepsilon] = [L.M.Q^{-2}L^{-3}M^{-1}T^2Q^2] = [L^{-2}T^2].$$

C'est l'inverse du carré d'une vitesse. C'est la vérification dimensionnelle de la relation de MAXWELL.

d) Nous retrouvons les dimensions de toutes les grandeurs électriques et magnétiques dans le système $L.M.T.Q$ qui ont été indiquées déjà par MAXWELL et constituant un de ses systèmes de référence.

e) D'une manière générale l'exposé électronique repose sur une réalité éminemment physique. La notion de « masse magnétique » n'intervient pas dans cet exposé.

Son inutilité se vérifie également de cette manière.

Considérations de grandeur magnétique fondamentale.

Ce qui a contribué au maintien de la fiction de « masse magnétique » a été la présentation de MAXWELL de cette notion d'une manière tout à fait symétrique à la quantité d'électricité.

La « masse magnétique » est apparue comme une *grandeur magnétique fondamentale.*

Or, en réalité il y a en effet une grandeur magnétique à laquelle on pourrait attribuer le caractère fondamental. Mais c'est le *flux magnétique* et non la « masse magnétique ».

Et *le flux magnétique*, ou *l'induction magnétique*, ce qui revient au même, sont des vraies réalités physiques et non de simples fictions.

D'ailleurs même les propriétés de *l'induction magnétique* nous confirme l'inexistance des « masses magnétiques » isolées, étant donné $\mathrm{div} B = 0$.

D'autre part, la corrélation entre *le flux magnétique* et *la quantité d'électricité* ne constitue pas un simple exposé théorique, mais une réalité physique.

Si la valeur du flux φ_1 traversant un circuit devient φ_2, cette *variation du flux* $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ produit dans le circuit en question un déplacement d'une *quantité d'électricité* définie par

$$Q = \frac{\Delta\varphi}{R}. \tag{15}$$

De même, le produit d'un flux magnétique par une quantité d'électricité est une « *action* » grandeur plus fondamentale encore que l'énergie.

Le fait que la « masse magnétique » a été si longtemps envisagée comme grandeur fondamentale à la place du flux magnétique est dû à l'identité des propriétés mathématiques de ces deux grandeurs.

Un solénoïde à section infiniment petite ou à section finie et longueur infinie est équivalent à un aimant ayant une masse magnétique hypothétique liée à son flux magnétique par la relation $\Phi = 4\pi m$.

Une situation analogue nous avons également en Électricité entre la quantité d'Électricité et le flux d'induction électrique. Mais cette fois la situation est inverse. C'est la quantité d'électricité qui est une réalité et le flux d'induction électrique une fiction.

La « masse magnétique » et le flux magnétique, dans *tout système cohérent* d'unités et par conséquent dans les systèmes particuliers d'unités électromagnétique ou électrostatique, ont les *mêmes dimensions*.

Dans ces conditions nous pouvons remplacer le système de référence de MAXWELL $L.M.T.m.$ par le système $L.M.T.\Phi$, en remplacant tout simplement la « masse magnétique » par le *flux magnétique*.

Nous obtenons de cette manière un système cohérent à quatre unités basé sur une grandeur magnétique effectivement fondamentale et ayant les mêmes propriétés mathématiques de symétrie par rapport à la quantité d'électricité que le système de MAXWELL.

Nous relevons quelques exemples, à ce sujet, dans le tableau suivant :

Systèmes de références magnétiques $LMTm$ (Maxwell)	$LMT\Phi$	Système de référence électrique $LMTQ$
$Q = L^2 MT^{-1} m^{-1}$	$= L^2 MT^{-1} \Phi^{-1}$	$\Phi = L^2 MT^{-1} Q^{-1}$
$E = T^{-1} m$	$= T^{-1} \Phi$	$I = T^{-1} Q$
$D = MT^{-1} m^{-1}$	$= MT^{-1} \Phi^{-1}$	$B = MT^{-1} Q^{-1}$
$\mathcal{E} = L^{-1} T^{-1} m$	$= L^{-1} T^{-1} \Phi$	$H = L^{-1} T^{-1} Q$

Nous constatons:

a) La possibilité de remplacer le système *L.M.T.m.* de MAXWELL, par le système en concordance avec les réalités physiques, *L.M.T.*Φ.

b) Une symétrie subsiste entre certaines grandeurs telles que: la quantité d'électricité Q et le flux Φ, la force électromotrice E et le courant I, l'induction électrique D et l'induction magnétique B, le champ électrique $\mathfrak{E}$ et le champ magnétique H, etc. Et, ce qui est plus important, cette symétrie subsiste *indépendamment si nous nous référons à la grandeur hypothétique m ou à la grandeur physique* Φ.

D'ailleurs cette identité entre m et Φ, figure déjà aujourd'hui dans certains traités modernes. M. Dr.-Ing. GÜNTHER OBERDORFER dans son admirable ouvrage *Lehrbuch der Elektrotechnik* (édition 1939) relève textuellement: « so erkennt man, dass die früher als Polstärke oder auch « magnetische Menge bezeichnete Grösse nichts anderes ist als der « Kraftfluss Φ des Magnetfeldes ». Nous remarquons que dans cette affirmation le facteur 4π est supprimé, étant, donné qu'elle est envisagée en régime « rationalisé ».

Dans ces conditions, si nous pensons à une grandeur magnétique fondamentale, c'est le *flux magnétique* qu'il faut envisager et non la « masse magnétique ». Le *flux magnétique* nous rend les mêmes services apparents de présentation mathématique, mais de plus il constitue la vraie réalité magnétique fondamentale. En outre, le *flux magnétique* représente la grandeur qui établit la corrélation immédiate et directe entre l'électricité et le magnétisme.

Il est vrai que l'état de magnétisation d'un aimant ou d'un solénoïde peut être exprimé par son *Moment magnétique* $\mathfrak{M}$, grandeur ayant une signification physique, ce qui est présenté assez souvent comme une justification de la masse magnétique m, étant donné la relation

$$\mathfrak{M} = m\,l. \tag{18}$$

Mais la relation (18) ne suffit pas à nous identifier *physiquement* la masse magnétique m. Tout au plus la relation (18) donne à la masse magnétique le caractère d'une grandeur hypothétique de calcul.

Le substratum physique du moment magnétique est toujours le courant électrique. Une spire d'une section S située dans un milieu homogène de perméabilité μ et traversée par un courant I est caractérisée par un moment magnétique:

$$\mathfrak{M} = S\,I\,\mu \tag{19}$$

ce qui met en évidence, une fois de plus, la vraie corrélation physique entre les phénomènes électriques et magnétiques.

Nous pouvons retenir la notion du moment magnétique pour caractéris r l'état de magnétisation d'un aimant, mais nous devons retenir en même temps que la *cause physique* de ce moment magnétique n'est pas la masse magnétique mais les courants électriques atomiques suivant la conception d'AMPÈRE et en concordance avec la relation (19).

* * *

Dans ces conditions, aujourd'hui nous pouvons affirmer qu'une corrélation existe entre les grandeurs électriques et magnétiques. Or, c'est justement en nous basant sur cette corrélation que nous pouvons nous débarasser de la fiction de « masse magnétique ».

Dans l'état actuel de nos connaissances la quantité d'électricité et par conséquent le courant électrique sont acceptés comme des réalités physiques.

Et ces réalités, en tenant compte des lois fondamentales de l'électricité et de l'électromagnétisme, nous suffisent dans la pratique, comme il a été montré depuis longtemps par M. le Prof. N. VASILESCU-KARPEN pour expliquer tous les phénomènes électriques et magnétiques.

En même temps, la conception électronique, ainsi que les considérations de présentation mathématique, les considérations concernant la synthèse des lois et des grandeurs électromagnétiques, les considérations de la pratique courante et spécialement les considérations de grandeur magnétique fondamentale confirment toutes ces conclusions au sujet de l'inutilité de la fiction de « masse magnétique ».

621 ÉLECTROTECHNIQUE

ASPECTS PHYSIQUES ET MATÉMATIQUES DES PHÉNOMÈNES TRANSITOIRES

par **I. Constantinescu**

L'auteur passe en revue les différents genres de phénomènes transitoires et expose succintement leurs aspects physiques et mathématiques.

Quand on parle des phénomènes transitoires on est obligé de les séparer au moins en deux groupes:

Le premier comprend ceux qui se développent dans les systèmes dont les dimensions ne sont pas très grandes de sorte que les phénomènes de propagation n'interviennent pas.

Le second comprend ceux dans lesquels ces phénomènes interviennent.

Considérons d'abord le premier cas.

A) Systèmes en régime quasi-stationaire

Une force constante ou périodique appliquée brusquement à un système (mécanique ou électrique) lui impriment deux sortes de mouvements, indépendants l'un de l'autre si le système est linéaire. L'un est dû uniquement à la force agissante; c'est le mouvement ou oscillation forcée. L'autre est dû uniquement aux propriétés intrinséques du système (inertie et élasticité, ou champ magnétique et champ électrique); c'est le mouvement ou oscillation propre du système.

Ce dernier mouvement est déclenché par le choc initial de la force appliquée qui développe une réaction égale à cette force. C'est cette réaction ou ce choc qui communique au système une certaine énergie potentielle, ou cinétique, ou les deux à la fois.

Si les système comporte seulement de l'élasticité ou seulement de l'inertie, l'énergie accumulée pendant le choc, se dissipe ensuite librement dans les résistances du système suivant une loi exponentielle qui

est la loi la plus naturelle dans le monde physique, attendu qu'elle exprime que le taux de dissipation par unité de temps est constant.

Si le système possède à la fois de l'élasticité et de l'inertie, il est alors le siège d'un échange alternatif d'énergie qui passe successivement d'une forme à l'autre avec une fréquence et un amortissement qui dépendent des constantes du système.

Pour plus de précision considérons le cas le plus général d'un système à, n, degrés de liberté, ou bien pour ne parler que le langage électrique, considérons un réseau à, n, mailles indépendantes et désignons par i_1, $i_2, \ldots i_n$, les courants dans les mailles successives 1, 2, $\ldots n$, du réseau. Désignons en outre par, a_{jk}, les chutes de tension dans la maille, j, provoquées par le courant unité passant dans la maille, k.

Nous aurons alors, pour définir le régime libre, le système d'équations homogènes:

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}\, i_1 + a_{12}\, i_2 + \ldots\ldots + a_{1n}\, i_n = 0 \\ a_{21}\, i_1 + a_{22}\, i_2 + \ldots\ldots + a_{2n}\, i_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, i_1 + a_{n2}\, i_2 + \ldots\ldots + a_{nn}\, i_n = 0 \end{cases}$$

où

$$a_{jk}\, i_k = R_{jk}\, i_k + L_{jk} \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_{jk}} \int i_k dt$$

Si l'on exclue la solution banale

$$i_k = 0 \qquad (k = 1,\ 2, \ldots\ldots\ n)$$

le système pourra toujours admettre une solution exponentielle.

$$(2) \qquad i_k = J_k\, e^{pt} \qquad (k = 1,\ 2, \ldots n)$$

ou, J_k, et, p, sont des constantes à déterminer comme on le verra par la suite.

Le système (1) devient, après l'élimination du facteur exponentiel e^p ,

$$(3) \qquad \begin{cases} C_{11}\, J_1 + C_{12}\, J_2 + \ldots + C_{1n} J_n = 0 \\ C_{21}\, J_1 + C_{22}\, J_2 + \ldots + C_{2n} J_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{n1}\, J_1 + C_{n2}\, J_2 + \ldots + C_{nn} J_n = o \end{cases}$$

où

$$C_{jk} = R_{jk} + pL_{jk} + \frac{1}{pC_{jk}} \cdot$$

Ce système admet une solution différente de zéro seulement si le déterminant des coefficients est nul, c'est-à-dire si:

$$(4) \qquad D(p) = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \ldots\ldots\ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} \ldots\ldots\ldots & C_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ C_{n1} & C_{n2} \ldots\ldots\ldots & C_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Le degré de ce déterminant est égal au maximum à, $2n$, et ceci seulement si toutes les mailles possèdent aussi bien de l'inductance que de la capacitance.

Soit alors p_1, p_2, p_3,..... p_{2n}, les racines de l'équation:

$$(5) \qquad D(p) = 0$$

L'équation (2) nous permet alors de conclure que dans chaque maille, il y aura autant de courants partiels qu'il y a de racines dans l'équation (5).

Donc:

$$(6) \qquad i_k = J_{k1}\, e^{p_1 t} + J_{k2}\, e^{p_2 t} + \ldots\ldots + J_{k2n}\, e^{p_{2n} t}$$

où J_{k1}, J_{k2}..... J_{k2n} sont des constantes à déterminer par les conditions au limite.

Les racines p_1, p_2..... p_{2n} de l'équation déterminante $D(p) = 0$ représentent, ce qu'on appelle les modes naturels ou oscillations caractéristiques du système. Chaque oscillation caractéristique comporte une fréquence propre ou naturelle et un amortissement naturel.

Il convient de préciser que le terme d'oscillation caractéristique ne représente pas toujours une oscillation physique ou réelle. Il faut combiner deux oscillations caractéristiques conjuguées pour obtenir une oscillation physique.

Si alors $J_{k1}\, e^{p_1 t}$ et $J_{k2}\, e^{p_2 t}$ sont deux oscillations caractéristiques conjuguées on doit avoir séparément:

$$\begin{cases} p_1 = -a + j\omega \\ p_2 = -a - j\omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} J_{k1} = A - jB \\ J_{k2} = A + jB. \end{cases}$$

En effet si ces conditions sont remplies et si l'on pose $tg\varphi = \dfrac{B}{A}$ on a:

$$J_{k1}\, e^{p_1 t} + J_{k_2}\, e^{p_2 t} = 2e^{-at}[A \cos\omega t + B \sin\omega t]$$

$$= 2Ae^{-at} \frac{\cos(\omega t - \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Ce qui représente une oscillation amortie réelle.

Si l'amortissement est très grand l'oscillation peut devenir apériodique.

Si enfin une des racines est réelle ($\omega = 0$) elle est nécessairement négative ($a < 0$) parce qu'elle doit représenter une dissipation d'énergie suivant une loi exponentielle.

Tout ceci est très simple quant au point de vue formel, mais quand on veut trouver une solution concrète dans un réseau tant soit peu compliqué on rencontre des difficultés insurmontables quand il s'agit de la détermination des contacts arbitraires.

C'est pourquoi la solution d'un réseau à plusieurs mailles, n'est pas toujours possible par les méthodes classiques.

Intégrale de FOURIER.

Une autre méthode qui en certains cas rend des services appréciables repose sur l'emploi de l'intégrale de FOURIER.

Cette intégrale peut représenter n'importe quelle fonction arbitraire.

Dans le cas particulier d'une force électromotrice constante E, appliquée au moment $t = 0$, cette intégrale prend la forme:

$$E(t) = \frac{E}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{p}\, dp. \tag{7}$$

La fonction $E(t)$ telle qu'elle est définie par l'intégrale (7) est nulle pour, $t < 0$, et égale à, E, pour, $t > 0$.

Le chemin d'intégration doit être pris sur l'axe imaginaire, mais on évitera l'origine par un petit semi-cercle à droite, attendu que l'origine, $p = 0$, est un pôle de la fonction à intégrer.

La force électromotrice totale E, est donc décomposée dans un nombre infini de forces électromotrices élementaires:

$$dE = \frac{E dp}{2i\pi p} e^{pt}$$

où la variable d'intégration, $p = i\omega$, est une pulsation ou fréquence angulaire imaginaire.

Chaque force électromotrice élémentaire, considérée comme agissant en régime permanent, donne naissance à un courant élémentaire, di, qu'on peut déterminer si l'on connaît l'impédance $Z(p) = Z(i\omega)$ du circuit en régime permanent.

Ce courant élémentaire sera alors de la forme:

$$di = \frac{E dp}{2i\pi p Z(p)} e^{pt}.$$

Si le système est linéaire on est en droit d'appliquer le principe de la superposition des effets élémentaires pour trouver l'effet total.

Le courant total sera donc:

$$(8) \qquad i(t) = \frac{E}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i+\infty} \frac{e_{pt}}{pZ(p)}\, dp = \frac{E}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega Z(i\omega)}\, d\omega.$$

La détermination du courant transitoire se trouve donc ramenée à l'application des propriétés des circuits en régime permanent.

Pour illustrer par un exemple l'application de cette méthode, prenons le cas simple d'un circuit comprenant de la résistance et de l'inductance.

L'impédance d'un tel circuit en régime permanent est de la forme

$$Z(i\omega) = R + i\omega L = R + pL = Z(p).$$

La seconde forme de (8) nous donne alors:

$$i(t) = \frac{E}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega (R + i\omega L)}\, d\omega = \frac{E}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}\right)}}{\omega \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\, d\omega.$$

Ceci nous montre que le courant n'a plus la forme de la tension appliquée:

$$e(t) = \frac{E}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega}\, d\omega$$

et les facteurs qui interviennent pour modifier cette forme sont:

a) Le module $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ de l'impédance $Z = R + j\omega L$ qui opère une distorsion d'amplitude;

b) L'angle de phase $\theta = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}$ de cette même impédance, qui donne naissance à une distorsion de phase.

Le régime transitoire est donc dû à l'effet combiné de ces deux distorsions.

Noublions pas toutefois la caractéristique essentielle de la méthode de l'intégrale de Fourier qui réside dans le fait que l'impédance agit pendant le régime transitoire de la même façon que dans le régime permanent.

Pour calculer effectivement cette intégrale on peut la mettre sous la forme:

$$i(t) = \frac{E}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{Lp\left(p + \frac{R}{L}\right)}\, dp.$$

Décrivons deux sémi-cercles autour l'origine: l'un à droite de l'origine avec un rayon infiniment petit; l'autre à gauche avec un rayon infiniment grand.

Ces deux cercles ensemble avec l'axe imaginaire, définissent un contour fermé à l'intérieur duquel se trouve les deux pôles, $p = 0$ et $p = -\frac{R}{L}$ de la fonction à intégrer.

L'intégrale prise le long de ce contour est égale à $2i\pi$ fois la somme des résidus de la fonction à intégrer.

Le résidu de cette fonction pour, $p = 0$, est:

$$\left(\frac{e^{pt}}{R + pL}\right)_{p=0} = \frac{1}{R}.$$

Le résidu de la même fonction pour $p = -\frac{R}{L}$ est:

$$\left(\frac{e^{pt}}{Lp}\right)_{p=-\frac{R}{L}} = -\frac{e^{-\frac{Rt}{L}}}{R}.$$

Attendu que l'intégrale le long du cercle de rayon infiniment grand est nulle, on aura:

$$i(t) = \frac{E}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{p(R + pL)} dp = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

On appreciera la facilité avec laquelle, au moins dans ce cas, l'intégrale de Fourier conduit au résultat cherché.

S'il y a toutefois une difficulté, elle réside dans la résolution de l'équation $Z(p) = 0$, mais cette difficulté appartient aussi à la méthode classique.

Quand on connaît ces racines ou peut aller encore plus vite, et écrire directement la solution sous la forme:

$$i(t) = \frac{E}{Z(o)} + E\sum_i \frac{e^{p_i t}}{p_i \left(\frac{dZ}{dp}\right)_{p_i}}$$

où p_i est une des racines de l'équation $Z(p) = 0$ et $\left(\frac{dZ}{dp}\right)$ est la valeur de la dérivée $\left(\frac{dZ}{dp}\right)$ pour $p = p_i$.

Le premier terme représente la solution en régime permanent (fréquence $p = 0$) et le reste représentent les termes transitoires.

Cette expression est connue sous le nom du théorème du développement de HEAVISIDE et représente la valeur de l'intégrale de FOURIER (8) calculée par une méthode analogue à la précédente.

L'importance de ce théorème réside dans le fait qu'il permet dans bien de cas, de trouver une solution, quand la méthode classique est impuissante d'en trouver une.

Il nous dispense en outre de la nécessité de déterminer les constantes arbitraires, ce qui est quelquefois une opération assez difficile.

On remarquera enfin que le théorème de HEAVISIDE donne la solution en fonction des oscillations caractéristiques du système.

B) Systèmes en régime de propagation

Disons maintenant quelques mots sur les phénomènes transitoires provoqués par les ondes mobiles le long des lignes de transmission.

A cet égard il faut cette fois distinguer entre deux espèces de phénomènes transitoires.

La première classe comprend les phénomènes transitoires dûs aux réflexions multiples aux deux extrémités de la ligne. Ces réflexions se produisent quand les impédances terminales ne coïncident pas avec l'impédance caractéristique de la ligne et atteignent leur ampleur maximum quand la ligne est ouverte ou en court circuit (réflexion totale).

Dans tous ces cas le courant ou la tension en un point de la ligne n'atteint pas sa valeur finale qu'après un certain temps égal à la durée du phénomène transitoire.

Il faut préciser toutefois que cette valeur finale est atteinte par des sauts successifs distancés à des intervalles de temps égaux aux temps de propagation des ondes successivement refléchies aux deux extrémités de la ligne jusqu'au point considéré.

La solution se présente alors sous la forme d'une somme de termes qu'on peut calculer séparément si l'on connaît la forme de la solution pour la ligne de longueur infinie.

Notons enfin que sur les lignes sans pertes les réflexions produisent des ondes stationnaires et même des surtensions si certaines conditions sont remplies.

C'est le cas des lignes quart de longueur d'onde et des antennes de *t. s. f.*

La seconde classe de phénomènes transitoires dûs aux ondes mobiles comprend ceux qui prennent naissance par la variation de la vitesse de propagation avec la fréquence.

La durée du phénomène transitoire est dans ce cas égale à la différence de temps entre le moment où arrive la première fréquence et le moment où arrive la dernière fréquence.

Sur les lignes uniformes c'est les hautes fréquences qui arrivent les premières et les basses fréquences les dernières.

La situation inverse se présente sur les lignes chargées.

Heureusement ce phénomène n'est perceptible que sur les lignes téléphoniques très longues.

Dans le cas des transmissions des images il se fait sentir sur les lignes beaucoup plus courtes de sorte qu'il est nécessaire d'employer de dispositifs spéciaux (compensateurs de phase) pour égaliser les vitesses de propagation à toutes les fréquences.

SUR LES CONDITIONS DE FONCTIONNEMENT DES RÉSEAUX TRIPHASÉS DÉSÉQUILIBRÉS

par **Gheorghe Petrescu**

Les conditions de fonctionnement des réseaux électriques triphasés sont considérablement influencées par le déséquilibre de la charge sur les trois phases.

L'effet produit par ce déséquilibre est particulièrement intéressant au point de vue de la dissymétrie qui en résulte pour les tensions aux bornes des récepteurs.

L'importance de cet effet dépend essentiellement du montage des récepteurs: en triangle, en étoile sans fil neutre ou en étoile avec fil neutre.

Nous nous proposons d'étudier dans ce qui suit, à l'aide d'un diagramme vectoriel simple et suggestif l'influence due au déséquilibre de la charge, sur les conditions de fonctionnement des réseaux électriques triphasés pour chacun de ces montages.

Afin de rendre l'exposition plus simple, nous faisons la supposition que, quelque soit le déséquilibre qui en résulte pour les tensions aux récepteurs, les tensions aux générateurs qui alimentent le reseau réstent symétriques.

En ce qui concerne la charge déséquilibrée nous considérons d'abord qu'elle est définie par les valeurs des courants sur les trois phases et par leurs décalages. En ce cas nous essayerons de déterminer aussi les impédances équivalentes de l'ensemble des récepteurs, sur les trois phases.

Nous considérons après que la charge déséquilibrée est définie par les impédances équivalentes de l'ensemble des récepteurs, sur les trois phases et nous tacherons de déterminer aussi les valeurs des courants sur les trois phases.

Montage en triangle.

a) Considérons d'abord que les chutes de tension dans les conducteurs de la ligne d'alimentation soient négligeables. En ces conditions, les tensions entre les phases aux récepteurs sont identiques aux tensions entre les phases aux générateurs.

Soient U_{12}, U_{23} et U_{31} (fig. 1), les tensions entre les phases considérées comme résultantes des tensions en étoile V_1, V_2 et V_3, figurées en pointillé.

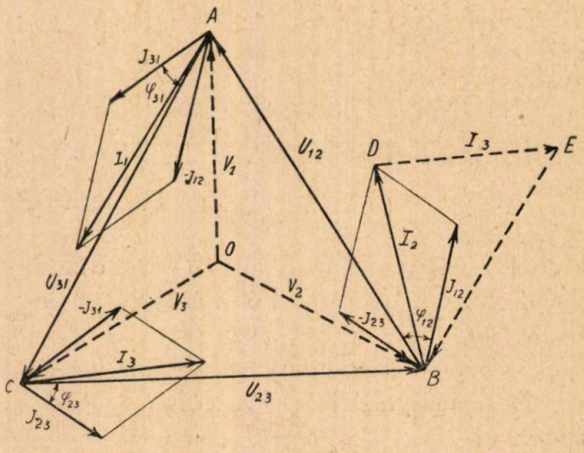


Fig. 1.

Soient J_{12}, J_{23} et J_{31} les courants entre les phases (en triangle) aux récepteurs et soient φ_{12}, φ_{23} et φ_{31} les décalages de ces courants par rapport aux tensions respectives entre les phases.

Pour déterminer les trois courants dans la ligne I_1, I_2 et I_3 il faut composer les courants (fig. 2):

$$\overline{I}_1 = \overline{J}_{12} - \overline{J}_{31} \qquad \overline{I}_2 = \overline{J}_{23} - \overline{J}_{12} \text{ et } \overline{I}_3 = \overline{J}_{31} - \overline{J}_{23}$$

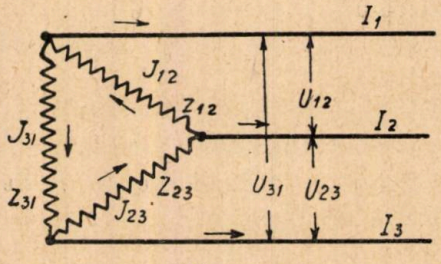


Fig. 2.

Il est à remarquer que, quelque soit le déséquilibre des courants J_{12}, J_{23} et J_{31} entre les phases, les courants dans la ligne doivent satisfaire la relation: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

Cette considération résulte de l'application de la première loi de KIRCHOFF si l'on suppose que les trois conducteurs sont coupés par un plan et si l'on exprime la condition que la somme des courants qui entrent ou sortent de ce plan doit être nulle.

On est conduit d'ailleurs à la même conclusion si l'on fait la somme des expressions de ces courants:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31}$$

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{12}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23}$$

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

En faisant la composition vectorielle de ces courants, représentés par le triangle fermé *BDE* (fig. 1) on peut vérifier aisément cette conclusion.

Il n'est pas de même pour les courants J_{12}, J_{23} et J_{31} entre les phases, dont la somme n'est pas subordonnée à cette condition. En pratique, seulement dans le cas où ces courants sont égaux et symétriques, c'est-à-dire dans le cas des réseaux équilibrés, la relation $J_{12} + J_{23} + J_{31} = 0$ est satisfaite.

b) En connaissant les tensions U_{12}, U_{23} et U_{31} et les courants J_{12}, J_{23} et J_{31}, il est très facile de déterminer les impédances équivalentes des récepteurs:

$$Z_{12} = \frac{U_{12}}{J_{12}} \qquad Z_{23} = \frac{U_{23}}{J_{23}} \qquad Z_{31} = \frac{U_{31}}{J_{31}}$$

c) Il est également facile pour ce montage de déterminer les courants si l'on connaît les impédances équivalentes des récepteurs

$$J_{12} = \frac{U_{12}}{Z_{12}} \qquad J_{21} = \frac{U_{23}}{Z_{23}} \qquad J_{31} = \frac{U_{31}}{Z_{31}}$$

d) En ce qui concerne les tensions aux récepteurs, si les chutes de tension dans les conducteurs de la ligne d'alimentation sont négligeables, leurs valeurs sont identiques aux tensions aux générateurs et par conséquent elles ne sont aucunement influencées par le déséquilibre des courants. Il peut y avoir de courants seulement sur une phase ou sur deux phases, le fonctionnement des récepteurs du point de vue des courants et des tensions n'est nullement influencé par ce déséquilibre.

e) Si la chute de tension dans les conducteurs de la ligne n'est pas négligeable, les valeurs des chutes des tensions sur les trois conducteurs étant proportionnelles aux courants I_1, I_2 et I_3 et par conséquent

inégales, il en résulte un déséquilibre pour les tensions U'_{12}, U'_{23} et U'_{31} aux bornes des récepteurs. L'importance de ce déséquilibre dépend de la valeur relative des chutes de tension, mais reste, en général pour les cas de la pratique courante, assez faible.

Montage en étoile sans fil neutre.

Considérons d'abord que les chutes de tension dans les conducteurs de la ligne soient négligeables et par conséquent les tensions entre les phases aux récepteurs sont identiques aux tensions entre les phases aux générateurs U_{12}, U_{23} et U_{31}, (fig. 3).

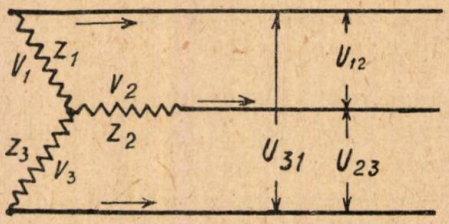


Fig. 3.

Soient I_1, I_2 et I_3 les courants dans les trois phases. Comme au point neutre ainsi que sur la ligne, ces courants doivent satisfaire à la relation $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ il en résulte que le triangle OAB formé par les vecteurs réprésentant les courants doit être fermé (fig. 4).

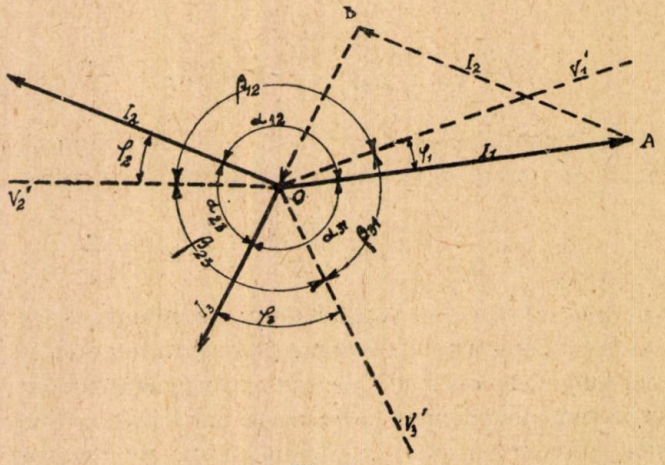


Fig. 4.

Cette condition conduit à la conclusion que quelque soit le déséquilibre des récepteurs, le courant sur une phase ne peut dépasser la somme des deux autres. Il résulte aussi que si l'un des courants est nul, les deux autres doivent être égaux et de sens inverse.

De même si deux des courants sont nuls, le troisième doit être également nul, conséquence qui résulte ou point de vue pratique de l'impossibilité de fermer le circuit de ce courant.

Supposons qu'on ait tracé dans la figure 4 le triangle OAB représentant la diagramme des courants $I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

En déplaçant les vecteurs I_2 et I_3 au point O, on construit l'étoile des vecteurs correspondant aux courants, faisant entre eux les angles α_{12}, α_{23} et α_{31} qui résultent de la condition que le triangle des courants doit être fermé.

Supposons que l'on connaisse des décalages φ_1, φ_2 et φ_3 des courants par rapport aux tensions en étoile correspondantes et traçons les directions V'_1, V'_2 et V'_3 de ces tensions, faisant entre elles les angles β_{12}, β_{23} et β_{31}.

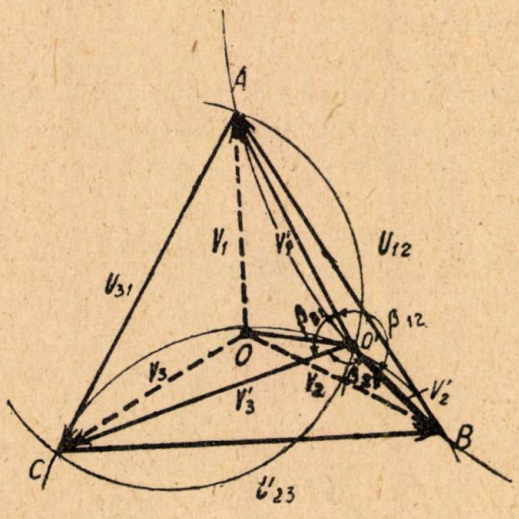


Fig. 5.

Pour déterminer les valeurs de ces tensions il faut observer que chaque vecteur qui représente la tension entre les phases est la résultante des deux vecteurs $\overline{U}_{12} = \overline{V}'_1 - \overline{V}_2$ décalés entre eux de l'angle β_{12}.

Traçons alors sur chaque côté du triangle des tensions entre les phases U_{12}, U_{23} et U_{31} (fig. 5) des arcs de cercles capables des angles β_{12}, β_{23} et β_{31}.

Le point commun d'intersection des trois arcs de cercle O' correspond au point neutre de l'étoile et les vecteurs $V'_1 = OA$, $V'_2 = OB$ et $V'_3 = OC$ représentent les trois tensions en étoile.

On s'aperçoit aisément que les trois tensions en étoile V'_1, V'_2 et V'_3 qui correspondent aux récepteurs sont complètement différentes des

tensions en étoile V_1, V_2 et V_3 symétriques qui correspondent aux générateurs. Entre le point neutre de l'étoile des récepteurs O' et le point neutre de l'étoile des générateurs O il existe une différence de potentiel représentée par le vecteur OO'.

En examinant sur le diagramme (fig. 6) les diverses positions du point neutre des récepteurs O', on est amené aux conclusions suivantes:

Quel que soit le déséquilibre de la charge, si les décalages sur les trois phases sont égaux $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$, les angles α_{12}, α_{23} et α_{31} entre les courants sur les trois phases sont égaux aux angles β_{12}, β_{23} et β_{31} entre les tensions respectives.

Comme le triangle des courants doit se fermer, il résulte que les angles α_{12}, α_{23} et α_{31} entre les courants et par conséqent les angles β_{12}, β_{23} et β_{31} entre les tensions ne peuvent pas dépasser 180°, de façon que le point neutre O' ne peut pas se trouver à l'extérieur du triangle des tensions ABC.

La position du point O' situé sur l'un des côtés de ce triangle, correspond au cas où deux des tensions sont en opposition, et par conséquent, les deux courants qui leurs correspondent sont égaux et de signe contraire tandis que le troisième courant et nul.

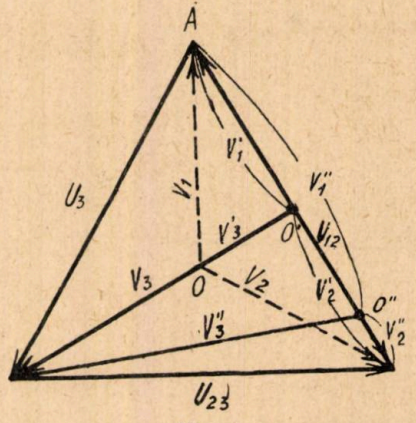


Fig. 6.

Si le point O' est situé au milieu du côté du triangle, les deux tensions V_1' et V_2' étant égales, il résulte que les impédances équivalentes des deux phases sont aussi égales $Z_1 = Z_2$ tandis que l'impédance sur la troisième phase Z_3 est infinie.

En ce cas la tension maxima V_3' correspond à la phase dont le courant I_3 est nul.

Si le point O' est situé dans la position O'' et les deux tensions V_1'' et V_2'' sont inégales, il résulte que les impédances sur les phases

respectives sont différentes. Dans le cas que l'impédence Z_2 sur une phase diminue jusqu'à zéro, ce qui correspond au court-circuit, le point O' se déplace de la position O'' vers le point B.

En ces conditions les courants sur deux phases sont égaux $I_1 = I_2$ et le troisième est nul $I_3 = 0$, tandis que les valeurs de la tension sur d'autres phases sont égales et respectivement nulles:

$$V_1' = V_3' = U_{12} = U_{23} \qquad \text{et} \qquad V_2' = 0.$$

Dans les réseaux de distribution pour la lumière qui représentent par excellence les réseaux déséquilibrés, on peut considérer que pratiquement les décalages sont nuls $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$, de façon que ces conclusions sont entièrement valables.

Si les décalages sur les trois phases φ_1, φ_2 et φ_3 ne sont pas identiques, les angles entre les tensions β_{12}, β_{23} et β_{31}, sont différents des angles entre les courants et par conséquent peuvent dépasser 180° de façon que le point neutre peut se trouver à l'extérieur du triangle ABC.

b) En connaissant les courants I_1, I_2 et I_3 et les tensions V_1, V_2' et V_3' ainsi déterminées, il est facile de déterminer les impédances équivalentes des récepteurs:

$$Z_1 = \frac{V_1'}{I_1} \quad Z_2 = \frac{V_2'}{I_2} \quad Z_3 = \frac{V_3'}{I_3}$$

c) En supposant que l'on connaisse les impédances équivalentes des récepteurs Z_1, Z_2 et Z_3 si l'on veut, déterminer les courants I_1, I_2 et I_3 et les tensions en étoile V_1', V_2' et V_3' on peut ecrire:

$$\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0$$

$$\overline{V}_1' = \overline{I}_1 Z_1 \qquad \overline{V}_1' - \overline{V}_2' = \overline{U}_{12}$$

$$\overline{V}_2' = \overline{I}_2 Z_2 \qquad \overline{V}_2' - \overline{V}_3' = \overline{U}_{23}$$

$$\overline{V}_3' = \overline{I}_3 Z_3 \qquad \overline{V}_3' - \overline{V}_1' = \overline{U}_{31}$$

par conséquent

$$\overline{I}_1 Z_1 - \overline{I}_2 Z_2 = \overline{U}_{12}$$

$$\overline{I}_2 Z_2 - \overline{I}_3 Z_3 = \overline{U}_{23}$$

$$\overline{I}_3 Z_3 - \overline{I}_1 Z_1 = \overline{U}_{31}$$

et comme $\overline{I}_2 = -(\overline{I}_1 + \overline{I})_3$

$$\overline{I}_1 Z_1 + \overline{I}_1 Z_2 + \overline{I}_3 Z_2 = \overline{U}_{12}$$

$$-\overline{I}_1 Z_2 - \overline{I}_3 Z_2 - \overline{I}_3 Z_3 = \overline{U}_{23}$$

en multipliant la première équation avec Z_2

$$\bar{I}_1 (Z_1 + Z_2) Z_2 + \bar{I}_3 Z_2^2 = \bar{U}_{12} Z_2$$

et la deuxième équation avec $Z_1 + Z_2$

$$-\bar{I}_1 Z_2 (Z_1 + Z_2) - \bar{I}_3 (Z_2 + Z_3) (Z_1 + Z_2) = \bar{U}_{23} (Z_1 + Z_2)$$

et en faisant la somme on obtient

$$-\bar{I}_3 (Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1) = \bar{U}_{12} Z_2 + \bar{U}_{23} (Z_1 + Z_2).$$

Si l'on note $Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1 = X$ on peut écrire

$$-\bar{I}_3 X = \bar{U}_{12} Z_2 + \bar{U}_{23} Z_2 + \bar{U}_{23} Z_1$$

ou

$$-\bar{I}_3 X = Z_2 (\bar{U}_{12} + \bar{U}_{23}) + \bar{U}_{23} Z_1$$

mais

$$\bar{U}_{12} + \bar{U}_{23} = -\bar{U}_{31};$$

donc

$$\bar{I}_3 X = \bar{U}_{31} Z_2 - \bar{U}_{23} Z_1$$

ou

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{31} Z_2 - \bar{U}_{23} Z_1}{X}$$

de même

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{23} Z_1 - \bar{U}_{12} Z_3}{X}$$

et

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_{12} Z_3 - \bar{U}_{31} Z_2}{X}$$

De ces relations il résulte que si l'une des impédances est nulle, par exemple Z_1, les courants deviennent

$$\bar{I}_1 = \bar{U}_{12} Z_3 - \bar{U}_{31} Z_2$$

$$\bar{I}_2 = -\frac{\bar{U}_{12}}{Z_2}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{31}}{Z_3}$$

et les tensions en étoile

$$V'_1 = 0$$

$$V'_2 = -\bar{U}_{12}$$

$$V'_3 = \bar{V}_{31}.$$

Ces résultats étaient à prévoir car l'impédance Z_1 étant nulle, le point neutre de la charge triphasée est au potentiel de la phase 1, et par conséquent il occupe le sommet A du triangle des tensions d'alimentantion ABC.

Il en résulte également que si l'une des impédances est infinie, par exemple Z_1 les courants deviennent

$$\bar{I}_1 = 0$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{23}}{Z_2 + Z_3}$$

$$\bar{I}_3 = -\frac{\bar{U}_{23}}{Z_2 + Z_3}$$

et les tensions en étoile

$$\bar{V}'_1 = \frac{\bar{U}_{12} Z_3 - \bar{U}_{31} Z_2}{Z_2 + Z_3}$$

$$V'_2 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \bar{U}_{23}$$

$$V'_3 = -\frac{Z_1}{Z_2 + Z_3} \bar{U}_{23}.$$

Ces résultats s'expliquent également en remarquant que si Z_1, est infinie, la tension U_{23} entre les phases alimente l'ensemble des deux impédances Z_2 et Z_3 montées en serie.

Si deux des impédances Z_1 et Z_2 sont nulles, les courants I_1 et I_2 deviennent infinis et le système est en court-circuit.

Si deux des impédances Z_1 et Z_2 sont infinies tous les trois courants sont nuls et les trois tensions indéterminées, ce qui correspond parfaitement à la réalité pratique.

d) Si la chute de tension dans les conducteurs de la ligne n'est pas négligeable, les valeurs de cette chute de tension sur les trois conducteurs de la ligne étant proportionnelles aux courants I_1, I_2 et I_3 et par conséquent dissymétriques, il en résultera un déséquilibre supplémentaire de tensions. L'importance de ce déséquilibre dépend de la valeur relative de la chute de tension, mais au point de vue pratique, elle reste relativement faible par rapport au déséquilibre provoqué directement par le déséquilibre de la charge.

Montage en étoile avec fil neutre.

a) Considérons d'abord que les chutes de tension dans les conducteurs de la ligne soient négligeables et par conséquent les tensions entre les phases aux récepteurs sont identiques aux tensions entre les phases aux générateurs U_{12}, U_{23} et U_{31}.

Soient I_1, I_2 et I_3 les courants dans les trois phases que l'on suppose connues et I_0 le courant dans le fil neutre (fig. 7).

Ces courants doivent satisfaire à la relation $I_1 + I_2 + I_3 = -I_0$.

Comme le quadrilatère formé par les vecteurs représentant les courants est indé erminé, il résulte que cette condition peut être toujours satisfaite.

En ces conditions le décalage entre les courants dépend seulement des angles de décalage φ_1, φ_2 et φ_3 de ces courants par rapport aux

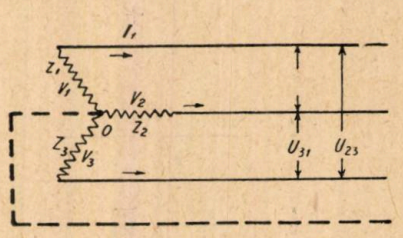


Fig. 7.

tensions en étoile. Ces tensions sont parfaitement déterminées par les trois points A, B et C du triangle des tensions entre les phases U_{12}, U_{23} et U_{31} et par le point neutre O, invariablement lié au point neutre des générateurs.

La valeur du courant dans le fil neutre peut être aisément déterminé en faisant la résultante des courants I_1, I_2 et I_3 (fig. 8).

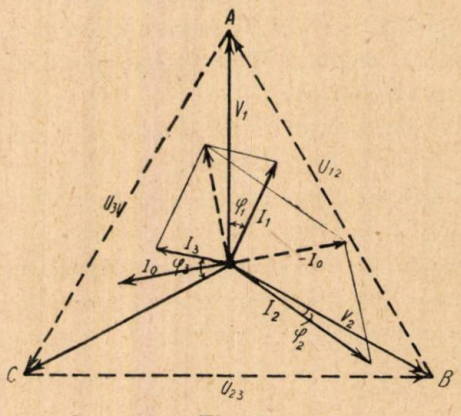


Fig. 8.

De cette construction résulte que quelque soit le déséquilibre des charges le courant I_0 dans le fil neutre ne peut dépasser le plus grand des courants des phases. Si deux des courants sont nuls $I_1 = I_2 = 0$ le courant dans le fil neutre est égal au troisième $I_3 = -I_0$. Si l'un

des courants est nul et les autres sont égaux le courant dans le fil neutre est égal aux deux autres. Si les trois courants sont égaux et symétriques le courant I_0 est nul.

b) En connaissant les courants et les tensions, les valeurs des impédances équivalentes des récepteurs résultent immédiatement:

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} \qquad Z_2 = \frac{V_2}{I_2} \qquad Z_3 = \frac{V_3}{I_3}$$

c) De même, si l'on connaît les impédences, les valeurs des courants peuvent être aisément déduites:

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_1} \qquad I_2 = \frac{V_2}{Z_2} \qquad I_3 = \frac{V_3}{Z_3}$$

d) Si la chute de tension dans les conducteurs de la ligne n'est pas négligeable, les valeurs de cette chute de tension sur les quatre conducteurs de la ligne étant proportionnelles aux courants I_1, I_2, I_3 et I_0 et par conséquent inégales, il en résultera un déséquilibre des tensions aux bornes des récepteurs V_1, V_2 et V' dont l'importance dépend de la valeur de la chute de tension. La dissymétrie des tensions est aggravée si la chute de tension sur le fil neutre est exagérée.

Dans le cas où la résistance du fil neutre devient infinie, le courant dans le fil neutre devient nul, et la chute de tension dans le fil neutre indéterminée.

En ces conditions, ce cas est ramené au cas du montage en étoile sans fil neutre dont l'étude a été faite plus haut.

621.33 TRACTION ÉLECTRIQUE

AUGMENTATION DE LA CAPACITÉ DE TRAFIC D'UNE LIGNE DE CHEMIN DE FER PAR DOUBLEMENT OU PAR ÉLECTRIFICATION DE LA LIGNE

par **Ion S. Gheorghiu**

Dans une étude que nous avons publiée en 1931 nous avons établi que *pour augmenter la capacité de trafic d'une ligne de chemin de fer, on double les lignes de campagne et on électrifie les lignes de montagne.*

Dans la présente étude nous nous proposons de donner une démonstration rigoureuse de cette affirmation.

La capacité de trafic limite d'une ligne, mesurée en tonnes-km limite transportées, est le produit entre le nombre maximum de trains qui peuvent être intercalés sur le tronçon qui nécessite la plus grande durée de parcours à la montée, et le poids de ces trains.

Nous nous proposons dans la suite d'examiner l'effet du doublement de la voie et l'effet de l'électrification de la ligne sur chacune de ces deux composantes:

I. AUGMENTATION DU NOMBRE JOURNALIER DES TRAINS

A) *Ligne à simple voie.*

Nous supposons qu'il y a même nombre de trains à la montée et à la descente, ce qui veut dire que le trafic est approximativement le même dans les deux sens.

Soit *Na* le nombre journalier maximum de pairs de trains, que l'on peut faire circuler en traction à vapeur sur la ligne à simple voie.

Désignons par: *ta et ta'* les temps moyens de parcours (en minutes) à la montée et à la descente entre les deux stations entre lesquelles la durée *ta* de la montée est la plus grande. C'est cet intervalle qui limite

la capacité de trafic de la ligne. Les temps de parcours ta et ta' comprennent aussi les temps morts des arrêts dans les stations, c'est-à-dire la moitié des durées moyennes des arrêts dans les deux stations qui limitent l'intervalle.

Le nombre maximum de pairs de trains que l'on peut intercaler avec la traction à vapeur sur la ligne à simple voie, est alors:

$$Na = \frac{60 \times 24}{ta + ta'} = \frac{1440}{ta + ta'}.$$

En palier on a $ta = ta'$. En pante ta' est limité par la vitesse maximum imposée par les freins, d'après le système de freinage. (Frein automatique ou à la main) [1]).

B) *Doublement de la voie.*

Nous avons supposé que le nombre de trains est le même à la montée et à la descente; comme d'autre part on a en général $ta > ta'$, le nombre maximum de pairs de trains que l'on peut réaliser par le doublement de la ligne est:

$$Nd = \frac{1400}{ta}.$$

En réalité le temps moyen de parcours à la montée est un peu plus petit en double voie qu'en simple voie, du fait qu'en double voie on peut réaliser de temps morts plus petits qu'en simple voie.

Si nous estimons que cette réduction est de l'ordre de 10%, le nombre de pairs de trains que l'on peut réaliser en double voie, est:

$$Nd = 1{,}1 \frac{1440}{ta}.$$

Si nous doublons donc la voie d'une ligne de plaine à très petites déclivités, où $ta = ta'$, le nombre de pairs de trains augment de $\frac{1440}{2ta}$

[1]) En réalité le problème est un peu plus compliqué, du fait que les trains de voyageurs et les trains de marchandise ont des temps de parcours différents. Mais on peut en général faire l'hypothèse que les temps de parcours des différentes catégories de trains telles que: trains rapides de voyageurs, trains ordinaires de voyageurs, trains rapides de marchandise et trains ordinaires de marchandise, sont constants et independants du nombre total de trains. On peut alors calculer un temps moyen de parcours. En désignant par N_1, N_2, N_3, N_4, etc. le nombre de trains des différentes catégories, pat t_1, t_2, t_3, t_4, etc., leurs temps de parcours par: $k_1 = \frac{N_1}{\Sigma N}$, $k_2 = \frac{N_2}{\Sigma N}$, $k_3 = \frac{N_3}{\Sigma N}$, $k_4 = \frac{N_4}{\Sigma N}$ etc., des coefficients numériques, le temps moyen de parcours sera:

$$tm = \frac{t_1N_1 + t_2N_2 + t_3N_3 + t_4N_4}{\Sigma N} = k_1t_1 + k_2t_2 + k_3t_3 + k_4t_4 + \ldots$$

à $1{,}1 \times \frac{1440}{ta}$, c'est-à-dire un peu plus du simple au double. Si la ligne a des déclivités plus importantes, ta' devient plus petit que ta, d'autant plus petit que la rampe est plus forte. Donc le rapport $\frac{ta + ta'}{ta}$ devient plus petit que 2, d'autant plus petit que la rampe est plus forte (à poids remorqué egal).

Il résulte alors que:

L'accroissement du nombre maximum de trains par suite du doublement de la voie, est un peu plus grand que le double pour les lignes de la plaine à faibles déclivités; pour les lignes qui ont des déclivités plus importantes, ce rapport diminue, et il devient d'autant plus petit que la rampe est plus importante.

C) *Électrification de la ligne.*

Nous désignons par te et te' les temps de parcours des trains électriques à la montée et à la descente, définis de la même manière que pour les trains à vapeur. Le nombre journalier maximum de pairs de trains que l'on peut réaliser en traction électrique, est:

$$Ne = \frac{1440}{te + te'}.$$

L'augmentation du nombre de pairs de trains par suite de l'électrification de la ligne à simple voie, est donnée par le rapport:

$$\frac{Ne}{Na} = \frac{ta + ta'}{te + te'}.$$

La traction électrique par ses locomotives plus puissantes et plus rapides, amène toujours une augmentation de la vitesse, donc une diminution des temps de parcours ($te < ta$), *d'autant plus grande que la rampe est plus forte.*

La réduction des temps de démarrage contribue également à cette diminution des temps de parcours.

Quant au temps de parcours à la descente, il est à peu près le même dans les deux systèmes de traction $ta' = te'$ avec toutefois une petite diminution à l'avantage de la traction électrique, due toujours aux démarrages.

Il résulte de ces considérations que l'électrification d'une ligne amène également une augmentation du nombre journalier de trains, mais par contre de ce qui arrive quand on double la voie, cette augmentation est peu importante pour les lignes à faibles déclivités, et devient d'autant plus importante que la rampe est plus forte.

Il existe alors une rampe limite à partir de laquelle l'accroissement du nombre journalier des trains qu'amène l'électrification est plus grand que celui amené par le doublement de la voie.

La valeur de cette rampe limite est déterminée par la relation:

$$\frac{1440}{te + te'} = 1{,}1\,\frac{1440}{ta}.$$

Donc:

$$te + te' = \frac{ta}{1{,}1}.$$

En général cette limite n'est pas atteinte même pour les plus grandes rampes admises sur les chemin de fer à écartement normal, de sorte que l'on peut ennoncer la règle suivante:

Le doublement d'une voie amène en général un accroissement du nombre journalier des trains, plus grand que celui amené par l'électrification de la ligne. Cet avantage est très net en palier où le rapport des deux accroissements dépasse le double, mais il diminue assez vite avec la rampe de la ligne, sans toutefois qu'il y aie égalité, même pour les plus fortes rampes admises aujourd'hui sur les chemin de fer à écartement normal.

II. POIDS REMORQUÉ

Désignons par:

Fa et *Fe* les efforts de traction maxima en marche, à la jante de la roue de la locomotive, en traction à vapeur et en traction électrique.

La, *Ga* et *Le*, *Ge* les poids en tonnes de la locomotive et du train remorqué (poids maximum) en traction à vapeur et en traction électrique.

τ le poids du tender en traction à vapeur.

p la rampe.

r la résistance du train à la traction en Kilogrammes par tonne de train (wagons et tender).

ρ même chiffre pour la locomotive.

Sur les lignes de plaines à faibles déclivités, le poids remorqué n'est pas limité par la puissance possible de la locomotive, mais par la longueur des lignes dans les stations. Aussi pour ces lignes ne peut-on tirer tout le profit du fait que la locomotive électrique peut développer dans les limites imposées par le gabarit, des puissances sensiblement supérieures à celles développées par la locomotive à vapeur.

Mais dès que la rampe dépasse une certaine valeur le maximum de poids remorqué n'est plus limité par la longueur des lignes dans les stations, mais par la puissance des locomotives.

Les tonnages maxima remorqués sur la rampe sont alors:

$$Ga = \frac{Fa - (o + p)\,La - (r + p)\,\tau}{r + p} \text{ en traction à vapeur}$$

$$Ge = \frac{Fe - (o + p)\,Le}{r + p} \text{ en traction électrique.}$$

Dans les mêmes limites imposées par le gabarit et à peu près à égalité de poids, la locomotive électrique est capable de développer un effort de traction beaucoup plus grand que celui développé par la locomotive à vapeur. Ce rapport est d'autant plus grand que la vitesse est plus petite, donc que la rampe est plus forte. D'autre part le terme $(r + p).\tau$, qui réduit le poids remorqué par la locomotive à vapeur, augmente également avec la rampe.

Il résulte qu'à partir d'une certaine rampe dont la valeur est comprise en général entre 6% *et* 8%, *le poids remorqué par la locomotive électrique est bien plus grand que le poids remorqué par la locomotive à vapeur, construite dans les mêmes dimensions limites imposées par le gabarit. Cette différence à l'avantage de la traction électrique, croit très vite avec la rampe de la ligne.*

III. CONCLUSIONS

La capacité de trafic de la ligne est donnée par la formule:

$\frac{1440}{ta + ta'} \times Ga$ pour la traction à vapeur, sur la ligne à simple voie;

$1{,}1\ \frac{1440}{ta} \times Ga$ pour la traction à vapeur, sur la ligne à double voie;

et $\frac{1440}{te + te'} \times Ge$ pour la traction électrique, sur la ligne à simple voie.

Pour les faibles rampes, jusqu'à 6%—8%, nous avons $Ge \overline{\smile} Ga$ et le doublement de la voie permet un accroissement de trafic plus grand que l'électrification.

Pour les rampes plus fortes, *Ge* devient plus grand que *Ga*, d'autant plus grand que la rampe est plus forte; d'autre part la différence entre les deux premiers termes qui représentent le nombre journalier des trains, diminue à l'avantage de l'électrification.

Il existe donc toujours une rampe, et pas trop forte, de l'ordre de 6 *à* 8%, *à partir de laquelle l'électrification amène un accroissement de capacité de trafic plus grand que celui amené par le doublement de la ligne.*

IV. APPLICATION

Nous nous proposons d'appliquer les formules établies ci-dessus à des lignes de différentes déclivités, à trafic plutôt de marchandise,

en supposant que le tronçon qui limite la capacité de trafic, a une longueur de 10 km et une rampe que nous supposerons pour plus de simplicité comme constante.

Supposons que la longueur des stations limite à 1200 tonnes le poids maximum remorqué.

Nous négligeons les démarrages, ce qui est à l'avantage de la traction à vapeur.

Choisissons deux types courants de locomotives de marchandise à vapeur et électrique, à savoir:

1. La locomotive à vapeur de la série 140401—140504 des Chemins de Fer de l'État Roumain, à quatre essieux moteur et un essieux porteur, à vapeur surchauffée, à simple expansion 132,23 tonnes poids total en service y compris le tender.

2. Une locomotive électrique de 3000 HP unihoraires, pouvant développer un effort maximum unihoraire de 20.400 kg à une vitesse de 40 km à l'heure, à vitesse maximum en palier d'environ 80 km à l'heure, 120 tonnes poids total et adhérent.

Nous choisissons pour la locomotive à vapeur d'après les tables de charges de chemin de fer, la caractéristique qui correspond à la vitesse nominale de 40 km à l'heure.

Pour la locomotive électrique nous choisissons une caractéristique économique de régime normal jusqu'à la vitesse de 45 km à l'heure, et les deux caractéristiques suivantes pour des vitesses entre 45 et 55 km à l'heure et au delà de 55 km à l'heure.

En tenant compte des considérations ci-dessus, nous avons inscrit les résultats dans les deux tableaux suivants:

TRACTION À VAPEUR

p%	Ga tonnes	Va km/heure	ta minutes	Va' km/heure	ta' minutes	Simple voie et simple traction		Double voie				
								Simple traction			Double traction	
						Na nombre de trains par jour	$Ta=NaGa$ tonnes par jour	Nd nombre de trains par jour	$Td=NdGa$ tonnes par jour	$\frac{Td}{Ta}$	$Nd=1,8\times Nd\times Ga$ tonnes par jour	$\frac{Td}{Ta}$
0	1.170	58,5	10,2	58,5	10,2	70	82.000	155	181.500	2,21	326.000	4
2	1.170	46	13	60	10	62	72.500	122	143.000	1,97	257.000	3,54
5	1.170	30	20	60	10	48	56.100	79	92.500	1,64	166.000	2,95
7	1.035	20	30	55	10,9	35	36.300	52	53.800	1,49	97.000	2,69
10	755	20	30	50	12	34	25.700	52	39.200	1,52	70.500	2,74
12	635	20	30	50	12	34	21.600	52	33.000	1,53	59.400	2,74
15	500	20	30	50	12	34	17.000	52	26.000	1,53	46.800	2,74
20	355	20	30	45	13,3	33	11.700	52	18.500	1,58	33.300	2,84
25	265	20	30	40	15	32	8.500	52	13.750	1,61	24.800	2,90

p%	Ge tonnes	Ve km/heure	te minutes	Ve' km/heure	te' minutes	Ne Nombre de trains par jour	$Te = Ne \times Ge$ tonnes par jour	$\frac{Te}{Ta}$
0	1.200	69	8,7	60	10	77	92.500	1,13
2	1.200	61,5	9,8	60	10	72	86.500	1,19
5	1.200	51,2	11,7	60	10	66	79.200	1,41
7	1.200	48,5	12,4	55	10,9	62	74.400	2,05
10	1.200	42	14,3	50	12	54	64.800	2,52
12	1.200	40	15	50	12	53	63.600	2,94
15	1.000	40	15	50	12	53	53.000	3,12
20	750	40	15	45	13,3	51	38.300	3,27
25	600	40	15	40	15	48	28.800	3,39

Il ressort de ces tableaux que dès que la rampe d'une ligne dépasse le chiffre d'environ 6,5% d'électrification amène une augmentation de trafic plus grande que le doublement de la ligne en traction à vapeur. Ceci en simple traction, autant pour la traction électrique que pour la traction à vapeur. A partir d'une rampe de 12% la traction électrique toujours à simple voie amène une augmentation de trafic plus grand que celle aménée par le doublement de la ligne en double traction à vapeur.

La démonstration ci-dessus nous permet donc d'énoncer comme un fait acquis l'assertion suivante:

Pour les lignes à faibles déclivités le doublement reste toujours le meilleur moyen pour augmenter la capacité de trafic.

Pour les lignes de montagne à forte rampe, l'électrification est le meilleur moyen pour augmenter la capacité de trafic, d'autant plus efficace que la ligne a de plus fortes rampes.

621.396.66 RADIO-ÉLECTRICITÉ

UN NOUVEAU CIRCUIT SÉLECTIF

par **Matei Gh. Marinescu**

Introduction. Pour augmenter la sélectivité des circuits d'accord des appareils de Radio, on emploie le procédé de la «réaction» par lequel on fait réagir une fraction de la tension de sortie d'un étage amplificateur, sur l'entrée du même étage, qui contient le circuit d'accord. Tout se passe alors, comme si une partie plus ou moins grande de la résistance de ce circuit était annulée. On obtient ainsi des courbes de résonnance aiguës et par conséquence, une grande sélectivité. Mais ce procédé présente des inconvénients que nous allons signaler plus loin. Dans ce qui suit, nous allons considérer tout d'abord un circuit d'accord élémentaire et établir quelques définitions et relations simples relatives à ce circuit. Puis, nous alons considérer le même circuit comme faisant partie du circuit d'un étage amplificateur muni de « réaction », — nous établirons dans ce cas aussi, des définitions et relations analogues au précédentes.

Enfin, nous allons décrire le nouveau procédé pour augmenter la sélectivité des circuits d'accord, en le comparant au procédé de la « réaction » simple.

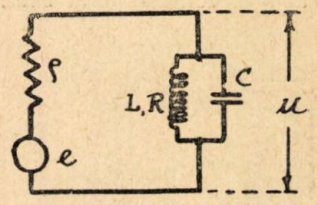


Fig. 1

Sélectivité et amplification d'un circuit d'accord. Considérons le circuit de la fig. 1 qui est ce qu'on appelle un circuit «antirésonnant» ou circuit «bouchon».

Dans ce circuit nous avons: L, R, C = constantes du circuit, $e = e.f.m$ (alternative de pulsation ω) appliquée au circuit, ρ = résistance intérieure de la source de $f.e.m.$, u = tension au bornes du circuit. Avec ces données nous aurons:

$$\frac{u}{e} = A = \frac{Z}{\rho + Z}, \quad \text{où} \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} + jC\omega; \qquad (1)$$

nous appellerons: A, amplification du circuit, par analogie avec les relations que nous établirons ultérieurement pour le cas du circuit à réaction. A proprement parler, il ne s'agit pas ici d'une amplification puisque d'après (I), $A \leqslant I$. Posons maintenant:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \quad , \quad \text{où: } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

ce qui signifie que nous considérons le circuit au voisinage de la fréquence de résonnance. Nous supposerons $\Delta\omega$ suffisamment petit pour que: $\Delta Z < Z_0$, ρ, la relation (I) devient:

$$A = A_0 - \Delta A = \frac{Z_0 - \Delta Z}{\rho + Z_0 - \Delta Z}$$

d'où, en posant: $Z_0 \ll \rho$,

$$\frac{\Delta A}{A_0} \cong \frac{\Delta Z}{Z_0} = S. \qquad (2)$$

Nous appellerons: $\frac{\Delta Z}{Z_0}$, « séléctivité » du circuit et nous la designérons par: S, c'est la variation relative de l'impédance au voisinage de la résonance. D'après (2) nous voyons qu'elle est égale â la variation relative de l'amplification au voisinage de la résonance.

Sélectivité et amplification d'un circuit d'accord faisant partie du circuit d'un amplificateur muni de „réaction". Considérons le circuit de la fig. II où se trouve schematisé le circuit « bouchon » d'impédance: Z, la $f.e.m$ appliquée « e »; l'amplificateur A, ayant une amplification: « α »; et le réseau à réaction: B, ayant un affaiblissement: « β », soit: « u », la tension à la sortie de l'amplificateur.

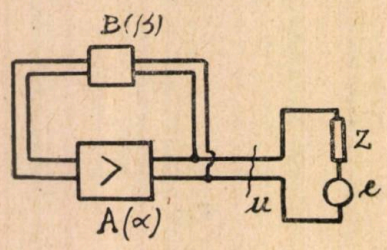


Fig. 2.

Ajoutons, que tout circuit d'accord, à amplificateur à « réaction » employé dans les appareils Radio, peut être ramené au cas de la fig. II. Dans ce cas, nous avons:

$$\frac{u}{e} = A = \frac{1}{1 - \alpha\beta} \quad ; \quad \text{où: } \alpha\beta < 1.$$

Procédons de la même manière, que précédemment et donnons à ω la valeur: $\omega_0 + \Delta\omega$.

Nous aurons:

$$A = A_0 - \Delta A = \frac{1}{1 - \alpha_0\beta + \beta\Delta\alpha}$$

d'où:

$$1 - \frac{\Delta A}{A_0} = \frac{1}{A_0} \cdot \frac{1}{1 - \alpha_0 \beta + \beta \Delta \alpha} = \frac{1}{1 + A_0 \beta \Delta \alpha}$$

d'où enfin:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{A_0 \beta \Delta \alpha}{1 + A_0 \beta \Delta \alpha}. \tag{3}$$

D'autre part:

$$\alpha = \mu \frac{Z}{\rho + Z};$$

où: ρ = résistance intérieure de l'amplificateur, μ = coefficient d'amplification de l'amplificateur.

Donc:

$$\alpha = \alpha_0 - \Delta \alpha = \mu \frac{Z_0 - \Delta Z}{\rho + Z_0 - \Delta Z}$$

et:

$$\Delta \alpha = \mu \frac{\Delta Z}{\rho + Z_0} = \alpha_0 \frac{\Delta Z}{Z_0} = \alpha_0 . S \tag{4}$$

D'où enfin en remplaçant dans: (3), $\Delta \alpha$ par sa valeur, donnée par (4) nous obtenons:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{A_0 \alpha_0 \beta . S}{1 + A_0 \alpha_0 \beta S}. \tag{5}$$

Supposons, comme précédemment, que « $\Delta \omega$ » est suffisamment petit pour que: $A_0 \alpha_0 \beta S < 1$, il vient:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = A_0 \alpha_0 \beta S \tag{5'}$$

ou approximativement:

$$\frac{\Delta A}{A_0} \sim A_0 . S = S' \tag{5''}$$

puisque: $\alpha_0 \beta \sim 1$.

Tout se passe donc, dans ce cas, comme si nôtre circuit avait une sélectivité: S', A_0 fois plus grande que la sélectivité S du circuit simple, non muni d'amplificateur à réaction.

Désavantage du circuit précédent. Nous avons vu que: $A_0 = \frac{1}{1 - \alpha_0 \beta}$; pour que: $A_0 > 1$ il faut que: $1 - \alpha_0 \beta < 1$; on pourrait croire, au premier coup d'œil, qu'on peut s'approcher avec: $\alpha_0 \beta$, autant qu'on veut de 1 (en variant: β) et pouvoir ainsi obtenir pour A_0 des valeurs aussi grandes que l'on désire. L'expérience et la théorie montrent que A_0 ne peut dépasser: IO, sans risquer de fait osciller le système.

Pratiquement avant même d'atteindre cette valeur, le système devient instable et produit des distorsions exagérées (la distorsion étant proportionnelle à A_0^2). On peut résumer ainsi les désavantages des circuits d'accord avec amplificateur à « réaction »: 1) amplification et sélectivité limitées; 2) instabilité; 3) distorsion.

Sélectivité et amplification d'un circuit d'accord muni du nouveau système à réaction „push-pull".

Considérons maintenant le circuit de la fig. 3 où se trouve schématisé: le circuit « antirésonnant » d'impédance Z; la $f.e.m.$ appliquée « e »;

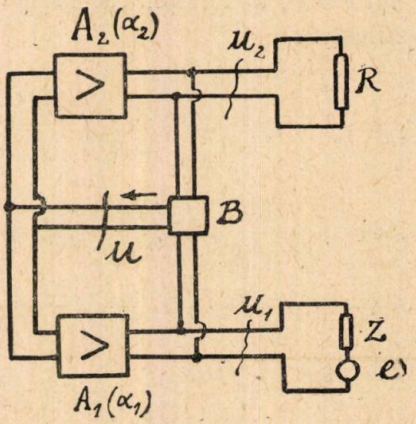


Fig. 3.

l'amplificateur A_1 d'amplification « a_1»; l'amplificateur A_2 (auxiliaire), d'amplification « a_2 » débitant sur: R, B; un réseau à réaction, ayant 2 entrées et une sortie et dont la tension de sortie: $u = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$, est introduite à l'entrée de A_1 et A_2; $\beta_1 \beta_2$ sont des constantes < 1, caractérisant le réseau B. Soit u_1 et u_2 les tensions de sortie de A_1 et A_2, dans ces conditions un calcul simple nous montre que:

$$\frac{u_1}{e} = A = \frac{1 - a_2 \beta_2}{1 - \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2} \tag{6}$$

si d'autre part:

$$\alpha_2 < 0, \quad \frac{u_1}{e} = A = \frac{1 + \alpha_2 \beta_2}{1 + \alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 \beta_1} \tag{6'}$$

et si ω varie au voisinage de ω_0, nous aurons:

$$A = A_0 - \Delta A = \frac{1 + \alpha_2 \beta_2}{1 + \alpha_2 \beta_2 - \alpha_0 \beta_1 + \beta_1 \Delta\alpha} = \frac{A_0}{1 + \beta_1 \Delta\alpha};$$

(si: $a_2 \beta_2 = \alpha_0 \beta_1$)

(a_2 est indépendant de ω, puisque la charge de l'amplificateur auxiliaire est une résistance R).
d'où:

$$A_0 = 1 + a_2 \beta_2 \tag{7}$$

et

$$\frac{\Delta A}{A_0} = 1 - \frac{1}{1 + \beta_1 \Delta\alpha} = \frac{\beta_1 \Delta\alpha}{1 + \beta_1 \Delta\alpha} \tag{8}$$

Introduisant la valeur de « $\Delta\alpha$ » obtenue antérieurement (voir (4) il vient:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{\alpha_0 \beta_1 S}{1 + \alpha_0 \beta_1 S} \cong \frac{A_0 . S}{1 + A_0 S} \quad , \quad (\text{si } \alpha_2 \beta_2 \gg 1) \tag{8'}$$

Supposant: $\Delta\omega$, suffisamment petit pour que: $A_0 . S < 1$,

$$\frac{\Delta A}{A_0} = A_0 . S = S' \tag{8''}$$

formule identique à celle qui correspond au cas de la « réaction » simple (voir (5)) et qui veut dire que dans ce cas aussi tout se passe comme si le circuit d'accord muni du nouveau système à réaction acquiert une sélectivité S', A_0 fois plus grande que la sélectivité S, du circuit d'accord simple.

Avantages du nouveau circuit. L'avantage est mis en évidence par le fait que l'amplification A_0 est ici égale à: $1 + \alpha_2 \beta_2$, quantité qu'on peut rendre aussi grande qu'on veut, sans risques d'instabilité et sans distorsions exagérées (la distorsion étant proportionnelle à A_0). Si en particulier $\beta_2 = 1$, et $a_2 \gg 1$, on voit que A_0 est égal à l'amplification a_2 de l'amplificateur auxiliaire.

621.396.66 RADIO-ÉLECTRICITÉ

RÉSONANCE DES CIRCUITS COUPLÉS

par **T. Tănăsescu**

1. *Introduction*

On emploie souvent en haute fréquence les circuits couplés accordés pour réaliser une meilleure courbe de résonance que celle obtenue avec un seul circuit accordé. Ainsi, dans le cas des circuits couplés, on peut obtenir une courbe au sommet presque plat, d'ordinaire avec deux maxima et qui présente sur les branches une atténuation croisant plus rapide que dans le cas des circuits simples accordés.

Le sujet de la présente note est la prédétermination de la courbe de résonance dans les cas des circuits couplés.

On connaît déjà quelques méthodes développées dans ce but, mais, la complexité des formules et des calcul respectives, m'ont encouragé de chercher une solution plus simple pour les cas qui se présentent dans la pratique.

On sait que la courbe de résonance des deux circuits couplés dépend des valeurs des constantes R, L et C, correspondant a chacun des circuits, ainsi que du couplage; quelquefois les circuits ne sont pas identiques et par consequant, dans ce cas les valeurs des constants different, d'un circuit à l'autre.

Étant donnés tous ces éléments, le problème réside dans la construction de la courbe de variation du courant secondaire en fonction de la fréquence, c'est-à-dire la courbe de résonance.

Pour éviter le calcul de chaque point de la courbe, E. Mallet a développé une méthode graphique [1]) en utilisant une parabole, sur laquelle s'appuie l'extrémité du vecteur représentant l'inverse du courant

[1]) *Proc. Royal Soc. A.*, Vol. 117, p. 331.

secondaire. Dans chaque cas rencontré dans la pratique on doit construire une parabole particulière ainsi que le point d'origine du vecteur.

De même C. B. AIKEN[1]) a cherché de systhématiser dans un certain cas particulier le traçage de la courbe de résonance, en traçant en préalable quelques familles de courbes de résonance universelles; dans chaque cas particulier on doit chercher la courbe universelle correspondante, et puis, on doit déduire les échelles des axes des coordonnées.

On peut systématiser d'avantage les expressions qui intervient dans la formule du courant secondaire en arrivant a une représentation graphique simple, à l'aide de la parabole $y^2 = x$; ainsi la courbe de résonance de n'importe quel cas particulier peut se déduire par des moyens graphiques simples en utilisant une seule courbe, la parabole mentionnée. La méthode respective fait l'objet de cet étude.

2. *Divers formes des circuits couplés*

La forme générale classique sous laquelle se présente deux circuits couplés, est représentée dans la figure 1. Le couplage est réalisé par l'impédance commune z_0 et par l'inductance mutuelle M.

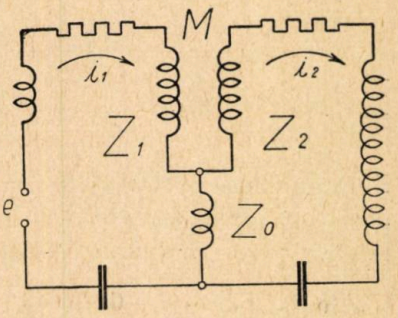


Fig. 1.

On en déduit deux cas particuliers intéressants:

a) L'impédance commune z_0 n'existe pas et par conséquent il n'y a que seulement couplage par induction mutuelle (fig. 2).

b) Le couplage par l'induction mutuelle n'existe pas et l'impédance z_0 se réduit a un condensateur C_0 (fig. 3).

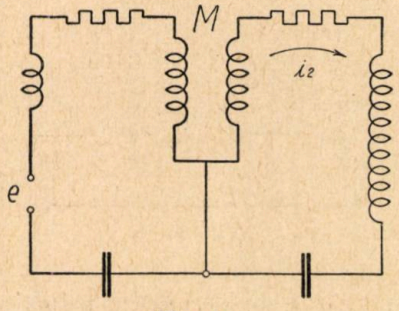


Fig. 2.

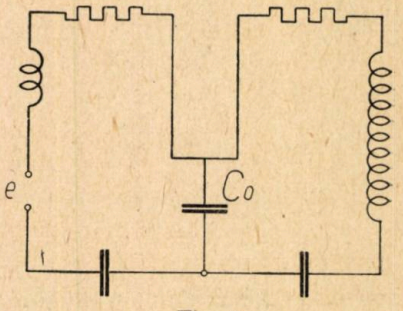


Fig. 3.

La solution que s'applique au premier cas peut servir aussi dans le cas représenté dans la figure 4 où z_0 se réduit a une inductance L_0.

[1]) *Proc. Inst. Radio Eng.*, Vol. 25, p. 230.

Dans la pratique, en particulier dans le premier cas mentionné ci-dessus, il intervient souvent de même un couplage de nature capacitive, dû à la capacité mutuelle des tous les éléments qui forment les deux circuits. On peut considérer que les circuits ont un point commun mis à terre, et que les points opposés, qui oscillent en haute fréquence, sont couplés par une capacité C'_0 (fig. 5). Ce cas peut être réduit au cas *b*

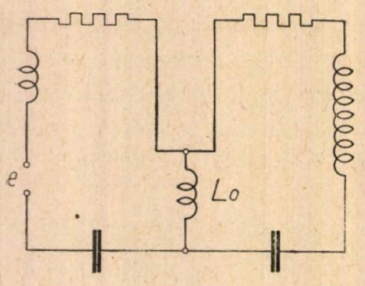


Fig. 4.

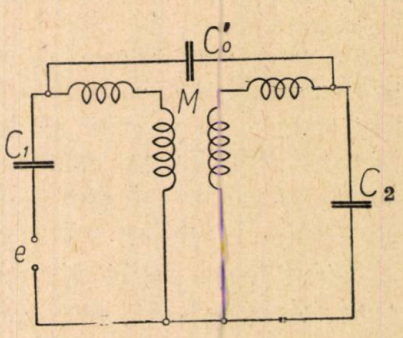


Fig. 5.

si on remplace le triangle $C_1 - C'_0 - C_2$ par une étoile équivalente, composé des condensateurs. En tenant compte que dans la pratique C'_0 est très petit par rapport à C_1 et C_2, on en déduit l'équivalence représentée dans la figure 6, où $C_0 = \dfrac{C_1 C_2}{C'_0}$.

Enfin les circuits couplés sont alimentés en pratique par des générateurs à grande résistance interne, — lampes électroniques. Pour cette

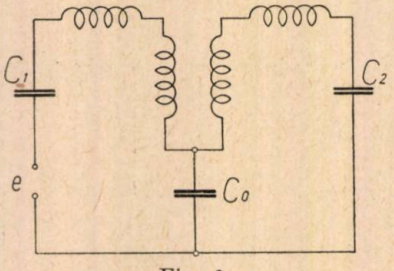


Fig. 6.

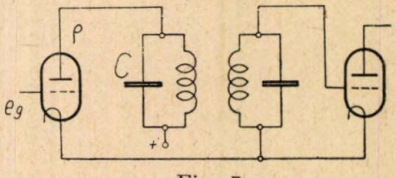


Fig. 7.

raison le générateur n'est pas placé en série avec le circuit primaire accordé, mais en dérivation (fig. 7). De même, dans le circuit secondaire on branche en dérivation la lampe qu'on veut exciter; cette lampe absorbe souvent une énergie électrique, d'autant plus que parfois se trouve intercalée une résistance entre la grile et la cathode.

Ce cas peut se réduire au cas précédent, où le générateur est en série dans le circuit primaire. Dans ce but le théorème du THEVENIN nous fournit les expressions suivantes pour le f.e.m. équivalente en série dans le circuit primaire et pour l'impédance série qui va substituer la réactance de la capacité C:

$$\text{f.e.m} = \frac{\mu e_g \frac{1}{j\omega C}}{\rho + \frac{1}{j\omega C}} \qquad \text{imp} = \frac{\frac{\rho}{j\omega C}}{\rho + \frac{1}{j\omega C}}$$

Dans le cas où les lampes sont des tétrodes ou penthodes, leur résistance intérieure est très grande par rapport à $\frac{1}{\omega C}$ et ces deux expressions deviennent.

$$\text{f.e.m} = \frac{\mu e_g}{\rho\omega C} \quad \text{et} \quad \text{imp} = \frac{1}{\rho\omega^2 C^2} - \frac{j}{\omega C}$$

Cela signifie que le branchement du générateur de grande résistance intérieure, en dérivation avec le circuit primaire accordé, équivaut à une augmentation de la résistance du circuit série, sans que la réactance soit modifiée.

Ainsi tous les cas, qui se présentent dans la pratique, peuvent être réduits soit à un couplage magnétique M ou L (fig. 2 ou 4), soit à un couplage capacitif C_1, (fig. 3).

En tenant compte du fait que le premier couplage est rencontré plus souvent que le deuxième, on va considérer dans ce qui suit seulement le premier cas.

Ainsi dans les cas des couplages capacitifs on transformera les résultats obtenus dans le cas du couplage magnétique, en remplaçant $M\omega$ par $\frac{1}{C_0\omega}$.

3. *Expression du courant secondaire*

On connaît les équations générales fondamentales des circuits couplés:

$$z_1 i_1 - jM\omega i_2 = e$$

$$z_2 i_2 - jM\omega i_1 = 0$$

ou z_1 et z_2 sont les impédances *totales* respectives du circuit primaire et secondaire. Ainsi on a:

$$z_1 = R_1 + j\left(L_1\,\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right) = R_1 + jX_1$$

$$z_2 = R_2 + j\left(L_2\,\omega - \frac{1}{C_2\omega}\right) = R_2 + jX_2$$

Les solutions des équations fondamentales sont:

$$i_1 = \frac{ez_2}{z_1 z_2 + M^2\omega^2} \qquad i_2 = \frac{jM\omega e}{z_1 z_2 + M^2\omega^2}$$

La courbe de résonance de ces circuits couplés résulte de la représentation graphique de l'amplitude du courant secondaire en fonction de la fréquence, ou de ω.

Nous attirons l'attention sur le fait que, dans la majorité des cas rencontrés en pratique, les deux circuits sont quasi accordés, c'est-à-dire que: $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ et $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ ont des valeurs voisines.

D'autre part on remarque que la variation de I_2 est intéressante surtout dans le voisinage du point de la résonance, quand ω prend de valeurs près de ω_1 et ω_2.

Dans le voisinage du point de la résonance Z_1 et Z_2 (grandeurs des impédances z_1 et z_2) subissent des fortes variations parce que X_1 et X_2 passent par zéro. Quand on suppose que ω a une variation au voisinage de la résonance, cela signifie que ω a des variations de quelque pourcentages autour de ω_1 et ω_2; dans cet petit intervalle on obtient la partie intéressante de la variation de I_2.

Dans l'expression de I_2 les seuls éléments actifs dans le voisinage de la résonance sont Z_1 et Z_2 ($M\omega$ peut être considéré constant). Leurs valeurs dépendent de la variation des réactances X_1 et X_2, qui peuvent être approximées par:

$$X_1 = 2L_1(\omega - \omega_1) \qquad X_2 = 2L_2(\omega - \omega_2)$$

En tenant compte de toutes les observations mentionnées ci-dessus, l'expression de i_2 pourra être mise sous la forme suivante:

$$i_2 = \frac{jM\omega e}{R_1 R_2 p} b$$

où p est une quantité complexe, sans dimensions, qui dépend généralement des constantes des circuits ainsi que de la fréquence et b, un coefficient numérique réel qui dépend de la dissymétrie des amortissements des deux circuits.

En tenant compte du caractère de p dans la formule ci-dessus, nous allons le dénommer *indice de conductance mutuelle.*

Dans ce qui suit on suivra la variation de p au lieu de celle de i_2.

L'expression de p sera mise sous la forme:

$$p = A + jB$$

où

$$A = b(1 + n^2) + a^2 - \beta^2 \qquad B = a\sqrt{1 - 4b} + \beta$$

et:

$$a = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot \frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = 2\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\frac{Q_1 Q_2}{Q_1 + Q_2} \qquad b = \frac{\theta_1 \theta_2}{(\theta_1 + \theta_2)^2} = \frac{Q_1 Q_2}{(Q_1 + Q_2)^2}$$

$$n = \frac{M\omega}{\sqrt{R_1 R_2}} = k^2\sqrt{Q_1 Q_2} \qquad \beta = \frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_1 + \theta_2}\Delta\omega = 2\frac{\Delta\omega}{\omega_1 + \omega_2}\frac{Q_1 Q_2}{Q_1 + Q_2}$$

avec la notation:

$$\theta_1 = \frac{2L_1}{R_1} \quad \theta_2 = \frac{2L_2}{R_2} \quad Q_1 = \frac{L_1\omega_0}{R_1} \quad Q_2 = \frac{L_2\omega_0}{R_2}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0$$

4. *Interprétations physiques*

On peut donner les interprétations physiques suivantes à nos paramètres: a, b et n ainsi qu'à la variable indépendante β:

a, *indice de désacord*, mesure le degré dans lequel les deux circuits ne sont pas accordés en préalable sur la même fréquence, à cause de la différence qui existe entre ω_1 et ω_2; il est zéro quant les circuits sont iscohrones et prend une valeur positive ou négative (valeurs de l'ordre de l'unité) d'après la différence $\omega_1 - \omega_2$.

b, *indice de dissymétrie des amortissements* des circuits, dépend du rapport des amortissements des circuits; quand ce rapport est égal à l'unité, c'est-à-dire quand les amortissements sont égaux, l'indice prend une valeur maximum, à savoir $^1/_4$; dans tout autres cas sa valeur est moindre.

$\sqrt{1-4b}$, qui intervient dans l'expression de p, devient zéro quand les deux circuits sont également amortis et il a une valeur positive, qui peut croître jusqu'à l'unité, si les deux circuits ont des amortissements différents.

n, *indice de couplage* mesure le degré de couplage entre les deux circuits; k, le coefficient de couplage, et Q_2 et Q_3 ont des telles valeurs dans la pratique de façon à ce que n prend des valeurs près de l'unité.

β, *indice de fréquence* est la variable indépendante dans la variation de P et par conséquent aussi dans celle de I_2; il est proportionnel au désaccord de la fréquence par rapport à la fréquence moyenne $\omega_0/2\pi$. Cet indice, ainsi que l'indice de désaccord prend des valeurs positives ou négatives — de l'ordre de l'unité — autour de la fréquence moyenne.

5. *Interprétations graphiques*

L'indice de conductance mutuelle p peut être exprimé encore sous la forme:

$$p = A + jB \qquad A = -x_0 + \alpha \qquad B = -y_0 + \beta$$

où

$$\alpha = -\beta^2 \qquad -x_0 = b(1 + n^2) + a^2 \qquad -y_0 = a\sqrt{1-4b}$$

Dans la figure 8 sont représentées ces grandeurs dans le plan des quantités complexes.

ST représente le vecteur p. S a les coordonnées x_0 et y_0, et T le coordonnées α et β.

Quand β, *l'indice de fréquence*, — la variable indépendante — *subit une variation*, S reste fix et T *décrit la parabole ayant comme équation*: $\alpha = -\beta^2$.

Nous rappelons que l'inverse du segment ST est proportionnel au courant I_2, l'ordonnée de la courbe de résonance:

$$I_2 = \frac{M\omega Eb}{R_1 R_2 P} \qquad P = \overline{ST}$$

On reconnaît dans la figure 8 que la fréquence peut être représentée directement par l'ordonnée du point T car,

$$\beta = (\omega - \omega_0)\frac{\theta_1\,\theta_2}{\theta_1 + \theta_2}$$

Donc la construction de la courbe de résonance $I_2 = f(\omega)$ est solutionnée quand la figure 8 est tracée.

On remarque premièrement que la parabole ne dépend pas des constants des circuits; elle a l'équation:

$$\alpha = -\beta^2$$

Le point S est déterminé par les valeurs des constantes des circuits, par ses coordonnées x_0 et y_0:

$$x_0 = -b(1 + n^2) - a^2$$

$$y_0 = -a\sqrt{1-4b}$$

Pour passer de P à I_2 et de β à ω on a besoin de calculer deux coefficients qui dépendent aussi des constantes des circuits.

$$I_2 = \frac{M\omega Eb}{R_1 R_2} \times \frac{1}{P} \qquad \omega = \omega_0 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1\,\theta_2}\,\beta$$

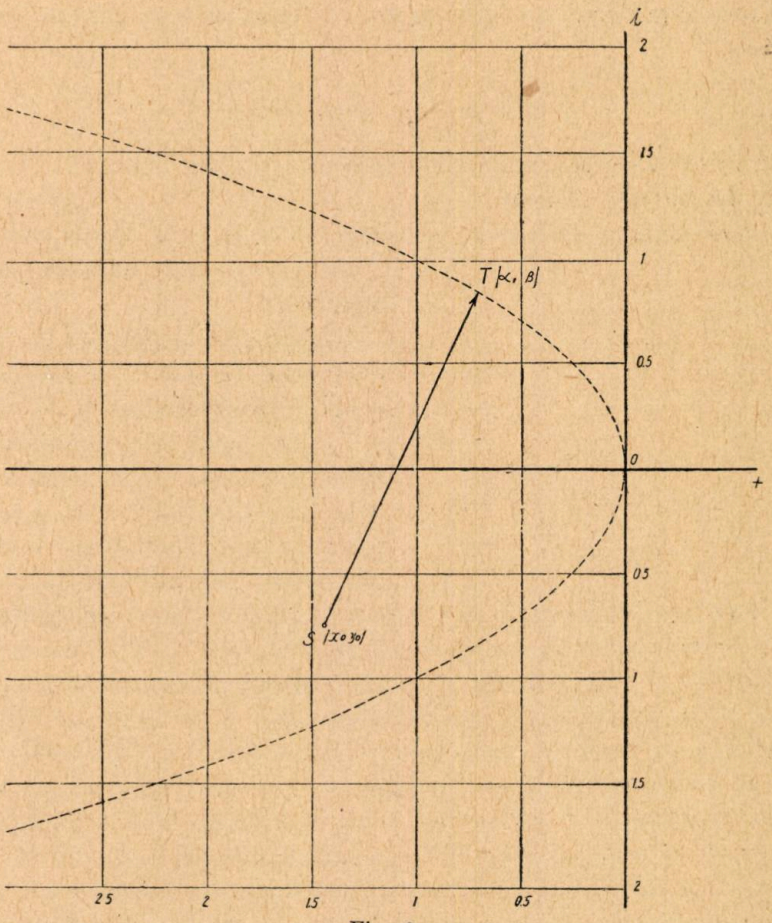


Fig. 8.

6. *Symétrie de la courbe de résonance*

D'après la figure 8 on remarque que la courbe de résonance n'est pas symétrique si y_0 est différent de zéro. C'est-à-dire soit a doit être zero, soit b doit être $\frac{1}{4}$. L'indice de désacord est nul quand les deux circuits sont accordés sur la même fréquence: $\omega_1 = \omega_2$. L'indice de

dis-symétrie des amortissements est $\frac{1}{4}$ quand les amortissements des deux circuits sont égaux: $\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}$.

Ce dernier cas est intéressant, car on obtient ainsi une courbe de résonance symétrique quoique les deux circuits ne sont pas isochrones: $\omega_1 \neq \omega_2$.

7. *Couplage de transition*

La forme de la courbe de résonance peut prendre deux formes, dans le cas des circuit: couplés:

a) avec deux maxima et un minimum (fig. 9, la courbe tracée en plein).

b) Avec un seul maximum (courbe pointillée).

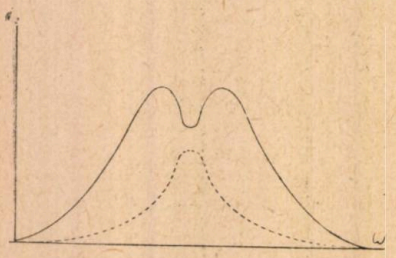


Fig. 9.

En général la position du point S et donc la valeur de l'indice de couplage n détermine la forme de la courbe; pour les grandes valeurs de n correspond deux maxima, et pour les petites valeurs de n correspond un seul maximum. Il existe une valeur intermédiaire dénommeé ici le couplage de transition, par laquelle on passe d'une forme à l'autre.

Un maximum de I_2 correspond à un minimum de P et réciproque. Les maxima et minimum de P ont lieu quand le segment ST devient normal à la parabole. En général d'un point S on peut mener trois normales à la parabole; mais pour certains positions, du point S on ne peut mener qu'une seule normale, — les deux autres solutions devenant imaginaires. Il existe une courbe qui divise le plan de la parabole en deux régions, d'après les nombres des normales qu'on peut mener à la parabole. Cette courbe est l'enveloppe des normales à la parabole, ou la développée de la parabole (fig. 10). Si l'on choisit un point S sur cette courbe, l'indice de couplage prend la valeur de transition.

Si S est placé dans la région hachurée on peut mener trois normales à la parabole et donc nous avons dans la courbe de résonance deux maxima et un minimum.

Si S se trouve dans l'autre région, on ne peut tracer qu'une seule normale, et par conséquent la courbe de résonance n'a qu'un maximum [1]).

[1]) On peut démontrer que le point S ne peut se placer que dans l'intérieur de la parabole.

Dans notre cas, l'équation de la développée est:

$$\beta^2 = -\frac{16}{27}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^3$$

On remarque que sa pointe V a comme abscisse $-1/2$.

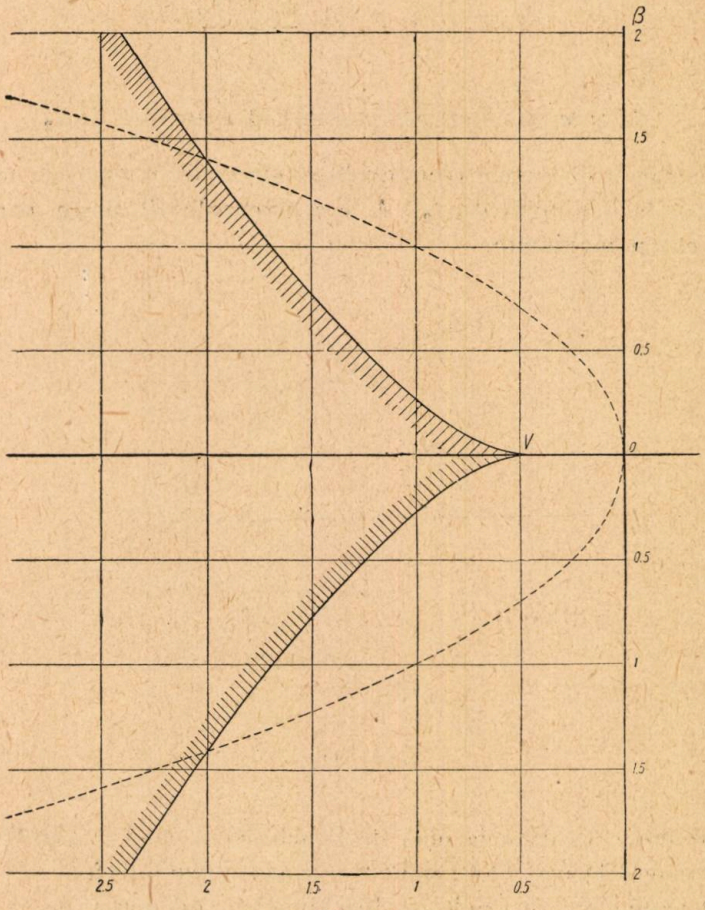


Fig. 10.

La condition pour que le point $S\,(x_0;\ y_0)$ réalise un couplage supérieur au couplage de transition est donc:

$$y_0 + \frac{16}{27}\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^3 < 0$$

ou:

$$n^2 > \frac{1}{b}\left[\frac{27}{16}a^2\,(1 - 4b) + \frac{1}{2} - a^2 - b\right]$$

Cette condition est connue d'habitude sous la forme simple:

$$M^2 \omega^2 > R_2 R_3$$

On remarque que sous cette forme elle n'est pas valable que si: $\omega_1 = \omega_2$ et $\theta_1 = \theta_2$, cela veut dire:

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 \text{ et } \frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}.$$

8. *Détermination des maxima et minimum de* I_2

On demande de savoir pour quelles valeurs de ω ont lieu les deux maxima et le minimum de I_2? A ces moments P passe par deux minima et un maximum.

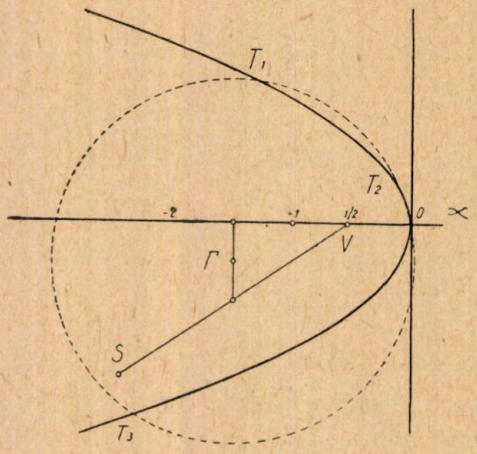


Fig. 11.

Étant donné S dans le plan de la parabole, on doit construire les trois normales. Dans ce but, nous traçons les tangentes à la développé; ou nous employons le cercle de Ioachimsthal, qui passe par les pieds des trois normales ainsi que par le sommet de la parabole. Le centre du cercle a les coordonnés:

$$\frac{x_0 - \frac{1}{2}}{2} \text{ et } \frac{y_0}{4} \text{ ou } -\frac{a^2 + b(1+n^2) + 0{,}5}{2} \text{ et } -\frac{a\sqrt{1-4b}}{4}$$

Pour déterminer le centre Γ du cercle du Ioachimsthal, il en résulte la construction graphique suivante (fig. 11). On réunit S à V et au milieu de ce segment on abaisse une perpendiculaire sur l'axe horizontale. Le centre Γ est le milieu de cette perpendiculaire.

Le cercle passe par O et alors il peut être tracé. Les intersections de ce cercle et de la parabole nous donnent les trois pieds (T_1, T_2, T_3) des perpendiculaires issues de S.

Si le point S se trouve sur l'axe α, donc si la courbe de résonance est symétrique, le maximum de P et le minimum de I_2, correspond au point O; les deux autres pieds T seront symétriquement placés. Dans ce cas Γ se trouve sur l'axe α, au milieu du segment SV. Le point T peut être construit aussi en se basand sur la propriété géométrique que la sous-normale est égale $a\,\frac{1}{2}$.

Dans n'importe quelle situation, les ordonnées du point T nous donnent aisément la fréquence correspondant au minimum et maximum.

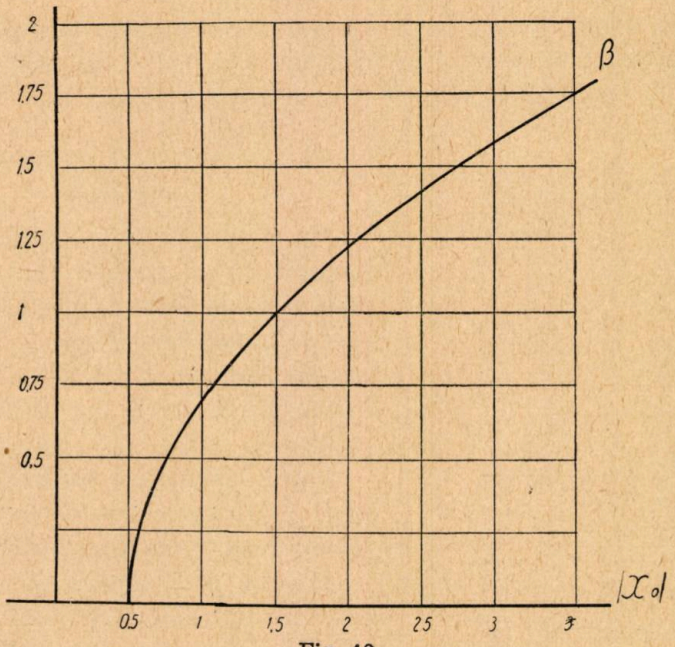


Fig. 12.

9. *Ecart de la fréquence entre les maxima*

Il sera considéré seulement le cas d'une courbe de résonance symétrique. Les valeurs de β, qui correspondent aux deux maxima de I_2, satisfont à la relation qui annule la dérivée de l'expression de P^2. Il en résulte:

$$\beta^2 = b\,(1 + n^2) + a^2 - \tfrac{1}{2} = [x_0] - \tfrac{1}{2}$$

(La même relation résulte de la propriété que la sous-normale est égale à $\frac{1}{2}$).

On déduit l'écart de la fréquence:

$$2\Delta\omega = 2\sqrt{b(1+n^2)+a^2-\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{\theta_1+\theta_2}{\theta_1\theta_2} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{n^2}{\theta_1\theta_2}+\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)^2-\frac{\theta_1^2+\theta_2^2}{2\theta_1^2\theta_2^2}}$$

ou:

$$2\Delta\omega = \frac{1}{L}\sqrt{M^2\omega^2 - M_0^2\omega_0^2}$$

en notant $M_0\,\omega_0$ le couplage de transition.

On remaruque que cet écart croît avec n, l'indice de couplage. L'écart devient **zéro** quand l'indice de couplage a la valeur de transition.

Dans la figure 12 on a tracé β en fonction de $[x_0]$.

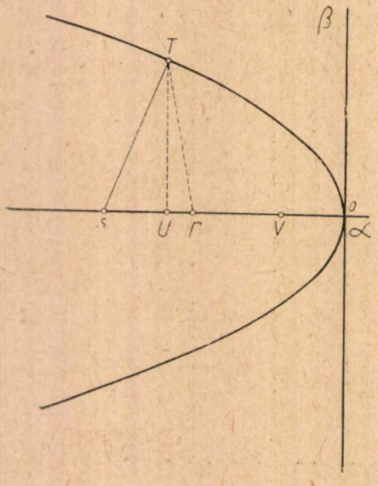


Fig. 13.

10. *Rapport entre les minimum et maximum*

On suppose que la courbe de résonance est symétrique. On place premièrement le point S (fig. 13) dans le plan de la parabole, d'après les constantes des circuits; on a déduit après le centre Γ du cercle des normales, en prenant le milieu de segment SV.

Soit ST une des normales; ΓT sera égal a ΓO car ces segments sont des rayons dans le cercle de Ioachimstahl.

D'autre part on sait que la sous-normale est égale au paramètre de la parabole, dans notre cas à $^1/_2$.

Donc nous avons:

$$SU = \tfrac{1}{2}$$

Il en résulte alors:

$$\overline{ST} = \sqrt{|x_0| - \tfrac{1}{4}}$$

Le rapport entre I_2 minimum et I_2 maximum sera donc:

$$\rho_0 = \frac{I_{2m}}{I_{2M}} = \frac{P_m}{P_M} = \frac{\overline{ST}}{\overline{SO}} = \frac{\sqrt{[x_0]-\frac{1}{4}}}{[x_0]}$$

A chaque valeur de $[x_0]$ correspond un valeur de ρ_0. On remaarque que ρ_0 diminue quand n l'indice de couplage, croit. Pour le couplage de transition ρ_0 devient égal à l'unité.

Dans la figure 14 on a tracé la variation de ρ_0 en fonction de $[x_0]$.

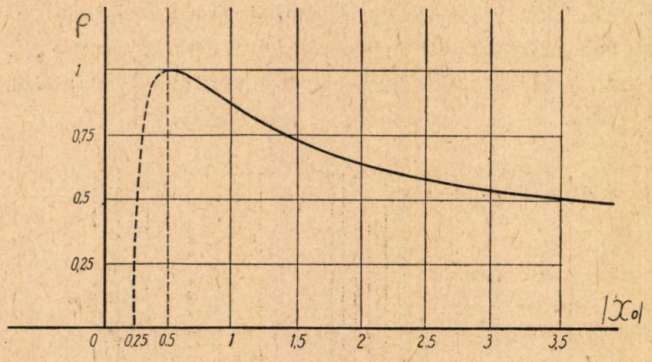


Fig. 14.

11. *Largeur de la bande pour une attenuation donnée*

Considérons toujours le cas de la courbe de résonance symétrique. Supposons que dans la figure 12 le segment ST n'est plus normal à la parabole. Sa longueur est déduite par la relation:

$$P^2 = A^2 + B^2 = (\alpha - x_0)^2 + \beta^2 = (\rho x_0)^2$$

avec:

$$\rho = \frac{\overline{ST}}{\overline{SO}}$$

En tenant compte que $\alpha = -\beta^2$ on déduit les valeurs de β — donc de ω — pour réaliser le rapport ρ:

$$\beta^2 = \left([x_1] - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4x_0^2(\rho^2 - 1)}{(1 - 2|x_0|)^2}}\right)$$

On a tracé dans la figure 15 la relation entre β et ρ, pour différentes valeurs de $|x_0|$.

La largeur de la bande correspondera à $2\Delta\omega$ donc à 2β.

12. *Conclusions*

On a cherché dans la présente note d'indiquer une méthode pratique permettant de suivre la résonance $I_2 = f(\omega)$, dans le cas des circuits couplés.

On a reussi de simplifier la base graphique de la méthode à une seule courbe universelle, la parabole $y^2 = x$. Cette courbe de base n'est pas modifiée par les constantes des circuits, pourvu qu'ils soient accordées ou non, ayant ou non le même amortissement. Ces constantes déterminent les coordonnées d'un point S dans le plan de la parabole; ce point détermine à son tour le vecteur dénommé l'indice de conductance mutuelle, qui est inversement proportionnel au courant I_2. Ce vecteur a l'origine en S et son extrémité se déplace sur la parabole quand la fréquence varie.

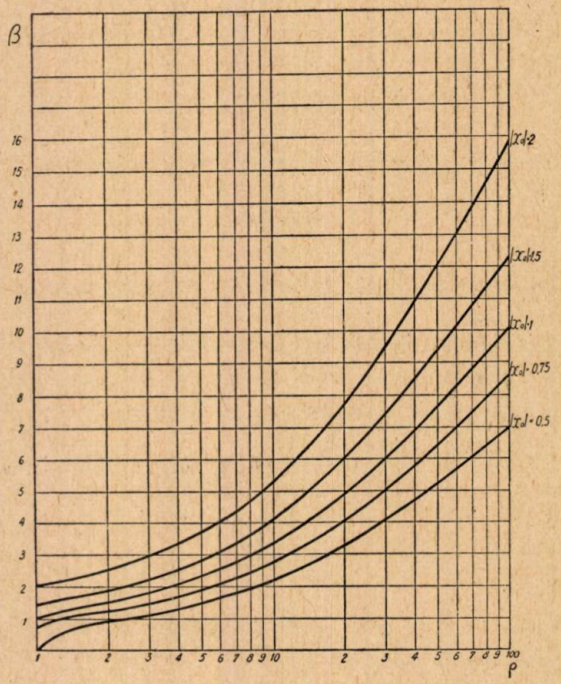


Fig. 15.

La fréquence peut être déduite de l'ordonnée de l'extrémité du vecteur car cette ordonnée est proportionnelle à l'écart de la fréquence.

On déduit les principales propriétés des circuits couplés, dans le cas d'un couplage réactif. L'étude peut être généralisée aussi dans le cas d'un couplage ayant une composante résistive.

Dans l'annexe sont données quelques expressions pour les grandeurs qui interviennent dans l'étude des circuits couplés; plusieurs cas particuliers rencontrés dans la pratique, sont considérés.

Toutes ces expressions sont déduites par le graphique et les équations basés sur la parabole $y^2 = x$.

ANNEXE

avec les expressions des grandeurs principales qui intervient dans la resonance de circuits couplés accordés

Les cas particuliers considéré

Cas	ω_1/ω_2	L_1/L_2	R_1/R_2	θ_1/θ_2
1 . . .	$=1$	$=1$	$=1$	$=1$
2 . . .	$=1$	$=1$	$\neq 1$	$\neq 1$
3 . . .	$=1$	$\neq 1$	$\neq 1$	$=1$
4 . . .	$=1$	$\neq 1$	$\neq 1$	$\neq 1$
5 . . .	$\neq 1$	$=1$	$=1$	$=1$
6 . . .	$\neq 1$	$=1$	$\neq 1$	$\neq 1$
7 . . .	$\neq 1$	$\neq 1$	$\neq 1$	$=1$
8 . . .	$\neq 1$	$\neq 1$	$\neq 1$	$\neq 1$

Les expressions des indices

Cas	a	b	$\sqrt{1-4b}$	$\beta/\Delta\omega$
1 . .	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{L}{R}$
2 . .	0	$\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}$	$\frac{R_1-R_2}{R_1+R_2}$	$\frac{2L}{R_1+R_2}$
3 . .	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{\theta}{2}$
4 . .	0	$\frac{\theta_1\theta_2}{(\theta_1+\theta_2)^2}$	$\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1+\theta_2}$	$\frac{\theta_1\,\theta_2}{\theta_1+\theta_2}$
5 . .	$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\cdot\frac{L}{R}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{L}{R}$
6 . .	$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\,\frac{2L}{R_1+R_2}$	$\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}$	$\frac{R_1-R_2}{R_1+R_2}$	$\frac{2L}{R_1+R_2}$
7 . .	$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\,\frac{\theta}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{\theta}{2}$
8 . .	$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\,\frac{\theta_1\theta_2}{\theta_1+\theta_2}$	$\frac{\theta_1\theta_2}{(\theta_1+\theta_2)^2}$	$\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1+\theta_2}$	$\frac{\theta_1\,\theta_2}{\theta_1+\theta_2}$

Les expresions des coordonnses x_0 et y_0

Cas	$-x_0$	$-y_0$
	$\frac{1}{4}\left(1+\frac{M^2\omega_0^2}{R^2}\right)$	0
	$\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\left(1+\frac{M^2\omega_0^2}{R_1R_2}\right)$	0
3	$\frac{1}{4}\left(1+\frac{M^2\omega_0^2}{R_1R_2}\right)$	0
	$\frac{\theta_1\theta_2}{\theta_1+\theta_2)^2}\left(1+\frac{M^2\omega_0^2}{R_1R_2}\right)$	0
5	$\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)^2\frac{L^2}{R^2}+\frac{1}{4}\left(1+\frac{M^2\omega_0^2}{R^2}\right)$	0
6	$\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)^2\frac{4L^2}{(R_1+R_2)^2}+\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\left(1+\frac{M^2\omega_0^2}{R_1R_2}\right)$	$(\omega_2-\omega_1)\frac{R_1-R_2}{(R_1+R_2)^2}L$
7	$\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)^2\frac{\theta^2}{4}+\frac{1}{4}\left(1+\frac{M^2\omega_0^2}{R_1R_2}\right)$	0
8	$\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)^2\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{(\theta_1+\theta_2)^2}+\frac{\theta_1\theta_2}{(\theta_1+\theta_2)^2}\left(1+\frac{M^2\omega_0^2}{R_1R_2}\right)$	$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\cdot\frac{\theta_1\theta_2(\theta_1-\theta_2)}{(\theta_1+\theta_2)^2}$

Les expressions du couplage de transition $M_0\,\omega_0$

Cas	$M_0^2\,\omega_0^2$
1	R^2
2	$\frac{R_1^2+R_2^2}{2}$
3	R_1R_2
4	$\frac{1}{2}\left(\frac{L_1}{L_2}R_2^2+\frac{L_2}{L_1}R_1^2\right)$
5	$R^2-L^2(\omega_2-\omega_1)^2$
6	$\frac{R_1^2+R_2^2}{2}-L^2(\omega_2-\omega_1)^2+\frac{27}{16}L^2(\omega_2-\omega_1)^2\left(\frac{R_1-R_2}{R_1+R_2}\right)^2$
7	$R_1R_2-(\omega_2-\omega_1)^2L_1L_2$
8	$\frac{R_1^2+R_2^2}{2}-L_1L_2(\omega_2-\omega_1)^2+\frac{27}{16}L_1L_2(\omega_2-\omega_1)^2\left(\frac{R_1-R_2}{R_1+R_2}\right)^2$

621.41 MACHINES HYDRAULIQUES

BEITRAG ZUM ENTWURF VON WASSERTURBINEN

von **Dorin Pavel**

Die Durchmesser der Wasserturbinen sind von der Schluckfähigkeit abhängig $D = a\sqrt{\frac{Q}{\sqrt{H}}}$, wobei die Beiwerte (a) durch wirtschaftliche Betrachtungen festgelegt werden. Einfacher ist es aber, diese Beiwerte statistisch zu erfassen. Wir haben aus einer grossen Anzahl von ausgeführten Überdruckturbinen diese Beiwerte für Laufradeintritt a_{1e} aussen und a_{1i} innen gemessen, desgleichen beim Austritt a_{2e} a_{2i}, Saugrohreintritt a_s, Leitradaaustritt a_0 und Leitradhöhe $B = bD_s$ statistisch erfasst u. z. in Abhängigkeit der Schnelläufigkeit n_s.

Für Francisturbinen:

$$a_{1e} \leqq 0{,}307 + \frac{160}{n_s} + 0{,}000\,000\,83\, n_s^2$$

$$a_{1i} \leqq \frac{223}{n_s} - 0{,}095 \text{ (unterhalb } n_s = 150 \text{ ist } a_{1i} = a_{1e})$$

$$a_{2e} \leqq = 0{,}68 + \frac{85}{n_s} - \frac{460}{n_s^2} \quad ; \quad a_s \leqq 0{,}766 + \frac{65{,}3}{n_s}$$

$$a_{2i} \leqq \frac{124}{n_s} - 0{,}07 \quad ; \quad a_0 \leqq 0{,}32 + \frac{163}{n_s} + 0{,}000\,0013 n_s^2$$

a_0 bleibt von $n_s = 400$ aufwärts konstant.

$$b = \frac{B}{D} \leqq 0{,}05\sqrt{n_s} - 0{,}001\, n_s - 0{,}25.$$

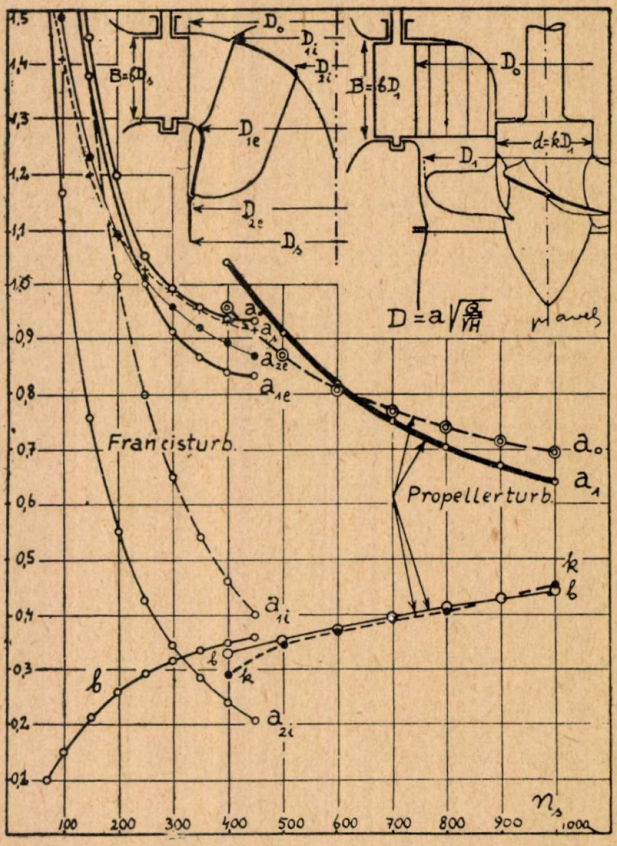
Der Wirkungsgrad ist von der Turbinentype, demnach von n_s, abhängig z. B. für den günstigsten normalen Austritt mittlerer Francisturbinen ist

$$\eta = 0{,}87 + \frac{n_s}{10\,000} - \frac{(n_s - 100)^2}{2\,000\,000}.$$

Für Propellerturbinen:

$$a_1 = a_2 \backsimeq 0{,}37 + \frac{270}{n_s} \quad ; \quad b \backsimeq 0{,}13 + 0{,}01\sqrt{n_s} = \frac{B}{D_1}$$

$$a_0 \backsimeq 0{,}52 + \frac{175}{n_s} \quad ; \quad k = \frac{d}{D_1} \backsimeq 0{,}25 + 0{,}0002\, n_s.$$



Letzterer Beiwert dient zur Bestimmung des Nabendurchmessers.

Wahl der Schnelläufigkeit.

Als Schnelläufigkeit wird bekanntlich die spezifische Umdrehungszahl $n_s = \frac{n}{H}\sqrt{\frac{P}{\sqrt{H}}}$ bezeichnet. Zwecks Vermeidung der Kavitations-

gefahr, dürfen gewisse Grenzwerte von n_s bei gegebener Fallhöhe H nicht erreicht werden, da sonst der Wirkungsgrad steil abfällt und die Turbinen unter starken Erschütterungen leiden. Wir haben diese Grenzwerte statistisch aufgezeichnet und folgende Formeln ausgewertet:

Für Francisturbinen ..... $n_s < \frac{27\,000}{H+36} - 33$

Für Propellerturbinen .... $n_s < \frac{30\,000}{24 + H\left(\frac{H_a+1{,}5}{H_a - H_s}\right)} - 100$

wobei $H_a \cong 10{,}33 - \frac{A}{900} - \frac{p_v}{\gamma}$ die Barometerhöhe (A Höhe in m des Aufstellungsortes und $\frac{p_v}{\gamma}$ Verdampfungshöhe z. B. 0,18 m bei 15°) und H_s die zulässige Saughöhe darstellt. Es wird H_s unter der Höhe des Laufradaustrittes (+) und über demselben (—) gerechnet.

Selbsverständlich können obige statistische Formeln nicht als endgültig betrachtet werden und sie können durch Eintragen von zukünftigen Neukonstruktionen verbessert werden. Die Streung obiger Formeln berechnet sich, bei den über ein Hundert Ausführungen von Turbinen, etwa auf $\pm 5\%$, demnach sind diese Formeln, wenn auch für die Turbinenhersteller von kleiner Bedeutung, für Anfänger bei dem Entwurf von Überdruckturbinen besonders vorteilhaft.

623.4 BALLISTIQUE

LA BALISTIQUE DU BOMBARDEMENT AÉRIEN

par **I. Lintes**

Resumé. *La Balistique du bombardement aérien est une création toute-à-fait nouvelle de la* « Balistique Extérieure ». *Son étude théorique présente le plus grand interêt. Dans ce qui suit l'auteur établit des rélations assez simples, mais qui devront être mises aux point par des expèriences.*

GÉNÉRALITÉS

La « *Balistique Extérieure* » est la science qui s'occupe du mouvement des projectiles dans l'air. Il s'agit donc d'un problème d'« *Aérodynamique* ».

Le mouvement des projectiles est divisé par la Mécanique en deux catégories:

1. *Le mouvement du centre de gravité.*
2. *Le mouvement autour du centre de gravité.*

Le champ des trajectoires d'un projectile est, lui aussi, divisé en trois catégories:

1. L'amplitude angulaire entre $-10°$ et $+45°$ représente le champ des trajectoires terrestres et navales;
2. L'amplitude angulaire entre $+30°$ et $+90°$ représente le champ des trajectoires antiaériennes;
3. L'amplitude angulaire entre $0°$ et $-90°$ représente le champ des trajectoires de bombes aériennes.

Nous allons nous occuper seulement de la « *Balistique du bombardement aérien* » (le bombardement horizontal et en piqué).

DÉFINITIONS GÉNÉRALES

D'après ce que nous avons vus plus haut, il en résulte que, par une trajectoire aérienne nous devons prendre seulement la branche descendante comprise entre A et B de la figure 1.

1. **Les éléments d'une trajectoire aérienne sont:**

Les élements initials

— La vitesse initiale . . . . . V_0

(Dans le cas du bombardement horizontal cette vitesse n'est autre chose que la vitesse de l'avion).

— L'angle de tir . . . . . θ_0

— L'angle de visé . . . . . $\beta = 90^0 - \alpha - \theta_0$

— L'hauteur de lancement . . . . . $\overline{OA} = Z$

Les éléments finals

— La vitesse restante de la bombe . . . . . V_r

— L'angle de chute . . . . . ω

— La portée. . . . . $\overline{OB} = X$

— La durée du trajet . . . . . T

Les éléments intermédiaires

— La vitesse tangentielle V

— L'inclinaison de la tangente . . . . . θ

— Les coordonnées . . . . . x et $(Z - z)$

— La durée du trajet . . . . . t

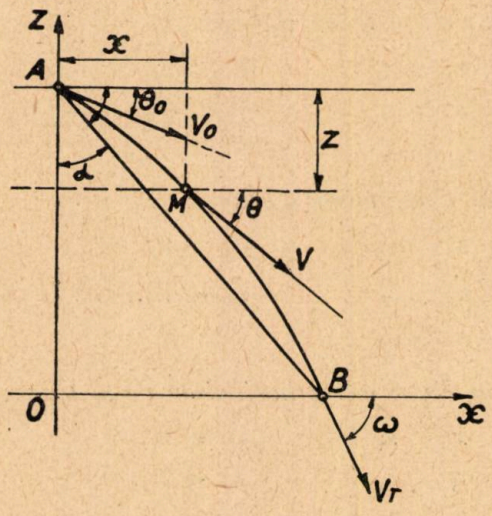


Fig. 1.

2. **Fascicule des trajectoires aériennes**

Par fascicule des trajectoires aériennes on doit comprendre l'ensemble des trajectoires aériennes d'un même plan vertical, qui sont tracées par des bombes identiques, lancées de la même altitude Z, avec

un même angle de tir, mais avec des vitesse V_0 différentes, ou avec des angles de lancement différents, mais de vitesses égales.

3. Courbes caractéristiques

Par courbes caractéristiques d'un fascicule des trajectoires aériennes on doit comprendre les courbes qui réunissent les mêmes points, ayant des propriétés identiques et les mêmes valeurs numériques, c'est-à-dire:

— la même abscisse,
— la même altitude,
— le même angle de la tangente,
— la même durée de trajet,
— la même vitesse tangentielle.

LES PROPRIÉTÉS DE LA TRAJECTOIRE AÉRIENNE

Si l'on comparera deux trajectoires aériennes 1 et 2 qui ont été décrites par des bombes identiques, dans les mêmes conditions, sauf les vitesses initiales, ou sauf les angles de tir, on arrive aux résultats suivantes:

Pour les mêmes angles et de vitesses initiales différentes

1. *Dans le cas d'une même abscisse*:

$$x_1 = x_2 \qquad \theta_1 > \theta_2$$
$$z_1 > z_2 \qquad V_1 \lessgtr V_2.$$
$$t_1 > t_2$$

2. *Dans le cas d'une même ordonnée*:

$$x_1 < x_2 \qquad \theta_1 > \theta_2$$
$$z_1 = z_2 \qquad V_1 < V_2.$$
$$t \gtrless t_2$$

3. *Dans le cas d'une même inclinaison de la tangente*:

$$x_1 < x_2 \qquad \theta_1 = \theta_2$$
$$z_1 < z_2 \qquad V_1 < V_2.$$
$$t_1 < t_2$$

4. *Dans le cas d'une même durée de trajet*:

$$x_1 < x_2 \qquad \theta_1 > \theta_2$$
$$z_1 \lessgtr z_2 \qquad V_1 < V_2.$$
$$t_1 = t_2$$

5. *Dans le cas d'une même vitesse tangentielle:*

$$x_1 < x_2 \qquad \theta_1 > \theta_2$$
$$z_1 > z_2 \qquad V_1 = V_2.$$
$$t_1 \lesseqgtr t_2$$

Pour des angles différents et des vitesses initiales égales

1. *Dans le cas d'une même abscisse:*

$$x_1 = x_2 \qquad t_1 < t_2$$
$$z_1 < z_2 \qquad V_1 < V_2$$
$$\theta_1 < \theta_2.$$

2. *Dans le cas d'une même ordonnée:*

$$x_1 > x_2 \qquad t_1 > t_2$$
$$z_1 = z_2 \qquad V_1 \lesseqgtr V_2$$
$$\theta_1 = \theta_2.$$

3. *Pour les mêmes inclinaisons de la tangente:*

$$x_1 > t_2 \qquad t_1 > t_2$$
$$z_1 > z_2 \qquad V_1 > V_2$$
$$\theta_1 = \theta_2.$$

4. *Dans le cas d'une même durée de trajet:*

$$x_1 > x_2 \qquad t_1 = t_2$$
$$z_1 < z_2 \qquad V_1 \lesseqgtr V_2$$
$$\theta_2 < \theta_2.$$

5. *Dans le cas d'une même vitesse tangentielle:*

$$x_1 > x_2 \qquad t_1 > t_2$$
$$z_1 \gtrless z_2 \qquad V_1 = V_2$$
$$\theta_1 \lesseqgtr \theta_2.$$

LE MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ

Les équations différentielles des trajectoires aériennes

On peut facilement établir et écrire les équations du mouvement du centre de gravité, qui seront:

$$1) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\gamma . V . \cos\theta \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\gamma . V . \sin\theta + g \end{cases}$$

ayant:

$$2) \quad \gamma = c . \frac{F(V)}{V}$$

dans la *Balistique Extérieure* et

$$2') \quad \gamma = \frac{S . C . S . V}{2 . m}$$

dans l'*Aérodynamique*, avec:

c, le coefficient balistique,
ρ, la masse spécifique de l'air,
C, le coefficient de résistance aérodynamique,
S, la section droite du projectile,
m, la masse du projectile.

Si l'on prend:

$$\gamma_0 = \frac{\rho_0 . C_0 . S_0 V_0}{z . m}$$

alors on aura:

$$3) \quad \gamma = \gamma_0 . \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{C}{C_0} \cdot \frac{V}{V_0} .$$

L'indice zéro étant pour le niveau de la mer, sauf pour V_0 qui reste la valeur de la vitesse initiale.

Maintenant nous allons prendre:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = (1 - 0{,}0000226 . z')^{4{,}255} \approx 1 - 0{,}0001 . z' \approx \left(\frac{V . \cos\theta}{V_0 . \cos\theta_0} \right)^a$$

avec:

$$z' = Z - z.$$

$$\frac{C}{C_0} \cdot \frac{V}{V_0} = \frac{V . f(V)}{V_0 . f(V_0)} \approx \left(\frac{V . \cos\theta}{V_0 . \cos\theta_0} \right)^b$$

alors:

$$4) \quad \gamma = \gamma_0 . \left(\frac{V . \cos\theta}{V_0 . \cos\theta_0} \right)^\varepsilon$$

avec:

$$\varepsilon = a + b > o.$$

Sachant que:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d\,(V.\cos\theta)}{dt}$$

et en remplaçant γ de 4), on obtient:

$$5) \qquad \frac{d\,(V.\cos\theta)}{(V.\cos\theta)^{\varepsilon+1}} = -\frac{\gamma_0}{(V_0.\cos\theta_0)^{\varepsilon}}.dt$$

En supposant $\varepsilon = const.$ et en tenant compte que $(V.\cos\theta)$ décroît lentement par rapport à $(V_0.\cos\theta_0)$, alors l'intégrale donnera:

$$6) \qquad \begin{cases} \dfrac{V.\cos\theta}{V_0.\cos\theta_0} = \dfrac{1}{(1+\varepsilon.\gamma_0.t)^{1/\varepsilon}} \\ \text{donc} \qquad \gamma = \dfrac{\gamma_0}{1+\varepsilon.\gamma_0.t} \end{cases}.$$

En intégrant une seconde fois, on obtient:

$$7) \qquad \frac{\gamma.(\varepsilon-1).x}{V_0.\cos\theta_0} = 1 - \frac{1}{(1+\varepsilon.\gamma_0.t)^{1/\varepsilon-1}}.$$

En supposant maintenant que:

$$8) \qquad \begin{cases} x = V_0.\cos\theta_0.\varphi(t) \\ z = V_0.\sin\theta_0.\varphi(t) + g.\psi(t). \end{cases}$$

Sachant d'après les équations 1) que:

$$9) \qquad \begin{cases} \psi'' + \gamma.\varphi' = 0 \\ \varphi'' + \gamma.\psi' = 1. \end{cases}$$

Alors on aura, en prenant la première relation:

$$10) \qquad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1 - \dfrac{1}{(1+\varepsilon.\gamma_0\,t)^{1/\varepsilon-1}}}{(\varepsilon-1).\gamma_0} \\ \varphi' = \dfrac{1}{(1+\varepsilon.\gamma_0.t)^{1/}} \quad ; \quad \varphi'' = -\dfrac{\gamma_0}{(1+\varepsilon\gamma_0\,t)^{1/\varepsilon+1}}. \end{cases}$$

Remarque:

Pour $\gamma_0 = 0$ (le vide) il faut avoir $\varphi = t$, ce qui est facile si on enlève l'indétermination.

De même il faut avoir: $\varphi' = 1$ et $\varphi'' = 0$, ce qui est facile a constater.

La détermination de la fonction $\psi(t)$ se fait en tenant compte de la seconde équation du 9). Alors on peut noter:

$$\psi = \eta + K.\varphi$$

K étant une constante et pour η on arrive facilement à l'expression:

$$\eta = \frac{(1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon.\gamma_0.t).t}{(\varepsilon + 1).\gamma_0}.$$

Mais pour simplifier nous allons prendre $K = 0$, donc:

$$11) \quad \begin{cases} \psi = \dfrac{(1 + \frac{1}{2}.\varepsilon.\gamma_0.t).t}{(\varepsilon + 1).\gamma_0} \\ \psi' = \dfrac{1 + \varepsilon.\gamma_0.t}{(\varepsilon + 1).\gamma_0} \quad ; \quad \psi'' = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \end{cases}$$

valeurs qui satisfont la seconde condition de (9).

Remarque:
Pour $\gamma_0 = 0$ (le vide) il faut avoir:

$$\psi = \tfrac{1}{2}\,t^2 \quad ; \quad \psi' = t \quad ; \quad \psi'' = 1.$$

Ceci est facile à constater si on enlève, par une méthode quelconque, l'indétermination et si on tient compte que ε peut être dans le cas du vide aussi grand qu'on le veut. Alors, on constate que la condition du vide est remplie.

LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

Les équations du mouvement seront:
— *Les équations des coordonnées*:

$$12) \quad \begin{cases} x = V_0.\cos\theta_0.\varphi \\ z = V_0.\sin\theta_0.\varphi + g.\psi. \end{cases}$$

— *Les équations des vitesses*:

$$13) \quad \begin{cases} V.\cos\theta = V_0.\cos\theta_0.\varphi' \\ V.\sin\theta = V_0.\sin\theta_0.\varphi' + g.\psi'. \end{cases}$$

— *Les équations des accélérations*:

$$14) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = V_0.\cos\theta_0.\varphi'' \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = V_0.\sin\theta_0.\varphi'' + g.\psi''. \end{cases}$$

Par des opérations algébriques on obtient:

$$15) \quad \begin{cases} z = x.\operatorname{tg}\theta_0 + g.\psi \\ \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta_0 + \dfrac{g}{V_0.\cos\theta_0}.\dfrac{\psi'}{\varphi'}. \end{cases}$$

La première équation de (12) nous permet d'écrire:

$$16) \qquad t = \frac{1}{\varepsilon . \gamma_0} \cdot \left[\frac{1}{\left[1 - \frac{(\varepsilon - 1) . \gamma_0 . x}{V_0 . \cos\theta_0} \right]^{\frac{2\varepsilon}{\varepsilon - 1}}} - 1 \right].$$

Donc:

$$17) \quad \begin{cases} \psi = \dfrac{1}{2\varepsilon(\varepsilon + 1) . \gamma_0^2} \cdot \left[\dfrac{1}{\left[1 - \dfrac{(\varepsilon - 1) . \gamma_0 . x}{V_0 . \cos\theta_0} \right]^{\frac{2\varepsilon}{\varepsilon - 1}}} - 1 \right] \\ \dfrac{\psi'}{\varphi'} = \dfrac{1}{(\varepsilon + 1) . \gamma_0 . \left[1 - \dfrac{(\varepsilon - 1)\, \gamma_0 . x}{V_0 . \cos\theta_0} \right]^{\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}}} . \end{cases}$$

Si on admet maintenant que pour $x < 1$ on peut écrire:

$$(1 - x)^n \overline{\overline{\sim}} 1 - \frac{1}{n} . x$$

et

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

Alors on arrive, avec une approximation qui reste à être établie par des expériences, aux relations:

$$18) \qquad z = x \,.\, \mathrm{tg}\theta_0 . \left[1 + \frac{g}{(\varepsilon + 1) . \gamma_0 . V_0 \cos\theta_0} \right] + \frac{g . x^2}{2 V_0^2 . \cos^2\theta_0} \cdot \frac{4\varepsilon}{\varepsilon + 1} \cdot \left[1 + \frac{2\varepsilon . \gamma_0 . x}{V_0 . \cos\theta_0} \right]$$

$$19) \qquad \mathrm{tg}\theta = \mathrm{tg}\theta_0 . \left[1 + \frac{g}{(\varepsilon + 1) . \gamma_0 . V_0 . \cos\theta_0} \right] + \frac{g . x}{V_0^2 . \cos^2\theta_0} \cdot \left[1 + \frac{2\varepsilon\, \gamma_0 . x}{V_0 . \cos\theta_0} \right]$$

$$20) \qquad t = \frac{x}{V_0 . \cos\theta_0} \cdot \left[1 + \frac{\varepsilon . \gamma_0 . x}{V_0 . \cos\theta_0} \right].$$

Remarques:

1. Dans le cas du bombardement horizontal $\theta_0 = 0$.
2. La valeur ε doit être établie par des expériences.
3. Étant donné que $(\varepsilon + 1) . \gamma_0 . V_0 . \cos\theta_0$ est assez grand par rapport à g, on peut négliger l'expression:

$$\frac{g}{(\varepsilon + 1) . \gamma_0 . V_0 . \cos\theta_0} .$$

4. Si on admet comme origine des axes de coordonnées l'avion même, dans le cas du bombardement horizontal seulement, alors les équations 1) peuvent s'écrire:

$$1 \text{ bis)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \gamma.(V_a - V.\cos\theta) \\ \dfrac{dz^2}{d^2} = -\gamma.V.\sin\theta + g \end{cases}$$

V_a étant la vitesse de l'avion.

De même, les équations des coordonnées seront:

$$12 \text{ bis)} \qquad \begin{cases} x = V_a.(t - \varphi) \\ z = g.\psi \end{cases}$$

et les équations des vitesses:

$$13 \text{ bis)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V_a.(1 - \varphi') \\ \dfrac{dz}{dt} = g.\psi' \end{cases}$$

Alors les relations du 9) restent valables dans le cas de fonctions φ et ψ.

LE CALCUL DE LA VITESSE

Le calcul de la vitesse-limite

Si on admet une bombe tombante d'une grande altitude, alors sa vitesse croît jusqu'à une limite V, que l'on suppose atteinte vers l'infini.

Cette vitesse est atteinte quand l'accélération de la résistance de l'air devient égale à l'accélération de la gravitation, c'est-à-dire quand:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma.V = g$$

car $\theta \cong 90^0$.

Mais comme $\gamma = c.\dfrac{F(V)}{V}$ il en résulte que la vitesse-limite peut être calculée par la relation:

$$21) \qquad F(V_l) = \frac{g}{c}.$$

Nous allons admettre que

$$F(V_l) = k.V_l^2 \text{ pour } V < 300 \text{ m/sec.}$$

(la vitesse du son dans l'air), alors il en résulte que:

22) $$V_l = \sqrt{\frac{g}{c.k}}$$

et on admet que $k \cong 0{,}124$.

Cette vitesse sera atteinte après un temps infini, mais nous allons supposer que l'altitude de lancement sera:

$Z_l \cong 6000$ m, c'est-à-dire un chiffre pratique, pour éliminer le cas $Z_l = \infty$.

En utilisant l'équation $F(V) = \frac{g}{c}$ nous avons trouvé les valeurs:

$10^4 c$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	14
V_l	378	338	316	302	291	281	273	267	261	253	249

1. Un simple calcul nous fait voir que le temps sera:

23) $$T_l = \frac{1}{2\sqrt{g.c.k}}.\text{Log}.\frac{\sqrt{g.ck} + c.k.V_l}{\sqrt{g.ck} - c.k.V_l} \text{ et } \frac{V}{V_l} = \frac{e^{\frac{2gt}{V_l}}.\frac{V_l + V_0}{V_l - V_0} - 1}{e^{\frac{2gt}{V_l}}.\frac{V_l + V_0}{V_l - V_0} + 1}.$$

Le calcul de la vitesse tangentielle

Pour le bombardement horizontal

Les relations (13) nous permettent d'écrire:

24) $$V = V_0.\sqrt{\varphi'^2 + \left(\frac{g}{V_0}\right)^2.\psi'}.$$

Mais comme cette expression est assez compliquée, nous allons admettre:

25) $$\begin{cases} V_x = V.\cos\theta = V_0.\left(1 - \frac{z}{Z_l}\right) \\ V_z = V.\sin\theta = V_l.\frac{z}{Z_l}.\left[D_h - (D_h - 1).\frac{z}{Z_l}\right] \end{cases}$$

avec $D_h \approx 1{,}22$, mais il doit être précisé par des expériences. Alors:

$$26) \qquad V = \sqrt{V_x^2 + V_z^2}$$

est avec une approximation suffisante:

$$26') \qquad V = V_0 \cdot \sqrt{+1 \frac{V_l^2 - V_0^2}{V_0^2} \cdot \left(\frac{z}{Z_l}\right)^2}.$$

Pour le cas du bombardement en piqué:

En admettant $\theta_0 = 90°$, les relations (13) nous permettent d'écrire:

$$V_p = V_0 \cdot \varphi' \cdot \left(1 + \frac{g}{V_p} \cdot \frac{\psi'}{\varphi'}\right).$$

Mais en négligeant, dans ce cas, le temps t et en admettant $\gamma_0 = c.k.V_0$, alors on peut écrire:

$$27) \qquad V_p = V_0 \cdot \left[1 + D_p \cdot \left(\frac{V_l}{V_0}\right)^2\right]$$

avec $D_p \approx 0{,}06$, mais il doit être précisé par des expériences.

RELATIONS PRATIQUES

Étant donné que pour le bombardement classique horizontal nous avons $\theta_0 = 0$, tandis que pour le bombardement en piqué $\theta_0 > 50°$, alors nous pourrons admettre les relations suivantes:

— *Pour le bombardement horizontal*:

$$28) \quad \begin{cases} z = \dfrac{g.x^2}{2V_0^2} \cdot \left[1 + A_h \cdot \dfrac{\gamma_0 . x}{V_0}\right] \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{g.x}{V_0^2} \cdot \left[1 + B_h \cdot \dfrac{\gamma_0 . x}{V_0}\right] \\ t = \dfrac{x}{V_0} \cdot \left[1 + C_h \cdot \dfrac{\gamma_0 . x}{V_0}\right] \\ V = V_l \cdot \dfrac{z}{Z_l} \cdot \left[D_h - (D_h - 1) \cdot \dfrac{z}{Z_l}\right]. \end{cases}$$

— *Pour le bombardement en piqué*:

$$29)\quad \begin{cases} z = x \cdot \operatorname{tg}\theta_0 + \dfrac{g \cdot x^2}{2V_0^2 \cdot \cos^2\theta_0} \cdot \left[1 + A_p \cdot \dfrac{\gamma_0 \cdot x}{V_0 \cdot \cos\theta_0}\right] \\ \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta_0 + \dfrac{g \cdot x}{V_0^2 \cdot \cos^2\theta_0} \cdot \left[1 + B_p \cdot \dfrac{\gamma_0 \cdot x}{V_0 \cdot \cos\theta_0}\right] \\ t = \dfrac{x}{V_0 \cdot \cos\theta_0} \cdot \left[1 + C_p \cdot \dfrac{\gamma_0 \cdot x}{V_0 \cdot \cos\theta_0}\right] \\ V = V_0 \cdot \left[1 + D_p \cdot \left(\dfrac{V_l}{V_0}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Les coefficients A, B, C, D devront être déterminés par des expériences.

LE CALCUL DES ÉLÉMENTS FINALS

Les éléments finals seront pour $x = X$ (la portée) et $z = Z$ (l'altitude):

— *Pour le bombardement horizontal.*

En remplaçant dans la paranthèse du second membre des relations 21):

$$x \cong V_0 \cdot \sqrt{\frac{2Z}{g}}$$

nous allons obtenir:

$$30)\quad \begin{cases} X = V_0 \cdot \sqrt{\dfrac{2Z}{g \cdot \left(1 + A_h \cdot \gamma_0 \cdot \sqrt{\dfrac{2}{g}}\right)}} \\ \operatorname{tg}\omega = \dfrac{\sqrt{2g \cdot Z}}{V_0} \cdot \left[1 + B_h \cdot \gamma_0 \cdot \sqrt{\dfrac{2Z}{g}}\right] \\ T = \sqrt{\dfrac{2Z}{g}} \cdot \left[1 + C_h \cdot \gamma_0 \cdot \sqrt{\dfrac{2Z}{g}}\right] \\ V_r = V_l \cdot \left[0{,}1 + \dfrac{3Z}{20.000}\right]. \end{cases}$$

— *Pour le bombardement en piqué*

Nous allons remplacer dans les termes de la paranthèse:

$$x \cong z/\operatorname{tg}\theta_0.$$

Pour la portée, nous allons remplacer x seulement dans le second membre de la relation:

$$\frac{z}{x} = \operatorname{tg}\theta_0 + \frac{gx}{2V_0^2 \cdot \cos^2\theta_0} \cdot \left[1 + A_p \cdot \frac{\gamma_0 \cdot x}{V_0 \cdot \cos\theta_0}\right]$$

pour éviter la résolution d'une équation du deuxième degré.

Ainsi on obtiendra:

$$31) \quad \begin{cases} X = \dfrac{Z}{\left[1 + \dfrac{g \cdot Z}{2V_0^2 \cdot \sin^2\theta_0} \cdot \left(1 + A_p \cdot \dfrac{\gamma_0 \cdot Z}{V_0 \cdot \sin\theta_0}\right)\right] \cdot \operatorname{tg}\theta_0} \\ \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\theta_0 + \dfrac{2g \cdot Z}{V_0^2 \cdot \sin 2\theta_0}\left(1 + B_p \cdot \dfrac{\gamma_0 \cdot Z}{V_0 \cdot \sin\theta_0}\right) \\ T = \dfrac{Z}{V_0 \cdot \sin\theta_0} \cdot \left(1 + C_p \cdot \dfrac{\gamma_0 \cdot Z}{V_0 \cdot \sin\theta_0}\right) \\ V_p = V_0 \cdot \left[1 + D_p \cdot \left(\dfrac{V_l}{V_0}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Ici il paraît que $D_p \overline{\sim} 0{,}06$.

FASCICULE DES TRAJECTOIRES

Si l'on suppose plusieurs trajectoires décrites par des bombes identiques, avec une même vitesse initiale, mais avec des angles de lancement variables, toutes les bombes lancées d'un même point de l'espace, alors on obtient deux fascicules des trajectoires qui auront des points caractéristiques similaires.

Nous allons essayer d'étudier ces points caractéristiques.

Pour le bombardement horizontal

Pour des vitesses V_0 variables, nous aurons:

1. *Courbes d'égale inclinaison de la tangente.*

Les premières deux équations du 26) nous permettent d'écrire:

$$32) \quad \frac{2B_h \cdot \gamma_0}{V_0} \cdot x \cdot z + 2 \cdot z - \frac{A_h \cdot \gamma_0}{V_0} \cdot \operatorname{tg}\theta \cdot x - \operatorname{tg}\theta = 0$$

qui est de la forme elliptique.

2. *Courbes d'égale durée de trajet.*

La première et la troisième équation du (26) nous permettent d'écrire:

$$33) \qquad \frac{2C_h.\gamma_0}{V_0}.x.z + z - \frac{A_h.\gamma_0.t^2}{V_0}.x - \frac{1}{2}.g.t^2 = 0$$

en négligeant le carré de la quantité $\left(C_h.\frac{\gamma_0.x}{V_0}\right)$.

Cette équation est également du type elliptique.

3. *Courbes d'égales vitesses tangentielles.*

La dernière équation du 26) nous montre que ces courbes seront du genre parabolique.

Pour le bombardement en piqué

Pour des vitesses V_0 variables nous aurons:

1. *Courbes d'égale inclinaison de la tangente.*

En éliminant V_0 entre les premières deux équations du 27), nous obtiendrons:

$$34) \qquad x.(\mathrm{tg}\theta_0 + \mathrm{tg}\theta) - 2.z = C_1$$

C_1 étant une constante expérimentale.

2. *Courbes d'égale durée du trajet.*

En éliminant V_0 entre la première et la troisième équation du 27), nous obtiendrons:

$$35) \qquad C_2.x - z + (V_0.t.\sin\theta_0 + \frac{1}{2}g.t^2) = 0$$

C_2 étant une constante qu'on doit déterminer expérimentalement.

3. *Courbes d'égale vitesse tangentielle.*

En éliminant V_0 entre la première et la dernière équation du 27), on obtient:

$$36) \qquad \frac{g.C_3}{2V^2.\cos^2\theta_0}.x^2 + x.\mathrm{tg}\theta_0 - z = 0$$

C_3 étant une constante expérimentale. Les courbes seront des paraboles.

* * *

Pour des vitesses V_0 constantes et θ_0 variables, nous aurons:

1. *Courbes d'égales inclinaisons de la tangente.*

En éliminant V_0 entre les premières deux équations du 27), on obtient les courbes demandées, mais cette opération est assez difficile et pour simplifier, nous allons supposer:

$$M = 1 + A_p.\frac{\gamma_0 x}{V_0.\cos\theta_0} \; ; \quad N = 1 + B_p.\frac{\gamma_0.x}{V_0.\cos\theta_0}.$$

Et nous allons admettre que M et N sont indépendants de x et de θ_0.

On va résoudre $tg\ \theta_0$ de la seconde équation et on va la remplacer dans la première, donc:

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{\frac{M}{2N}.x.\operatorname{tg}\theta - z}{x.\left(\frac{M}{2N} - 1\right)}.$$

Alors:

$$37)\quad \frac{g.M}{N}.\left[\frac{M-2N}{2V_0^2} + \frac{M^2.\operatorname{tg}^2\theta}{M-2N}\right].x^2 - \frac{2g.M^2.\operatorname{tg}\theta}{M-2N}.xy + \frac{2g.M.N}{M-2N}.z^2 - \frac{M}{2N}.z + \frac{M.\operatorname{tg}\theta}{2N}.x = 0.$$

Équation qui a le caractère d'une ellipse.

Cette équation peut être écrite sous cette forme plus simplifiée:

$$38)\quad \frac{1}{2}M.g.\left(\frac{1}{2V_0^2} + \operatorname{tg}^2\theta\right).x^2 - 2M.g.\operatorname{tg}\theta.x.z + 2M.g.z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}x.\operatorname{tg}\theta = 0$$

M devant être déterminé expérimentalement.

2. *Courbes d'égales durées de trajet.*

Nous allons éliminer $\operatorname{tg}\theta_0$ entre la première et la troisième équation des 27), en procedant de la même façon que plus haut, et nous obtiendrons l'équation:

$$39)\quad x^2 + z^2 - M'.g.t^2.z + \left(\frac{1}{2}M'.g.t^2\right)^2 - V_0^2.t^2 = 0.$$

En supposant $\left(\frac{C_p.\gamma_0.x}{V_0.\cos\theta_0}\right)$ négligeable et M' devant être déterminé expérimentalement.

Cette équation a le caractère d'une hyperbole.

3. *Courbes d'égales vitesses tangentielles.*

Ces courbes auront le même caractère des droites horizontales, comme pour le cas du bombardement horizontal et dont l'équation sera:

$$40)\quad V_z = V_{600}.\frac{z}{600}$$

étant la vitesse donnée pour la dernière relation du 27).

CORRECTIONS BALISTIQUES ET ATMOSPHÉRIQUES

Les éléments qui peuvent varier dans un bombardement aérien sont:

— l'altitude;
— la vitesse;
— l'angle de projection;
— le poids de la bombe;
— la forme de la bombe;
— la densité de l'air;
— d'autres éléments qui n'entrent pas dans les équations du mouvement (la visée, la direction du vol, le moment du déclenchement des bombes, etc.).

Pour connaître la valeur des conséquences de ces variations, nous allons étudier seulement le cas des éléments finals.

Pour le bombardement horizontal:

Nous allons différencier logaritmiquement les relations (28), alors nous aurons:

41)
$$\begin{cases} \dfrac{dX}{X} = (1-\xi).\dfrac{dV_0}{V_0} + 0{,}5.\dfrac{dZ}{Z} - \xi.\dfrac{d\gamma_0}{\gamma_0} \\ \dfrac{\operatorname{tg}\omega}{d(\operatorname{tg}\omega)} = (\zeta-1).\dfrac{dV_0}{V_0} + 0{,}5.\dfrac{dZ}{Z} + \zeta.\dfrac{d\gamma_0}{V_0} \\ \dfrac{dT}{T} = x.\dfrac{dV_0}{V_0} + 0{,}5.\dfrac{dZ}{Z} + x.\dfrac{d\gamma_0}{V_0} \\ \dfrac{dV_r}{V_r} = \dfrac{dZ}{Z} \end{cases}$$

avec:

$$\xi = \frac{1}{1+\dfrac{1}{A_h.\sqrt{\dfrac{2Z}{g}}}} \quad ; \quad \zeta = \frac{1}{1+\dfrac{1}{B_h.\sqrt{\dfrac{2Z}{g}}}} \quad ; \quad x = \frac{1}{1+\dfrac{1}{C_h.\sqrt{\dfrac{2Z}{g}}}}.$$

Ayant considéré toujours $\left(\sqrt{\dfrac{2Z}{g}}\right)$ constant.

Plus généralement on peut prendre des coefficients: Ai; Bi; Ci; Di pour les variations dX, $d(\operatorname{tg}\omega)$; dT, dV_r avec $i = V_0, z, \gamma_0$, sachant que:

$$\frac{d\gamma_0}{\gamma_0} = \frac{d\rho_0}{\rho_0} + \frac{dC_0}{C_0} + \frac{dS_0}{S_0} - \frac{dp}{p}.$$

Ces coefficients devront être déterminés expérimentalement.

Pour le bombardement en piqué:

On peut procéder d'une façon analogue, mais dans ce cas les corrections sont presque négligeables devant la rapidité du bombardement.

LE MOUVEMENT AUTOUR DU CENTRE DE GRAVITÉ

Généralités

Le mouvement d'un coup autour de son centre de gravité peut être étudié à l'aide de ses équations: trois des forces et trois des moments. Dans le cas des bombes empennées, on établie généralement la courbe métacentrique, qui définie la direction de la résistance aérodynamique et le point d'application. Ainsi par exemple si:

$$42) \qquad F_\delta = \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_\delta \cdot S_\delta \cdot V^2$$

représente la résistance aérodynamique, la bombe étant inclinée d'un angle δ par rapport à la tangente de la trajectoire, et si G représente le centre de gravité de la bombe et C le centre de poussée, alors le moment aérodynamique de redressement sera:

$$43) \qquad M_\delta = F_\delta \cdot \overline{GC} \cdot \sin\tau$$

τ étant l'angle de F_δ avec l'axe de la bombe.

La condition de stabilité sera:

$$44) \qquad M_\delta \geqslant I_t \cdot \frac{d^2\delta}{dt^2}$$

I_t étant le moment d'inertie transversale de la bombe.

Mais comme le redressement de la bombe se fait toujours par une série d'oscillations, on doit tenir compte aussi de l'équation d'oscillation:

$$45) \qquad I_t \cdot \frac{d^2\delta}{dt^2} + A \cdot V \cdot \frac{d\delta}{dt} + B \cdot V^2 \cdot \delta = 0$$

A étant le moment d'inertie polaire de la bombe (coefficient d'amortissement) et B le moment statique polaire (de redressement).

Quand les forces extérieures varient, alors on peut appliquer les équations d'Euler, qui complique un peu les calculs.

L'altitude minima de lancement

L'altitude minima de lancement doit être calculée en appliquant deux hypothèses différentes:

1. La bombe doit toucher l'objectif avec un angle de chute de 60° minimum.

2. La bombe doit suivre la tangente de la trajectoire, c'est-à-dire doit avoir un coefficient de stabilité plus grand qu'un minimum trouvé par expériences.

Ces deux conditions peuvent se résumer dans les relations:

$$46) \qquad \sqrt{\frac{2Z}{g}} \geqslant -\frac{g}{V_0} + \sqrt{\left(\frac{g}{V_0}\right)^2 + 6{,}92 \cdot \frac{B_h \cdot g \cdot \gamma_0}{V_0}}$$

avec ou un peu plus d'approximation:

$$46) \text{ bis} \qquad Z_{\min.} = 59{,}5 \cdot B_h^2 \cdot \gamma_0^2$$

et

$$47) \qquad Z_{\min.} = Z_l \cdot \sqrt{\frac{4000 \cdot I_t \cdot \sigma_{\min.} - a^2 \cdot l \cdot V_0^2}{D_h \cdot a^2 \cdot l \cdot (V_l^2 - V_0^2)}}$$

$T_{\min.}$ étant le coefficient minimum de stabilité, trouvé par des expériences.

L'influence du mode de la suspension de la bombe

Dans un avion les bombes peuvent être suspendues:
— horizontalement en dehors;
— » à l'intérieur;
— Verticalement, têtes en haut à l'interieur.

Si l'on admet maintenant que le paramètre γ_0 reste valable pour la première façon de suspension horizontale, alors nous allons admettre:

$$48) \qquad \begin{cases} \gamma_0' = k_1 \cdot \gamma_0 \text{ pour la suspension horizontale intérieure avec } k_1 \eqslantless 1{,}07 \\ \gamma_0'' = k_2 \cdot \gamma_0 \text{ pour la suspension verticale avec } k_2 \eqslantless 1{,}20 \end{cases}$$

Il reste à vérifier les valeurs des coefficients k_1 et k_2 par des expériences.

LES ÉLÉMENTS D'UNE TABLE DE TIR DE BOMBARDEMENT AÉRIEN

Une table de tir de bombardement aérien doit comprendre:

1. Les éléments qui sont nécessaires pour l'exécution d'un bombardement aérien.

2. Les éléments qui sont nécessaires pour vérifier un bombardement aérien.

3. Les éléments secondaires.

Parmi ces éléments qui sont généralement calculables à l'aide des formules indiquées plus haut, nous allons donner seulement la formule de l'*angle de visé.*

— Pour le bombardement horizontal:

$$49) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{X}{Z} = k \cdot \frac{V_0}{\sqrt{Z}}$$

k étant un coefficient qu'on doit établir pas des expériences.

— Pour le bombardement en piqué:

$$50) \quad \operatorname{tg}(90° - \alpha - \theta_0) = \operatorname{tg}\nu = \frac{1 - \frac{X}{Z} \cdot \operatorname{tg}\theta_0}{\frac{X}{Z} + \operatorname{tg}\theta_0} \cong \frac{1}{\left(\frac{4 \cdot V_0^2 \cdot \sin^2\theta_0}{g \cdot Z} + 1\right) \cdot \operatorname{tg}\theta_0}.$$

Pour $V_0 = 150$ m/sec. et $Z = 600$ m. on peut prendre:

$$51) \qquad \operatorname{tg}\nu \cong \frac{1}{16 \cdot \operatorname{tg}\theta_0}.$$

L'angle de rémanence, seulement pour le bombardement horizontal:

$$52) \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{V_0 \cdot T - X}{Z} \cong \frac{\gamma_0 \cdot V_0}{k_1 + k_2 \cdot \sqrt{Z}}$$

k_1 et k_2 devront être établis par des expériences:

Pour les petites altitudes on doit prendre le cas limite, c'est-à-dire:

$$53) \qquad \operatorname{tg}\beta_0 = \lim_{Z=0} (\operatorname{tg}\beta) = \frac{\gamma_0 \cdot V_0}{g}.$$

LE BOMBARDEMENT DES BUTS AÉRIENS

Dans le bombardement des buts aériens, ayant donc une altitude bien plus grande que le niveau de la mer, alors les relations analytiques subsistent, mais la seule différence reste pour la valeur de la masse spécifique de l'air. En effet les calculs devront tenir compte que le bombardement étant fait de l'altitude Z jusqu'à l'altitude Z' du but aérien, la masse spécifique de l'air doit être prise entre Z et Z'.

Ceci modifie un peu la trajectoire, par comparaison à la trajectoire qui aura comme issue l'altitude $(Z - Z')$, quoique la différence d'altitude reste la même.

LE CALCUL DES ÉCARTS PROBABLES

Le calcul des écarts probables est purement théorique et nous avons estimé seulement les erreurs les plus fréquentes, pour aboutir aux résultats analytiques que nous allons donner plus bas. Ainsi donc, nous supposons avoir:

1. Erreurs de visée, estimées dans le cas du bombardement, 10 millième minimum.

2. Erreurs dans la determination de la vitesse de l'avion, estimées pour les anémomètres actuels à 5% de la vitesse.

3. Erreurs dans la détermination de l'altitude, estimées pour les altimètres actuels à 5% de l'altitude, pour des altitudes plus grandes que 1.000 m.

4. Erreurs dues aux coefficients balistiques de la bombe (la forme et le poid), estimées à 5% de la portée.

5. Erreurs dues au mécanisme de lancement (manque d'instabilité), estimées à 0,25 secondes.

6. Erreurs dues de l'impossibilité du maintien d'une trajectoire rectiligne dans le moment du déclenchement des bombes, estimées à 5° en hauteur et 10° en direction.

7. Erreurs dues à une rotation latérale de l'avion, qu'on estime à 5 m/sec. minimum.

Avec ces considérations, nous sommes arrivés aux relations suivantes, pour les écarts probables en portée et en direction:

— *Pour le bombardement horrizontal:*

$$54) \quad \begin{cases} A_b = \dfrac{Z}{400} + \dfrac{V_0 . \sqrt{Z}}{50} + \dfrac{V_0}{20} + 4 . \dfrac{a^2 . l}{p} \\ \quad \text{(en portée)} \\ A_d = \dfrac{Z}{400} + \dfrac{(V_0 + 100) . \sqrt{Z}}{150} + 2 . \dfrac{a^2 . l}{p} \\ \quad \text{(en direction).} \end{cases}$$

— *Pour le bombardement en piqué:*

$$55) \quad \begin{cases} A_b = \dfrac{Z}{100} . \left(1 + \dfrac{V_0 . \cos\theta_0}{20} \right) \\ A_d = \dfrac{Z}{100} . \left(1 + \dfrac{V_0 . \cos\theta_0}{60} \right) \end{cases} .$$

629.13 AVIATION.

L'EMPLACEMENT DES LONGERONS DANS LA PROFONDEUR DES AILES DE L'AVION

par **Gr. Zamfirescu**

Généralités

Un des problèmes les plus importants qui préoccupe les constructeurs d'avions est l'emplacement des longerons dans la profondeur de l'aile (dans le cas des ailes bilongerons), pour harmoniser les intérêts d'ordre constructif, avec la nécessité de réaliser les longerons les plus légers et qui puissent résister à la charge imposée par les règlements techniques de calcul.

Mais, ce problème présente tant de difficultés, qu'une étude générale ne peut pas être entreprise, de sorte que, dans la pratique, on se contente de fixer la position des longerons, seulement par des raisons d'ordre constructif.

Monsieur T. Oniga, étudiant de la IV-ème année de la Politechnique de Bucarest, à l'occasion des travaux du projet d'Avion, au cours de l'année 1941, a osé attaquer ce problème dans sa généralité. Il s'est vite rendu compte de l'exactitude de l'affirmation précédente.

Dans cet étude nous allons discuter ce problème, dans le cas particulier, mais assez courant, de l'aile monoplane, bilongerone, en console et dans l'hypotèse que les rapports entre la profondeur du profil dans une certaine section et les deux cotes, qui caractérisent la position des longerons dans la profondeur de l'aile dans la même section, c'est-à-dire la distance entre le bord d'attaque de l'aile et le longeron antérieur et la distance entre les deux longerons (fig. 1) sont constantes.

Les charges unitaires

Soit:

G = le poids total de l'avion.

G' = le poids de l'avion, moins le poids de la cellule.

S = la surface portante.

p_i = la charge unitaire normale sur l'aile, dans un des quatre premiers cas de calcul (vol à la portance maximum, vol à la vitesse maximum, vol en piqué et vol sur le dos).

Pour les cas I, II et IV de calcul, cette charge unitaire sur l'aile est égale à:

$$(1) \qquad p_i = n_i \cdot \frac{G' \cdot \cos\alpha_i + G \cdot \frac{Cx}{Cz} \cdot \sin\alpha_i}{S}$$

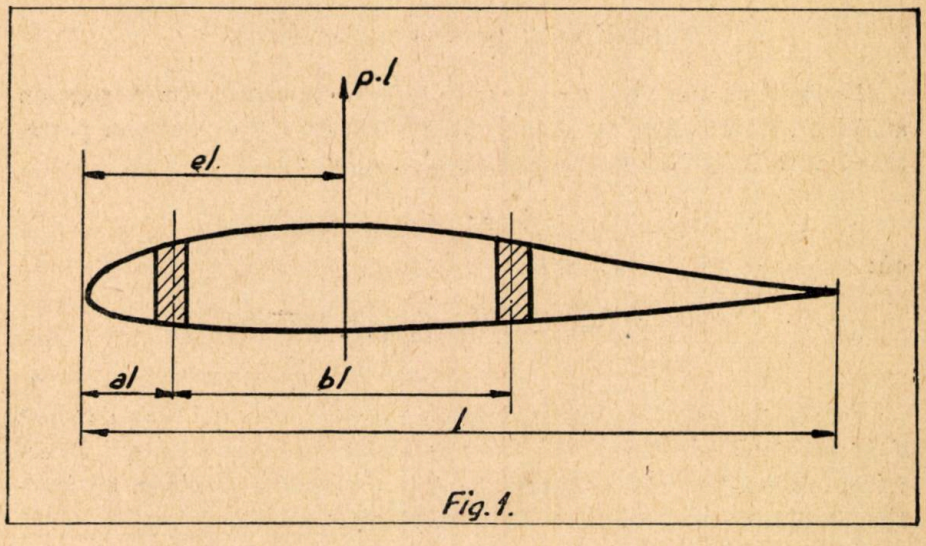


Fig. 1.

où: n_i est le facteur de charge, α_i l'incidence de vol et Cx et Cz, les coefficients unitaires de traînée et de portance de l'avion dans le cas de calcul considéré.

Pour le III-ème cas de calcul (le vol en piqué) le moment de torsion afférent à l'unité de surface portante est égal à:

$$(2) \qquad m_3 = n_3 \cdot \frac{C_{m0} \cdot G}{S \cdot (Cx + C_f)} \cdot l = p_3$$

où: n_3; C_{m0}; Cx et C_f sont le facteur de charge, le coefficient unitaire de moment, le coefficient unitaire de traînée de l'avion et le coefficient unitaire de freinage de l'hélice, pour le III-ème cas de calcul.

Les charges qui reviennent à l'unité de longueur de l'envergure des deux longerons sont:

a) Pour le longeron antérieur:

$f_i = \pm p_i . l . \dfrac{a + b - e_i}{b}$, dans les cas I, II et IV de calcul.

$f_3 = \pm p_3 . l . \dfrac{1}{b}$, dans le III-ème cas de calcul;

b) Pour le longeron postérieur:

$s_i = \pm p_i . l . \dfrac{e_i - a}{b}$, dans les cas I, II et IV de calcul.

$s_3 = \pm p_3 . l . \dfrac{1}{b}$, dans le III-ème cas de calcul.

Paramètres de position des longerons

Nous allons noter par « γ », le rapport entre la charge sur le longeron antérieur, dans le I-er cas de calcul et la charge sur le longeron postérieur, dans le II-ème cas de calcul, c'est-à-dire:

$$f_1 = \gamma . s_2$$

où:

$$(3) \qquad p_1 . l . \frac{a + b - e_1}{b} = \gamma . p_2 . l . \frac{e_2 - a}{b} .$$

De cette rélation, on tire les expressions suivantes, qui nous donnent l'expression de chacun de ces deux paramètres « a » et « b », qui déterminent la position des longerons dans la profondeur de l'aile, en fonction de l'autre paramètre et du rapport « γ »:

$$(4) \qquad a = \frac{p_1 . (e_1 - b) + \gamma . p_2 . e_2}{p_1 + \gamma . p_2}$$

$$(5) \qquad b = \frac{p_1 . (e_1 - a) + \gamma . p_2 . (e_2 - a)}{p_1} .$$

De même, le rapport « γ », entre les charges f_1 et s_2, peut être exprimé, en fonction des deux paramètres « a » et « b », à savoir:

$$(6) \qquad \gamma = \frac{p_1}{p_2} . \frac{a + b - e_1}{e_2 - a} .$$

Les charges unitaires exprimées en fonction des paramètres de position des longerons

De même, les charges unitaires sur les deux longerons, dans les quatre cas de calcul, peuvent être exprimées en fonction du rapport « γ » et d'un des deux paramètres, c'est-à-dire:

a) Pour le longeron antérieur, dans les cas I, II, III et IV de calcul:

$$(7)\quad f_1 = p_1 . l . \frac{\gamma . p_2 . (e_2 - a)}{p_1 . (e_1 - a) + \gamma . p_2 . (e_2 - a)} = p_1 . l . \frac{\gamma . p_2 . (e_2 - e_1 + b)}{b . (p_1 + \gamma . p_2)}$$

$$(8)\quad f_2 = p_2 . l . \frac{p_1 . (e_1 - e_2) + \gamma . p_2 . (e_2 - a)}{p_1 . (e_1 - a) + \gamma . p_2 . (e_2 - a)} = p_2 . l . \frac{p_1 . (e_1 - e_2) + \gamma . p_2 . b}{b . (p_1 + \gamma . p_2)}$$

$$(9)\quad f_3 = - p_3 . l . \frac{p_1}{p_1 . (e_1 - a) + \gamma . p_2 . (e_2 - a)} = - p_3 . l . \frac{1}{b} .$$

$$(10)\quad f_4 = - p_4 . l . \frac{p_1 . (e_1 - e_4) + \gamma . p_2 . (e_2 - a)}{p_1 . (e_1 - a) + \gamma . p_2 . (e_2 - a)} =$$

$$- p_4 . l . \frac{p_1 . (e_1 - e_4) + \gamma . p_2 . (b + e_2 - e_4)}{b (p_1 + \gamma . p_2)} .$$

b) Pour le longeron postérieur, dans les cas I, II, III et IV de calcul:

$$(11)\quad s_1 = p_1 . l . \frac{p_1 . (e_1 - a)}{p_1 . (e_1 - a) + \gamma . p_2 . (e_2 - a)} = p_1 . l . \frac{\gamma . p_2 . (e_1 - e_2) + b . p_1}{b . (p_1 + \gamma . p_2)}$$

$$(12)\quad s_2 = p_2 . l . \frac{p_1 (e_2 - a)}{p_1 . (e_1 - a) + \gamma . p_2 . (e_2 - a)} = p_2 . l . \frac{p_1 . (e_2 - e_1 + b)}{b . (p_1 + \gamma . p_2)}$$

$$(13)\quad s_3 = p_3 . l . \frac{p_1}{p_1 . (e_1 - a) + \gamma . p_2 . (e_2 - a)} = p_3 . l . \frac{1}{b} .$$

$$(14)\quad s_4 = - p_4 . l . \frac{p_1 . (e_4 - a)}{p_1 . (e_1 - a) + \gamma . p_2 . (e_2 - a)} =$$

$$- p_4 . l . \frac{p_1 . (b - e_1 + e_4) + \gamma . p_2 . (e_4 - e_2)}{b . (p_1 + \gamma . p_2)} .$$

Zones de charges maximum pour les quatres cas de calcul

La charge sur un des deux longerons, dans un certain cas de calcul, varie avec les paramètres « *a* » et « *b* », et, pour une valeur quelconque attribuée à ces paramètres, la charge sur chaque longeron est maximum dans un des quatre cas de calcul.

Pour déterminer les limites, dans lesquelles chacun des quatre cas de calcul donne des charges maximum sur un des deux longerons, nous poserons les conditions suivantes:

$$f_1 \geqslant f_2 \quad ; \quad f_1 \geqslant f_3 \quad ; \quad f_1 \geqslant f_4$$
$$\text{et} \quad s_2 \geqslant s_1 \quad ; \quad s_2 \geqslant s_3 \quad ; \quad s_2 \geqslant s_4 ,$$

les trois premières, pour le longeron antérieur et les trois dernières, pour le longeron postérieur.

En résolvant ces six inégalités, on obtient les valeurs suivantes pour les paramètres « a » et « b », qui limitent ces zones:

a) Dans le cas du longeron antérieur:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \leqslant a'_2 = e_2 + \dfrac{p_1 \cdot (e_2 - e_1)}{\gamma \cdot (p_1 - p_2)} \\ b \geqslant b'_2 = \dfrac{p_1 \cdot (e_1 - e_2)\,(1 + \gamma)}{\gamma \cdot (p_1 - p_2)} \end{array} \right\} \text{ pour } f_1 \geqslant f_2$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \leqslant a'_3 = e_2 - \dfrac{p_3}{\gamma \cdot p_2} \\ b \geqslant b'_3 = e_1 - e_2 + \dfrac{p_3 \cdot (p_1 + \gamma \cdot p_2)}{\gamma \cdot p_1 \cdot p_2} \end{array} \right\} \text{ pour } f_1 \geqslant f_3$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \leqslant a'_4 = e_2 - \dfrac{p_1 \cdot p_4\,(e_1 - e_4)}{\gamma \cdot p_2 \cdot (p_1 - p_4)} \\ b \geqslant b'_4 = \dfrac{p_1 \cdot p_4 \cdot (e_1 - e_4) + \gamma \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot (e_1 - e_2) + \gamma \cdot p_2 \cdot p_4 \cdot (e_2 - e_4)}{\gamma \cdot p_2 \cdot (p_1 - p_4)} \end{array} \right\} \text{ pour } f_1 \geqslant f_4$$

b) Dans le cas du longeron postérieur:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \geqslant a''_1 = \dfrac{p_1 \cdot e_1 - p_2 \cdot e_2}{p_1 - p_2} \\ b \leqslant b''_1 = \dfrac{p_2 \cdot (e_2 - e_1)\,(1 + \gamma)}{p_1 - p_2} \end{array} \right\} \text{ pour } s_2 \geqslant s_1$$

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \leqslant a''_3 = e_2 - \dfrac{p_3}{p_2} \\ b \geqslant b''_3 = e_1 - e_2 + \dfrac{p_3}{p_2} + \dfrac{\gamma \cdot p_3}{p_1} \end{array} \right\} \text{ pour } s_2 \geqslant s_3$$

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \leqslant a''_4 = \dfrac{p_2 \cdot e_2 - p_4 \cdot e_4}{p_2 - p_4} \\ b \geqslant b''_4 = \dfrac{p_1 \cdot p_2 \cdot (e_1 - e_2) - p_1 \cdot p_4 (e_1 - e_4) + \gamma \cdot p_2 \cdot p_4 \cdot (e_4 - e_2)}{p_1 \cdot (p_2 - p_4)} \end{array} \right\} \text{ pour } s_2 \geqslant s_4 .$$

Nous avons tracé, dans le graphique fig. 2, les courbes représentatives des variations des paramètres a'_2 ; a'_3 ; a'_4 ; a''_1 ; a''_3 et a''_4,

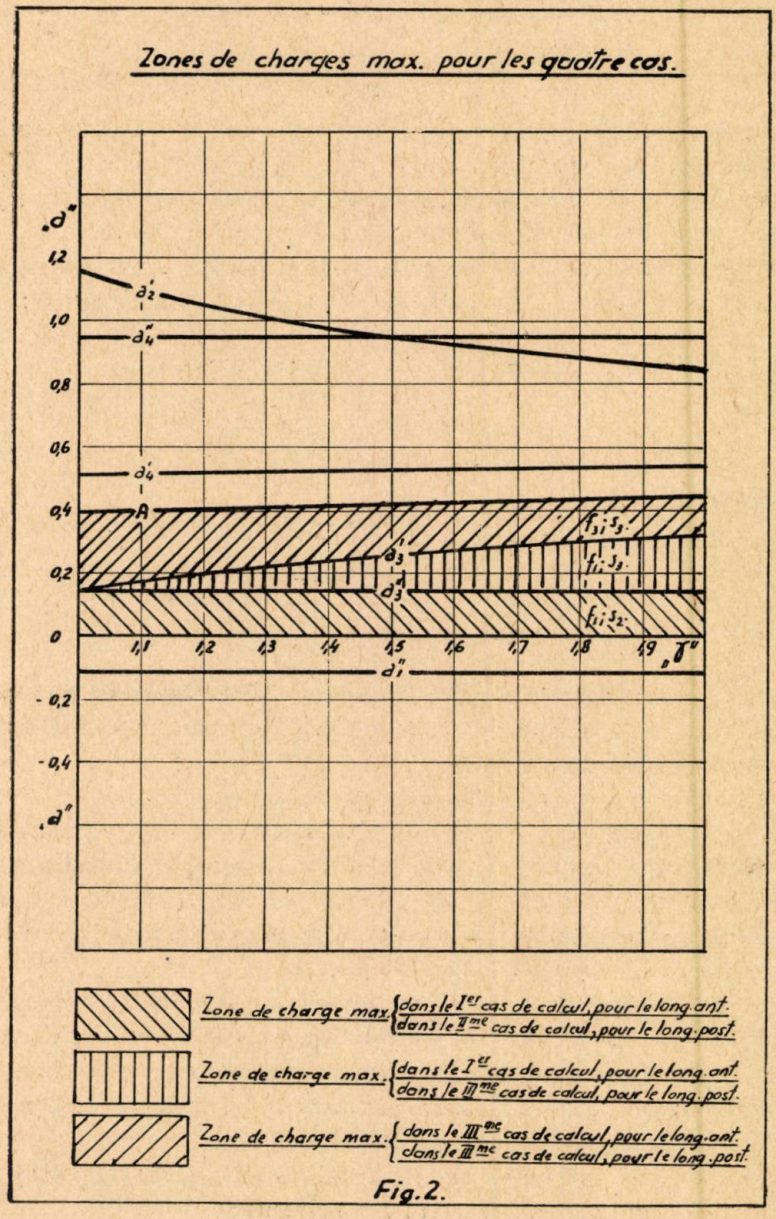


Fig. 2.

en fonction du rapport γ des charges f_1 et s_2 et pour les valeurs suivantes

des charges unitaires et de la position du centre de pression, dans les quatre cas de calcul:

$$p_1 = 850 \text{ Kg/m}^2 \qquad p_2 = 500 \text{ Kg/m}^2$$
$$p_3 = 180 \text{ Kg/m}^2 \qquad p_4 = 300 \text{ Kg/m}^2$$
$$e_1 = 0{,}25 \qquad e_2 = 0{,}50$$
$$e_3 = \infty \qquad e_4 = 0{,}20$$

De même, dans le graphique fig. 3, nous avons tracé les courbes représentatives des paramètres b_2' ; b_3' ; b_4' ; b_1'' ; b_3'' ; et b_4'', en fonction du rapport « γ » et pour les mêmes valeurs de p_1 ; p_2 ; p_3 ; p_4 ; e_1 ; e_2 et e_4, que dans l'exemple numérique ci-dessus.

Les paramètres de position « a » et « b », devant avoir des valeurs positives, nous poserons en plus, les deux conditions suivantes:

$$a = \frac{p_1 (e_1 - b) + \gamma \cdot p_2 \cdot e_2}{p_1 + \gamma \cdot p_2} \geqslant 0$$

et

$$b = \frac{p_1(e_1 - a) + \gamma \cdot p_2 \cdot (e_2 - a)}{p_1} \geqslant 0$$

d'où on tire:

(21) $$b \leqslant B = \frac{p_1 \cdot e_1 + \gamma \cdot p_2 \cdot e_2}{p_1}$$

(22) $$a \leqslant A = \frac{p_1 \cdot e_1 + \gamma \cdot p_2 \cdot e_2}{p_1 + \gamma \cdot p_2} .$$

Dans le graphique fig. 2, nous avons tracé la variation du paramètre « A », et dans le graphique fig. 3, la variation du paramètre « B », pour les mêmes données numériques.

Ces données, correspondent à la moyenne des cas réels de chargement. Les courbes a_1''; b_2'; b_4' et b_4'', ayant des valeurs négatives, ne peuvent pas être prises en considération, ainsi que les valeurs correspondantes b_1''; a_2'; a_4' et a_4'' et, par suite, les zones qui nous intéressent sur les graphiques 2 et 3, sont celles comprises entre l'axe de l'abscise et les courbes « A » et « B ».

Pour un profil quelconque d'aile, la position des deux longerons est déterminée par les paramètres de position « a » et « b », qui donnent, à l'aide de la relation (6), la valeur du rapport « γ » entre la charge du longeron antérieur, dans le I-er cas de calcul el la charge du longeron postérieur dans le II-ème cas de calcul.

Les conditions exprimées par les relations (15), (16), (17), (18), (19) et (20), nous fournissent les résultats suivants:

1. Si le paramètre « a » et le rapport « γ » (ou « b » et « γ ») placent la section d'aile qu'ils la caractérisent, entre l'axe de l'abscise et la

courbe a_3'' sur le graphique fig. 2, (ou entre les courbes B et b_3'' sur le graphique fig. 3), le I-er cas de calcul donne la charge maximum sur

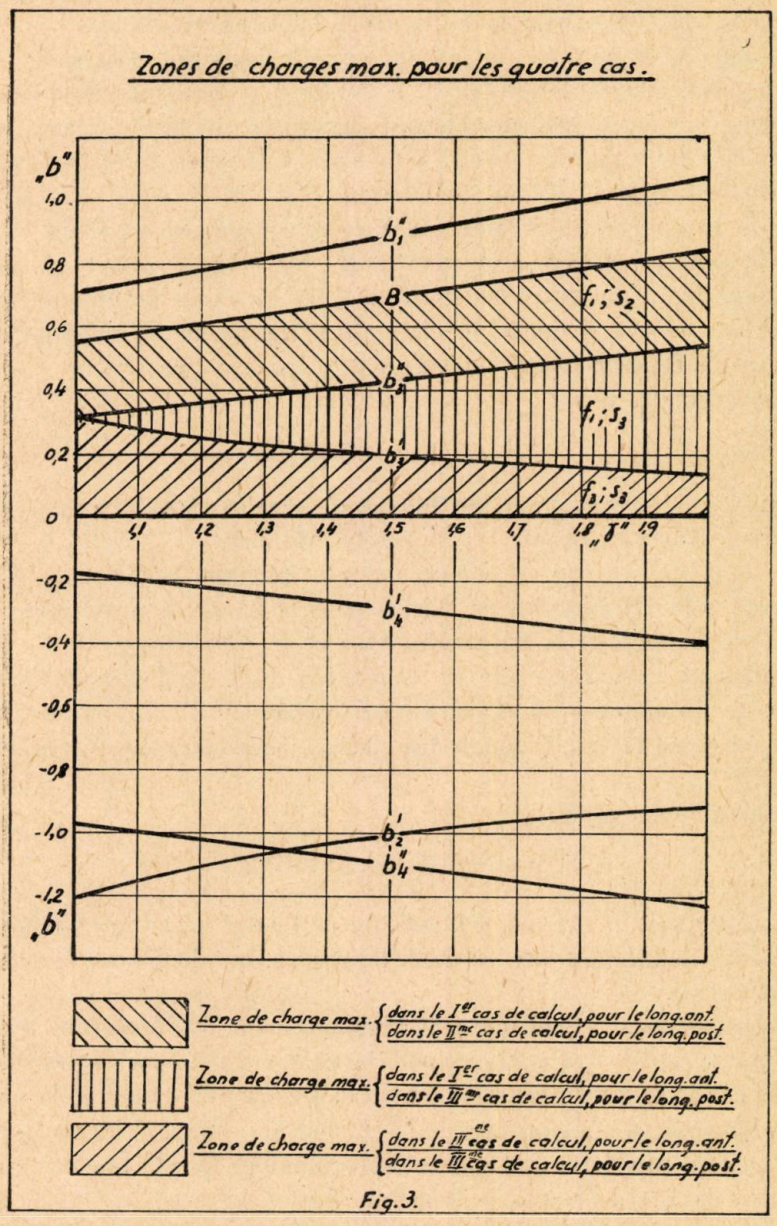


Fig. 3.

le longeron antérieur et le II-ème cas de calcul donne la charge maximum sur le longeron postérieur.

Par exemple, pour:

$$a = 0{,}1 \text{ et } b = 0{,}4$$

la relation (6) nous fournit: $\gamma = 1{,}06$ et, pour ces valeurs de «a» et «γ» (ou «b» et «γ»), les charges maximum sur les longerons, ont lieu:

— dans le I-er cas de calcul, pour le longeron antérieur;

— dans le II-ème cas de calcul, pour le longeron postérieur.

Du reste, du graphique fig. 2, il résulte que ces deux cas de calcul, sont ceux qui fournissent des charges maximum sur les longerons, indifféremment des valeurs de «b» et de «γ», à la seule condition, que la rélation $a \leqslant a_3' = 0{,}14$, soit satisfaite.

2. Si le paramètre de position «a» et le rapport «γ» (ou «b» et «γ») placent la section respective entre les courbes a_3'' et a_3', sur le graphique fig. 2 (ou entre les courbes b_3'' et b_3' sur le graphique fig. 3), le I-er cas de calcul donne la charge maximum sur le longeron antérieur, et le III-ème cas de calcul, sur le longeron postérieur.

Par exemple, pour:

$$a = 0{,}2 \quad \text{et} \quad b = 0{,}4$$

il résulte $\gamma = 1{,}98$ et, pour ces valeurs de «a» et «γ» (ou «b» et «γ»), les charges maximum sur les longerons ont lieu:

— dans le I-er cas de calcul, pour le longeron antérieur;

— dans le III-ème cas de calcul, pour le longeron postérieur.

3. Finalement, si le paramètre «a» et le rapport «γ» (ou «b» et «γ») placent la section entre les courbes a_3' et A sur le graphique fig 2 (ou entre les courbes b_3' et l'axe de l'abscise, sur le graphique fig. 3), le III-ème cas de calcul donne des charges maximum sur les deux longerons.

Par exemple, pour:

$$a = 0{,}155 \quad \text{et} \quad b = 0{,}3$$

il résulte: $\gamma = 1{,}01$ et, pour ces valeurs de «a» et «γ» (ou «b» et «γ»), les charges maximum sur les deux longerons, ont lieu pour le III-ème cas de calcul.

Par conséquant, quel que soit l'emplacement des longerons dans la profondeur de l'aile et quel que soit la valeur du rapport «γ» entre la charge sur le longeron antérieur dans le I-er cas de calcul et la charge sur le longeron postérieur dans le II-ème cas de calcul, le longeron antérieur ne peut supporter une charge maximum que dans le I-er ou III-ème cas de calcul, tandis que le longeron postérieur supporte une charge maximum seulement dans le II-ème ou III-ème cas de calcul.

La charge maximum du longeron antérieur, dans le II-ème et le IV-ème cas de calcul, ne peut pas avoir lieu, que pour des valeurs négatives (donc iréelles) de la distance entre les longerons (b_2' et b_4') et pour

des valeurs exagérément grandes de la distance du bord d'attaque jusqu'au longeron antérieur (a_2' et a_4').

La charge maximum du longeron postérieur, dans le I-er cas de calcul, ne peut pas avoir lieu, que dans l'hypotèse du longeron antérieur placé en face du bord d'attaque (a_1'') et pour une distance exagérément grande entre les longerons (b_1'').

De même, ce longeron ne peut pas subir une charge maximum dans le IV-ème cas de calcul, car dans ce cas, il résulterait une distance négative entre les longerons (b_4'') ou une valeur exagérée pour a (a_4'').

La variation des charges sur les longerons en fonction des paramètres de position des longerons et la détermination du rapport entre les moments résistants des deux longerons

Le rapport « ω » entre les moments résistants W_f et W_s des deux longerons, est égal au rapport des charges maximum sur ces deux éléments.

Il résulte, par suite:

1. Dans la zone des charges maximum f_1 et s_2:

$$\frac{f_1}{s_2} = \omega = \gamma. \tag{23}$$

2. Dans la zone des charges maximum f_1 et s_3:

$$\frac{f_1}{s_3} = \omega = \frac{\gamma \cdot p_2 \cdot (e_2 - a)}{p_3} = \frac{\gamma \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot (e_2 - e_1 + b)}{p_3 \cdot (p_1 + \gamma \cdot p_2)} \tag{24}$$

où:

$$\gamma = \frac{p_3 \cdot \omega}{p_2 \cdot (e_2 - a)} = \frac{p_1 \cdot p_3 \cdot \omega}{p_1 \cdot p_2 \cdot (e_2 - e_1 + b) - p_2 \cdot p_3 \cdot \omega.} \tag{25}$$

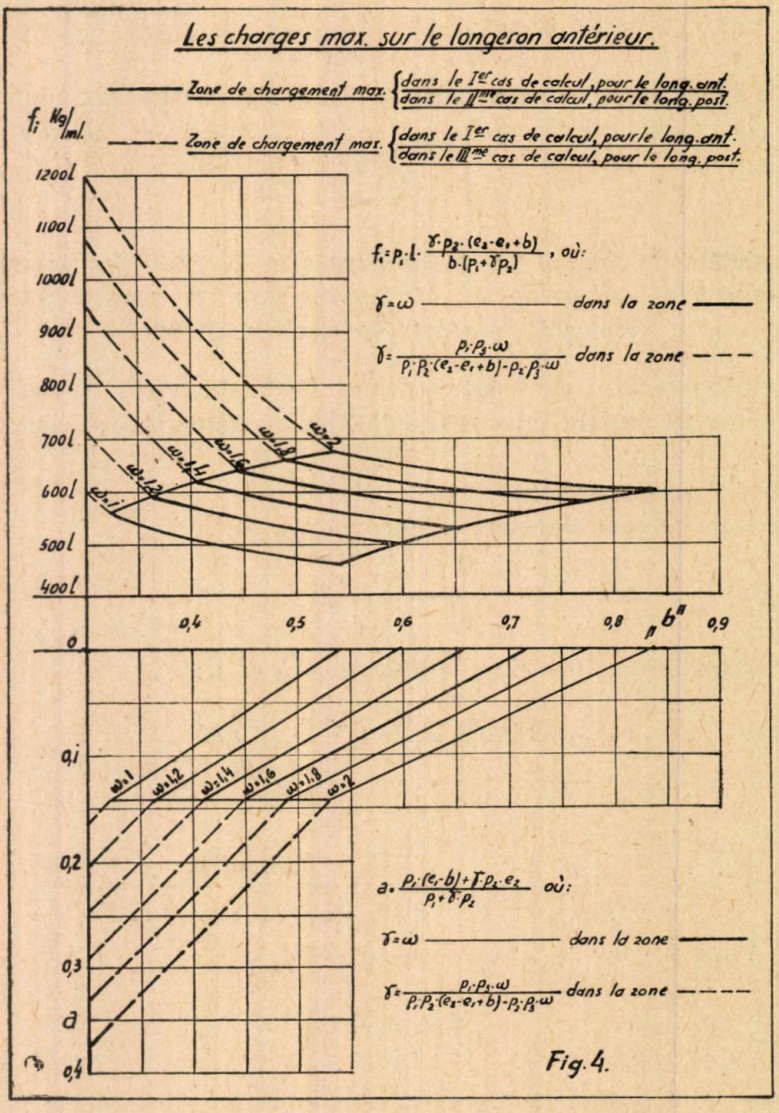
3. Dans la zone des charges maximum f_3 et s_3:

$$\frac{f_3}{s_3} = \omega = 1. \tag{26}$$

Avec les données numériques de l'exemple précédent, pour p_1; p_2; p_3; p_4; e_1; e_2 et e_4, nous avons tracé, dans le graphique fig. 4, la variation de la charge maximum sur le longeron antérieur (f_1), en fonction de la distance « b » entre les longerons et pour différentes valeurs du rapport « ω », entre les moments résistants du longeron antérieur et postérieur.

Pour tracer ces graphiques, nous avons utilisé la relation (7), dans laquelle nous avons remplacé « γ », par:

$$\gamma = \omega \tag{23}$$



dans la zone des charges maximum f_1 et s_2, et par

$$\gamma = \frac{p_1 \cdot p_3 \cdot \omega}{p_1 \cdot p_2 \cdot (e_2 - e_1 + b) - p_2 \cdot p_3 \cdot \omega} \tag{25}$$

dans la zone des charges maximum f_1 et s_3.

De même, nous avons tracé dans le graphique fig. 5, à l'aide des relations (12) et (13), la variation des charges maximum s_2 et s_3, sur le longeron postérieur, en fonction de « b » et pour différentes valeurs du rapport « ω », en remplaçant « γ », dans les rélations mentionnées, avec les valeurs ci-dessus.

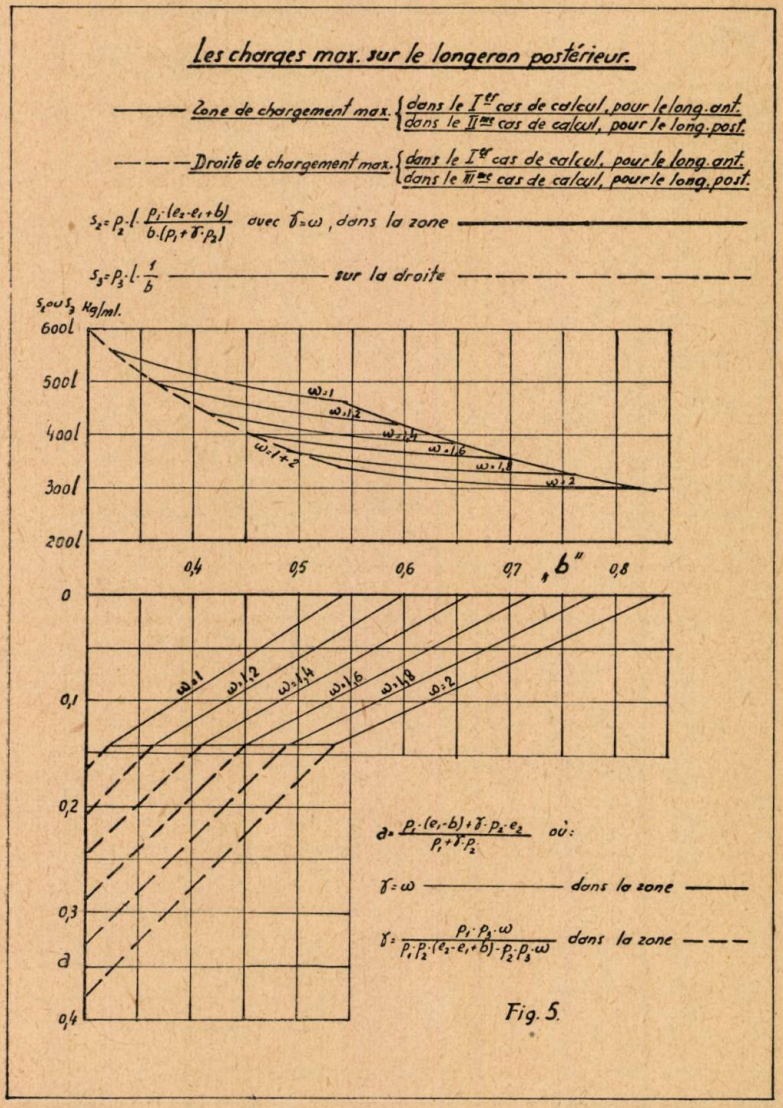


Fig. 5.

Enfin, dans le graphique fig. 6, nous avons tracé la variation de la somme des charges maximum sur les deux longerons et à savoir:

$f_1 + s_2$, dans la zone des charges maximum f_1 et s_2

et $f_1 + s_3$, dans la zone des charges maximum f_1 et s_3.

Dans les graphiques fig. 4, 5 et 6, nous n'avons pas tracé la zone des charges maximum f_3 et s_3, parce que ces charges ont lieu pour des valeurs trop grandes de la distance du bord d'attaque jusqu'au longeron antérieur et pour des distances trop réduites entre les longerons.

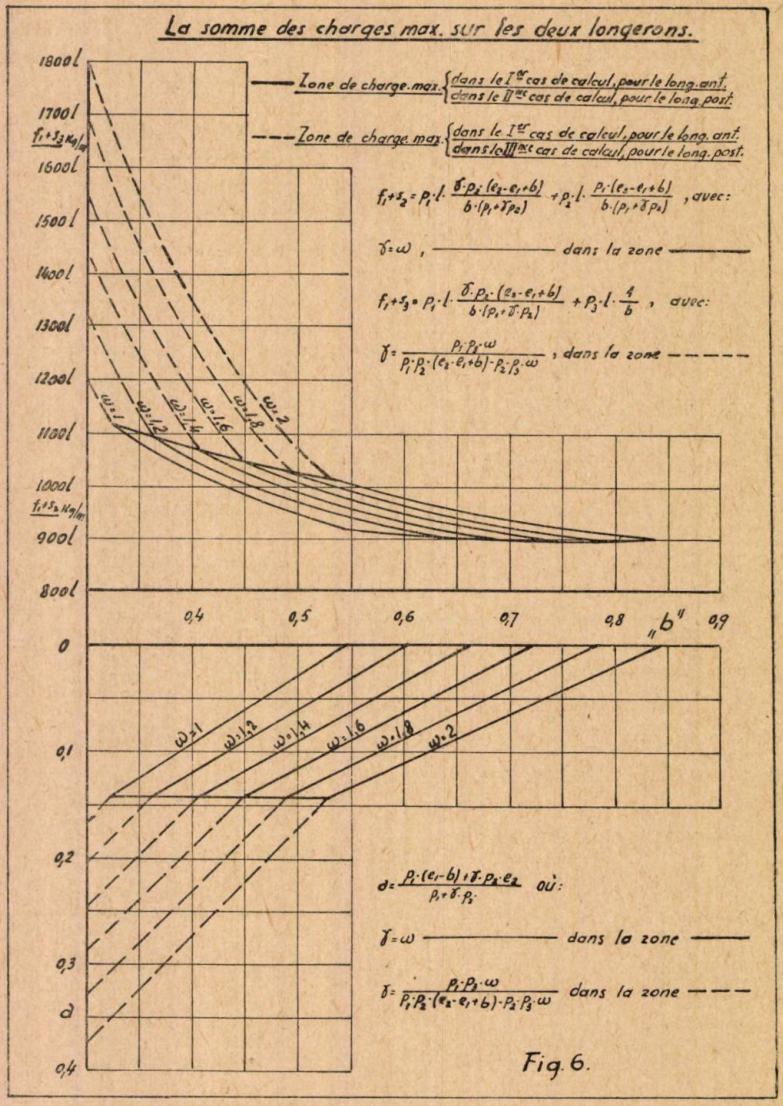


Fig. 6.

Nous nous sommes donc limité, pour tracer ces graphiques, aux valeurs du paramètre « b », supérieures au pourcent de 30%, considéré, dans les constructions courantes, comme un minimum.

De même, dans les graphiques fig. 4, 5 et 6, nous avons tracé la variation du paramètre « a », en fonction de « b », pour différentes valeurs

du rapport « ω ». Pour celà, nous nous sommes servis de la relation (4), dans laquelle « γ » a été remplacé, avec les valeurs correspondantes en fonction de « ω », dans les deux zones des charges maximum $f_1 + s_2$ et $f_1 + s_3$.

Pour expliquer le mode d'emploi de ces graphiques, nous allons reprendre les exemples précédents et nous admettrons: $a = 0{,}1$ et $b = 0{,}4$.

Sur les courbes de la moitié inférieure des graphiques fig. 4, 5 et 6, on lit $\omega = 1{,}06$ et, sur chacune des trois graphiques:

$f_1 = 530.l$ Kg/m. (du graphique fig. 4)

$s_2 = 500.l$ Kg/m. (» » » 5)

et $f_1 + s_2 = 1030.l$ Kg/m. » » » 6).

Si nous admettons maintenant:

$$a = 0{,}2 \text{ et } b = 0{,}4$$

Il résulte:

$\omega = 1{,}65$ (des graphiques fig. 4, 5 ou 6)

$f_1 = 730.l$ Kg/m. (du graphique fig. 4)

$s_3 = 450.l$ Kg/m. » » » 5)

et $f_1 + s_3 = 1180.l$ Kg/m » » » 6).

Conclusions. En examinant les graphiques fig. 4, 5 et 6, on tire les constatations suivantes:

1. Pour une certaine valeur du rapport « ω », entre les moments résistants des deux longerons, les charges maximum sur les longerons ont des valeurs minimes pour $a = 0$ et $b = B$, c'est-à-dire quand le longeron antérieur est placé au bord d'attaque du profil, et la distance entre les longerons est celle donnée par la relation (21).

Ces charges minimes ont les valeurs suivantes:

a) pour le longeron antérieur:

$$(27) \quad (f_1)\begin{matrix} b = B \\ a = 0 \end{matrix} = \frac{p_1 . p_2 . e_2 . \omega}{p_1 . e_1 + p_2 . e_2 . \omega} . l = \frac{p_1 . p_2 . \omega . (e_2 - e_1 + B)}{B . (p_1 + \omega . p_2)} . l$$

b) pour le longeron postérieur:

$$(28) \quad (s_2)\begin{matrix} b = B \\ a = 0 \end{matrix} = \frac{p_1 . p_2 . e_2}{p_1 . e_1 + p_2 . e_2 . \omega} . l = \frac{p_1 . p_2 . (e_2 - e_1 + B)}{B . (p_1 + \omega . p_2)} . l$$

c) pour la somme des charges sur le longeron antérieur et postérieur:

$$(29) \quad (f_1 + s_2)\begin{matrix} b = B \\ a = 0 \end{matrix} = \frac{p_1 . p_2 . e_2 . (1 + \omega)}{p_1 . e_1 + p_2 . e_2 . \omega} . l = \frac{p_1 . p_2 . (e_2 - e_1 + B)(1 + \omega)}{B . (p_1 + \omega p_2)} . l .$$

Nous allons nommer « charge idéale », cette valeur minimum de la somme des charges maximum sur les deux longerons, pour un « ω » donné.

2. Pour « *a* » constant, la charge maximum sur le longeron postérieur, ainsi que la somme des charges sur les deux longerons, diminue quand « *b* » croît, cette croissance de « *b* » entraîne aussi une augmentation du rapport « ω » entre les moments résistants des deux longerons.

Par contre, la charge maximum sur le longeron antérieur croît avec l'éloignement du longeron postérieur du bord d'attaque (par l'augmentation du paramètre « *b* »).

3. Pour « *b* » constant, la charge maximum sur le longeron antérieur, ainsi que la somme des charges sur les deux longerons, diminue si le longeron antérieur se rapproche du bord d'attaque (le paramètre « *a* » diminue). Cette réduction du paramètre « *a* », entraîne aussi une réduction du rapport « ω ».

En conservant « *b* » constant et en imposant une variation au paramètre « *a* », la charge maximum sur le longeron postérieur, au contraire, diminue quand le longeron antérieur s'éloigne du bord d'attaque (le paramètre « *a* » croît). Cette croissance du paramètre « *a* » entraîne aussi l'augmentation du rapport « ω » entre les moments résistants des deux longerons.

4. Pour « ω » constant, les charges maximum sur les deux longerons (et par suite la somme de ces charges) diminuent si le longeron antérieur se rapproche du bord d'attaque (« *a* » diminue), tandis que les longerons s'écartent entre eux (« *b* » augmente).

5. Le poids des longerons croît avec leur moments résistants et donc avec leur charges maximum.

Pour un certain rapport entre les moments résistants des deux longerons, ces longerons auront le poids minimum quand les charges maximum, qu'ils ont à supporter, auront les valeurs les plus réduites qu'on peut obtenir et qui sont atteintes si le longeron antérieur est situé au bord d'attaque du profil et la distance entre les longerons est égale à « *B* ».

Mais, cette charge minime, que nous avons nommé « charge idéale » varie aussi avec « ω » et à savoir:

a) La charge sur le longeron antérieur, ainsi que la somme des charges sur les deux longerons, diminue quand « ω » croît;

b) Au contraire, la « charge idéale » sur le longeron postérieur diminue quand « ω » décroît.

Il résulte donc que le poids total minimum des longerons peut être obtenu par l'emplacement du longeron antérieur dans le bord d'attaque

du profil et en fixant une grande distance entre les longerons (car cette distance croît avec « ω »).

Mais, au point de vue constructif, l'emplacement du longeron antérieur dans le bord d'attaque du profil, ne peut pas être réalisé.

De même, on ne peut pas prendre une distance exagérée entre les longerons, car cette disposition amène la croissance du rapport « ω » et donc, des dimensions exagérées pour le longeron antérieur, qui ne peuvent pas être obtenues, ce longeron étant placé dans le bord d'attaque du profil, où ses dimensions ne peuvent être que minimes.

Des motifs d'ordre constructif nous obligent donc d'éloigner le longeron antérieur du bord d'attaque du profil et de réduire la distance entre les longerons.

En prennant cette mesure, nous tiendrons toutefois compte des deux constatations suivantes, qui résultent de la lecture des graphiques fig. 4, 5 et 6:

a) L'éloignement du longeron antérieur du bord d'attaque du profil réduit la charge sur le longeron postérieur, mais en échange, agrandit sensiblement la charge sur le longeron antérieur, ainsi que la somme des charges sur les deux longerons.

Le poids total des deux longerons sera ainsi sensiblement agrandi, et le rapport « ω » entre les moments résistants des deux longerons augmente aussi. Cette solution nous conduit donc à la réalisation de longerons de dimensions inégales.

En effet, soit un profil d'aile, dont les longerons ont les moments résistants égaux entre eux ($\omega = 1$), le longeron antérieur étant placé dans le bord d'attaque du profil ($a = 0$), tandis que la distance entre les longerons est égale à 0,545 ($b = B$).

Pour cette disposition, les charges sur les longerons sont:

$f_1 = 460.l$ Kg/m, pour le longeron antérieur (graphique fig. 4)

$s_2 = 460.l$ Kg/m, pour le longeron postérieur (graphique fig. 5)

$f_1 + s_2 = 920.l$ Kg/m, pour les deux longerons (graphique fig. 6).

Supposons maintenant, que le longeron postérieur reste à 54,5% de la profondeur du profil, tandis que le longeron antérieur s'éloigne du bord d'attaque avec une distance égale à 10% de la corde.

Pour cette disposition des longerons ($a = 0{,}1$ et $b = 0{,}545 - 0{,}1 = 0{,}445$), il résulte les charges suivantes:

$f_1 = 565.l$ Kg/m, sur le longeron antérieur (graphique fig. 4)

$s_2 = 450.l$ Kg/m, sur le longeron postérieur (graphique fig. 5)

$f_1 + s_2 = 1015.l$ Kg/m, sur les deux longerons (graphique fig. 6), donc une croissance de 11% de la charge totale, tandis que le rapport « ω » croît de 1 à 1,26.

Enfin, en éloignant plus encore le longeron antérieur du bord d'attaque et en considérant: $a = 0{,}2$ et $b = 0{,}545 - 0{,}2 = 0{,}345$, on obtient les charges suivantes:

$f_1 = 725.l$ Kg/m, sur le longeron antérieur (graphique fig. 4)

$s_2 = 435.l$ Kg/m, sur le longeron postérieur (graphique fig. 5)

$f_1 + s_2 = 1160.l$ Kg/m, sur les deux longerons (graphique fig. 6), donc une croissance de 26% de la charge totale, tandis que le rapport « ω » croît de 1 à 1,67;

b) La réduction de la distance entre les longerons, par le rapprochement du longeron postérieur vers le bord d'attaque, la charge sur les longerons grandit, mais pas tellement.

En plus, cette disposition présente l'avantage de réduire la valeur du rapport « ω », en conduisant donc à la réalisation de longerons avec des moments résistants de valeurs rapprochées.

Supposons, en effet, deux profils d'aile, avec le longeron antérieur placé dans le bord d'attaque ($a = o$) et le longeron postérieur placé, pour le premier profil, à 84% de la corde ($b = 0{,}84$), tandis que, pour le deuxième profil, à 54,5% de la corde ($b = 0{,}545$).

Dans le premier cas, pour $a = o$ et $b = 0{,}84$, il résulte les charges suivantes sur les longerons:

$f_1 = 600.l$ Kg/m, sur le longeron antérieur (graphique fig. 4)

$s_2 = 300.l$ Kg/m, sur le longeron postérieur (graphique fig. 5)

$f_1 + s_2 = 900.l$ Kg/m, sur les deux longerons (graphique fig. 6), le rapport entre les moments résistants des deux longerons étant égal à 2.

Dans le deuxième cas, pour $a = o$ et $b = 0{,}545$, on obtient les charges suivantes:

$f_1 = 460.l$ Kg/m, pour le longeron antérieur (graphique fig. 4)

$s_2 = 460.l$ Kg/m, pour le longeron postérieur (graphique fig. 5)

$f_1 + s_2 = 920.l$ Kg/m, pour les deux longerons (graphique fig. 6), donc une croissance de la charge totale de seulement 2%, pour une réduction de 29,5% de la distance entre les longerons, par le déplacement du longeron postérieur vers le bord d'attaque du profil.

Mais, en même temps, le rapport « ω » a baissé de 2 à 1, en obtenant ainsi l'égalité des moments résistants entre les deux longerons.

En conclusion, nous pouvons dire, qu'étant obligés par des nécessités d'ordre constructif, de placer les longerons d'aile dans d'autres positions que celles qui donnent les charges les plus réduites et donc le poids minimum ($a = 0$; $b = B$), nous éloignerons le longeron antérieur, si peu que possible, du bord d'attaque du profil, pour que la charge totale sur l'aile ne croisse pas trop et pour que le rapport entre les moments résistants des longerons ne devienne pas exagéré; nous

procéderons à la fixation de la position du deuxième longeron, en connaissant que sa position dans la profondeur de l'aile n'a pas une influence sensible sur la charge totale, mais le rapprochement de ce longeron vers le bord d'attaque du profil réduit la valeur exagérée du rapport « ω » et

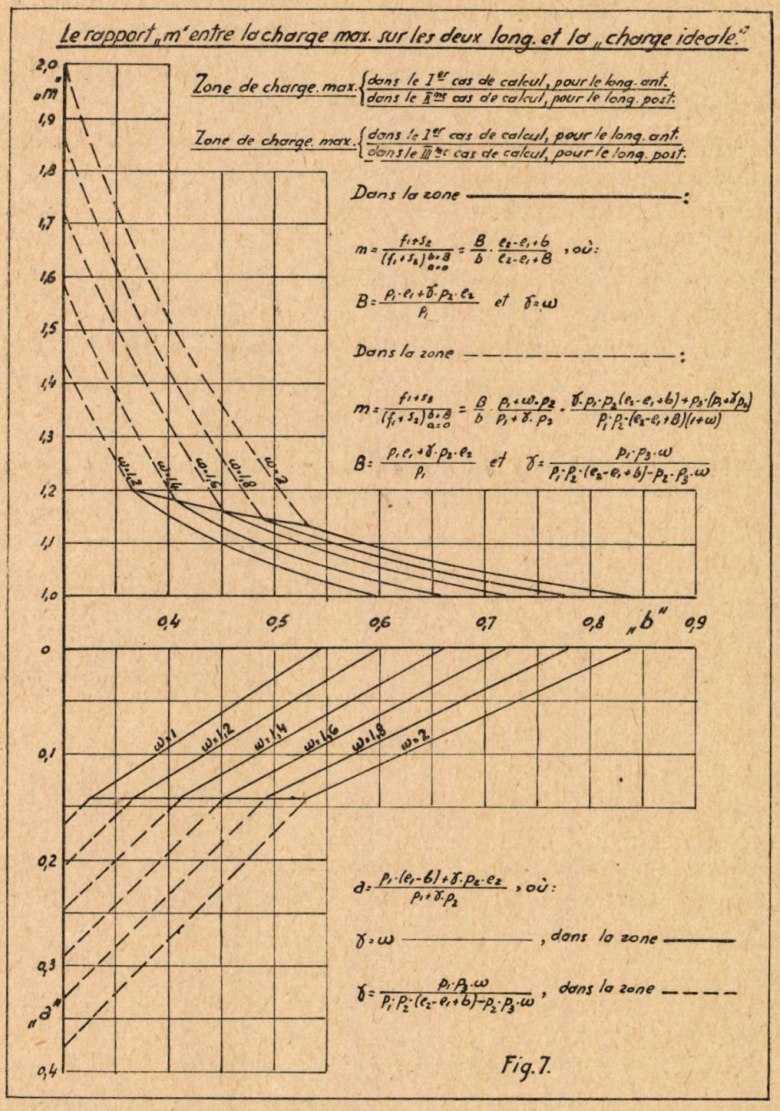


Fig. 7.

uniformise les charges sur les longerons, devenues disproportionnées, par l'écartement du longeron antérieur du bord d'attaque du profil.

Pour confirmer les affirmations ci-dessus, nous reprendrons l'exemple considéré antérieurement.

Pour $a = o$ et $b = 0{,}545$, on a obtenu $\omega = 1$ et $f_1 = 460.l$ Kg/m; $s_2 = 460.l$ Kg/m et $f_1 + s_2 = 920.l$ Kg/m.

Par l'écartement du longeron antérieur du bord d'attaque avec 10% de la corde et en conservant la position du longeron postérieur à 54,5% de la profondeur de l'aile, c'est-à-dire pour $a = 0{,}1$ et $b = 0{,}445$, il a résulté: $\omega = 1{,}26$ et

$f_1 = 565.l$ Kg/m; $s_2 = 450.l$ Kg/m et $f_1 + s_2 = 1015.l$ Kg/m., avec une croissance de 11% de la charge totale.

En conservant le longeron antérieur à $0{,}1.l$, pour égaliser les charges sur les deux longerons ($\omega = 1$), on devra — conformément aux données des courbes de la partie inférieure des fig. 4, 5 et 6 — réduire la distance entre les longerons, de $0{,}445.l$ à $0{,}39.l$.

Les charges sur les longerons deviennent:

$f_1 = 520.l$ Kg/m ; $s_2 = 520.l$ Kg/m et $f_1 + s_2 = 1040.l$ Kg/m et par suite, la charge totale n'a pas augmenté que de 11 à 13% de la « charge idéale », mais en échange, les moments résistants des deux longerons sont devenues égaux.

L'influence des paramètres « a « et « b » sur la valeur de la charge totale des deux longerons

Pour établir dans quelle mesure les deux paramètres « a » et « b », qui définissent la position des longerons dans la profondeur du profil, modifient la charge totale sur les deux longerons, nous tracerons, dans le graphique fig. 7, en fonction de « b » et pour différentes valeurs du rapport « ω », la variation du rapport entre cette charge et la « charge idéale ».

La famille de courbes qui constitue le graphique de la fig. 7, a été tracée à l'aide des rélations suivantes:

a) Pour la zone des charges maximum f_1 et s_2:

$$(30)\qquad m = \frac{f_1 + s_2}{(f_1 + s_2)\substack{b=B\\a=0}} = \frac{e_2 - a}{e_2} \cdot \frac{p_1 . e_1 + \gamma . p_2 . e_2}{p_1 . (e_1 - a) + \gamma . p_2 . (e_2 - a)}$$

$$= \frac{B}{b} \cdot \frac{e_2 - e_1 + b}{e_2 - e_1 + B}$$

dans laquelle: $\gamma = \omega$ (23);

b) Pour la zone des charges maximum f_1 et s_3:

$$(31)\quad m = \frac{f_1 + s_3}{(f_1 + s_2)\substack{b=B\\a=0}} = \frac{p_1 . e_1 + \omega . p_2 . e_2}{p_1 . p_2 . e_2 . (1 + \omega)} \cdot \frac{p_1 . p_3 + \gamma . p_1 . p_2 . (e_2 - a)}{p_1 . (e_1 - a) + \gamma . p_2 . (e_2 - a)}$$

$$= \frac{B}{b} \cdot \frac{p_1 + \omega . p_2}{p_1 + \gamma . p_2} \cdot \frac{\gamma . p_1 . p_2 . (e_2 - e_1 + b) + p_3 . (p_1 + \gamma . p_2)}{p_1 p_2 (e_2 - e_1 + B)(1 + \omega)}$$

dans laquelle:

$$\gamma = \frac{p_3 \cdot \omega}{p_2 \cdot (e_2 - a)} = \frac{p_1 \cdot p_3 \cdot \omega}{p_1 \cdot p_2 \cdot (e_2 - e_1 + b) - p_2 \cdot p_3 \cdot \omega}. \qquad (25)$$

Nous montrerons l'utilité du graphique 7, par l'exemple suivant:

Admettons pour les paramètres de position « a » et « b », les valeurs suivantes qui se rapprochent de la pratique courante:

$$a = 0{,}12 \quad \text{et} \quad b = 0{,}45.$$

Pour ces valeurs, le rapport entre les moments résistants des deux longerons et donc le rapport entre le chargement maximum du longeron antérieur et celui du longeron postérieur, est égal à:

$$\omega = 1{,}43 \text{ (graphiques fig. 4, 5, 6 ou 7)}$$

et la charge totale maximum sur les deux longerons:

$$f_1 + s_2 = 1030.l \text{ Kg/m (graphique fig. 6)}$$

tandis que la charge minime qu'on pourrait réaliser pour $\omega = 1{,}43$, avec $a = o$ et $b = B = 0{,}67$, est égale à:

$$(f_1 + s_2) \begin{matrix} b = 0{,}67 \\ a = 0 \end{matrix} = 902.l \text{ Kg/m (graphique fig. 6).}$$

Du graphique fig. 7, on déduit que pour $a = 0{,}12$; $b = 0{,}45$ et $\omega = 1{,}43$, le rapport « m » entre la charge maximum sur les deux longerons ($f_1 + s_2 = 1030.l$ Kg/m) et la charge totale « idéale », correspondante au rapport $\omega = 1{,}43$, $(f_1 + s_2) \begin{matrix} b = 0{,}67 \\ a = 0 \end{matrix} = 902.l$ Kg/m, est égal à

$$m = 1{,}14$$

donc la charge totale est avec 14% supérieure à la « charge idéale ».

Supposons maintenant le longeron postérieur maintenu dans sa position initiale (57% de la profondeur) et que nous déplacions le longeron antérieur avec 5% de part et d'autre de sa position moyenne (12% de la profondeur).

Soit:

$$a = 0{,}07$$
$$b = 0{,}57 - 0{,}07 = 0{,}50.$$

Il résulte:

$\omega = 1{,}27$ (graphiques fig. 4, 5, 6 et 7)

$f_1 + s_2 = 975.l$ Kg/m (graphique fig. 6)

$(f_1 + s_2) \begin{matrix} b = B = 0{,}622 \\ a = o \end{matrix} = 910.l$ Kg/m (graphique fig. 6)

et $m = 1{,}07$ (graphique fig. 7), donc, par le rapprochement du longeron antérieur vers le bord d'attaque avec $0{,}05.l$, la charge totale a été diminuée avec $14 - 7 = 7\%$ de la charge idéale, tandis que « ω » a baissé de 1,43 à 1,27.

Soit maintenant:

$$a = 0{,}17$$

$$b = 0{,}57 - 0{,}17 = 0{,}40.$$

Il résulte:

$$\omega = 1{,}51 \text{ (graphique fig. 4, 5, 6 et 7)}$$

$$f_1 + s_3 = 1130.l \text{ Kg/m (graphique fig. 6)}$$

$$(f_1 + s_2)\begin{matrix} b = B \\ a = o \end{matrix} = 0{,}69 = 905.l \text{ Kg/m (graphique fig. 6)}$$

et $m = 1{,}25$ (graphique fig. 7), donc, par l'éloignement du longeron antérieur de sa position médiane, avec 5% de la profondeur vers le bord de fuite du profil, la charge totale a augmenté avec $25 - 14 = 11\%$ de la charge idéale, tandis que « ω » a augmenté aussi de 1,43 à 1,51.

Supposons maintenant que nous maintenons le longeron antérieur dans sa position médiane (12% de la profondeur) et que nous déplacions le longeron postérieur avec 5% de part et d'autre de sa position médiane (57% de la profondeur).

Soit:

$$a = 0{,}12$$

$$b = 0{,}52 - 0{,}12 = 0{,}40.$$

Il résulte:

$$\omega = 1{,}21 \text{ (graphiques fig. 4, 5, 6 ou 7)}$$

$$f_1 + s_2 = 1050.l \text{ Kg/m (graphique fig. 6)}$$

$$(f_1 + s_2)\begin{matrix} b = B \\ a = o \end{matrix} = 0{,}605 = 912.l \text{ Kg/m (graphique fig. 6)}$$

et $m = 1{,}15$ (graphique fig. 7), donc, par le rapprochement du longeron postérieur vers le bord d'attaque avec 5% de la profondeur, la charge totale n'a pas augmenté qu'avec $15 - 14 = 1\%$ de la charge idéale, « ω » étant réduit, en échange, de 1,43 à 1,21.

Soit maintenant:

$$a = 0{,}12$$

$$b = 0{,}62 - 0{,}12 = 0{,}50.$$

Il résulte:

$\omega = 1{,}65$ (graphiques fig. 4, 5, 6 ou 7)

$f_1 + s_2 = 1010.l$ Kg/m (graphique fig. 6)

$(f_1 + s_2)\begin{matrix} b = B \\ a = o \end{matrix} = 0{,}735 = 900.l$ Kg/m (graphique fig. 6)

et $m = 1{,}12$ (graphique fig. 7); donc, par l'éloignement du longeron postérieur du bord d'attaque, avec 5% de la corde, la charge totale n'a pas diminué qu'avec $14 - 12 = 2\%$ de la charge idéale, « ω » croissant, en échange, de 1,43 à 1,65.

Une disposition anormale des longerons dans la profondeur de l'aide, comme il serait, par exemple:
$a = 0{,}375$ (le longeron antérieur trop éloigné du bord d'attaque)
$b = 0{,}3$ (distance exagérée réduite entre les longerons) conduirait aux résultats suivants:

$\omega = 2$ (graphiques fig. 4, 5, 6 ou 7)

$f_1 + s_3 = 1800.l$ Kg/m (graphique fig. 6)

$(f_1 + s_2)\begin{matrix} b = B \\ a = o \end{matrix} = 0{,}84 = 900.l$ Kg/m (graphique fig. 6)

et $m = 2$ (graphique fig. 7).

Cette disposition anormale des longerons, par rapport à la position médiane ($a = 0{,}12$ et $b = 0{,}45$), obtenue en déplaçant le longeron antérieur vers le bord de fuite avec $37{,}5 - 12 = 25{,}5\%$ de la corde, la charge maximum de calcul sur les deux longerons a augmenté avec $100 - 14 = 86\%$ de la charge idéale, et le rapport « ω » a augmenté aussi de 1,43 à 2, bien que le longeron postérieur a été déplacé vers le bord de fuite avec $30 + 37{,}5 - 57 = 10{,}5\%$ de la profondeur.

Les données ci-dessus nous montrent de nouveau l'importance présentée par la disposition du longeron antérieur le plus près possible du bord d'attaque du profil et la latitude que nous avons dans l'emplacement du longeron postérieur, pour nous permettre de réaliser un certain rapport, entre les moments résistants des deux longerons, rapport que, pour des raisons de construction, doit être rapproché de l'unité.

629.13 AÉRODYNAMIQUE

SUR LA STABILITÉ STATIQUE LONGITUDINALE DES BIPLANS

par **N. Tipei**

On établit une formule pour le coefficient du moment par rapport au centre de gravité d'un biplan, ainsi que pour le coefficient de stabilité longitudinale, en tenant compte des nouvelles théories des biplans. On définit, en même temps, le foyer virtuel de l'ensemble, les conditions nécessaires pour que ce foyer existe et on démontre que les coefficients de portance ont la forme, tout au moins pour les incidences usuelles, des polinomes du quatrième degré, par rapport à l'incidence de l'aile supérieure.

Un avion est statiquement stable lorsque, étant en équilibre à un régime quelconque, tend à retrouver cette position d'équilibre s'il vient d'en être dévié par une cause perturbatrice quelconque. Cette définition générale s'applique à n'importe quel avion, donc aux biplans aussi et la mise en équation du problème, quoique générale par la méthode, diffère en particulier pour chaque cas, selon la nature des forces qui interviennent.

Ces forces peuvent être divisées en quatre grandes catégories: 1) forces aérodynamiques, 2) poids de l'avion, 3) forces de traction des organes propulseurs et 4) forces d'inertie et centrifugales.

Par rapport au centre de gravité elles doivent être en équilibre, leur réduction en ce point comprenant une résultante de grandeur nulle et un moment nul. Dans ce cas se trouvent réalisées les conditions générales du vol en régime permanent; on peut encore ajouter que dans un pareil régime les forces d'inertie sont nulles et les forces centrifugales généralement négligeables.

L'étude de la stabilité statique peut être ainsi divisée en trois chapitres principaux:

1. Pour un avion donné, trouver de quelle manière doivent être repartisés les poids afin de pouvoir satisfaire aux conditions d'équilibre aux différents cas de vol, par un judicieux placement du centre de gravité.

2. La position du centre de gravité étant connue, quelles seront les réactions de l'avion s'il vient d'être dévié de sa ligne de vol.

3. Les gouvernes étant déterminées, quelle sera la gamme des régimes de vol possibles et quels seront les efforts nécéssaires sur la manche du pilote pour les vols entre les régimes extrêmes.

Il faut dire tout d'abord que, supposant les gouvernes bien dimensionnées, les conditions (2) et (3) imposent une certaine distance, mesurée parallèlement à l'axe longitudinal de l'avion, entre le centre de gravité et le foyer de l'aile. Cette distance comporte un caractère pratique expérimental; ainsi, pour un avion monoplan, elle peut être donnée en fractions de la corde moyenne. A partir du bord d'attaque, le centre de gravité se trouve ainsi compris entre 24—35% de la corde moyenne (d'après von Mises), 30—36% (Durand), 35%—40% (Hopf), 28—34% (Wood) et généralement on peut admettre une distance entre le centre de gravité et la résultante aérodynamique passant par le foyer de cca. 0,10—0,20 m.

Les conditions ci-dessus s'appliquent tout aussi bien aux biplans, avec les remarques suivantes:

a) La distance sera mesurée entre le centre de gravité et la résultante totale aérodynamique des deux ailes, passant par un foyer virtuel par rapport auquel le moment total est constant.

b) Les chiffres mentionnés ci-dessus peuvent être rapportés à une corde moyenne définie par la relation

$$l = \frac{l_1 S_1 + l_2 S_2}{S_1 + S_2}$$

l,S désignant les cordes, respectivement les surfaces et les indices 1,2 les ailes supérieure et inférieure.

c) Les coefficients de portance Cz, de résistance induite (Cx_i), ainsi que la direction générale du courant pour chaque aile se trouvent altérés par la présence de l'autre. L'incidence réelle de chaque aile est ainsi modifiée et de même les coefficients globaux Cx, Cz, correspondants de l'aile monoplane équivalente.

d) Les positions des foyers des deux ailes demeurent approximativement les mêmes; par contre, les coefficients de moment à portance nulle sont modifiés [1]) avec les quantités

$$\Delta Cm_{01} = 0{,}1 \frac{e_2}{h}$$

[1] N. A. C. A., *Report*, no. 631.

pour l'aile supérieure et

$$\Delta Cm_{02} = - \Delta Cm_{01} \frac{S'_1}{S'_2} \cdot \frac{l'_1}{l'_2}$$

pour l'aile inférieure; e_2 désigne l'épaisseur maxima de l'aile inférieure, h l'interplan, S'_1, S'_2 les surfaces respectives des deux ailes comprises entre les plans verticaux tangents aux extrémités de l'aile la plus courte, et l'_1, l'_2 les cordes moyennes des surfaces S'_1, S'_2.

Cette variation des coefficients Cm_0, constatée expérimentalement et dont l'explication théorique est plutôt difficile, est probablement liée à la résistance à l'avancement des profils, qui provoque une déflection du courant ainsi qu'un gradient de pression entre les ailes en partant des bords d'attaque vers les bords de fuite. D'autre part, l'augmentation des coefficients Cm_0 des deux ailes se trouve compensée par le couple des deux portances; lorsque la portance totale de la cellule est nulle, ainsi que par les couples dûs à la variation de la résistance induite des deux ailes. Généralement cette augmentation peut être négligée, tout en tenant compte de la correction indiquée précédemment.

Soit:

ρ = la densité de l'air, en kgs sec.^{2}/m^4.

S = la surface portante, en m^2, du biplan.

T = traction de l'hélice, en kgs.

W = vitesse de l'avion, en mètres/sec.

Fx_r = forces de résistance passive à l'avancement, en kgs.

$Cx_r = 2\,Fx_r/\rho\,SW^2$ = le coefficient de traînée correspondant à Fx_r.

r = bras de levier des forces résistantes, par rapport au centre de gravité, en m.

l_1, l_2 = cordes moyennes des ailes supérieure et inférieure, en m.

$Cx_{1\,(2)} = \dfrac{2Fx_{1\,(2)}}{\rho S_{1\,(2)} W^2}$ = coefficients de résistance de l'aile 1, respectivement (2), dûs à la force résistante Fx.

$Cz_{1\,(2)} = \dfrac{2Fz_{1\,(2)}}{\rho S_{1\,(2)} W^2}$ = coefficients de portance d'une aile (1 ou 2), dûs à la force portante Fz.

$Cm_{01\,(2)} = \dfrac{2M_{01\,(2)}}{\rho\, S_{1\,(2)}\, l_{1\,(2)}\, W^2}$ = coefficient de moment à portance nulle d'une aile (1 respectivement 2), dû au moment M_0 correspondant.

d = distance du foyer respectif de l'aile au centre de gravité, en m.

ν = l'angle compris entre l'axe de portance nulle et la droite qui réunit le centre de gravité au foyer, en radians.

s = surface de l'empennage horizontal en, m².

D = distance du centre de gravité au foyer de l'empennage horizontal, en mètres.

λ = allongement de l'aile.

t = distance de la traction au centre de gravité, en mètres.

h = distance entre le foyer de l'aile inférieure et la corde de l'aile supérieure, en m.

ψ = l'angle compris entre l'axe de portance nulle de l'aile supérieure et la droite qui réunit le centre de gravité au foyer de l'empennage, en radians.

φ = décalage entre les axes de portance nulle des deux ailes, en radians.

δ = décalage entre l'axe de portance nulle de l'empennage horizontal et l'axe de portance nulle de l'aile supérieure, en radians.

R = rayon de l'hélice, en m.

β = braquage du profondeur, en radians.

b = corde moyenne de l'empennage horizontal.

α = l'angle compris entre la direction de la vitesse à l'infini amont et l'axe de portance nulle de l'aile supérieure.

γ = l'angle de décalage des deux ailes, en radians.

L = anvergure de l'aile, en m.

$\varepsilon = \dfrac{2h}{L_1 + L_2}$ = interplan relatif.

l = corde moyenne de référence, en mètres.

Cz = coefficient global de portance du biplan.

Cx = » » » résistance » »

θ = angle de la trajéctoire avec l'horizontale.

μ = angle de la traction avec l'axe de portance nulle de l'empennage.

Δ = angle de déflection du courant, dû à l'aile.

Δ_s = » » » » » » au souffle de l'hélice.

$C'm_0$, $C'z$, $C'x$ = coefficients de moment à portance nulle, de portance et de résistance de l'empennage.

λ' = allongement de l'empennage horizontal.

c = profondeur de la partie mobile de l'empennage horizontal.

i = angle entre la corde et l'axe de portance nulle de l'aile supérieure.

D'après HOPF et FUCHS [1]), les valeurs des coefficients de portance, modifiés par rapport aux coefficients correspondants de l'aile monoplane par la déviation du courant due aux deux ailes en présence, ainsi que par la variation correspondante de la circulation, seront, les indices m désignant les valeurs des coefficients pour l'aile monoplane aux mêmes angles d'incidence:

$$(1)\quad \begin{cases} Cz_1 = Cz_{1m}\,\eta_1\left[1 + \dfrac{1}{4\pi}\cdot\dfrac{S_2}{L_1 L_2}\cdot\dfrac{h}{l_1}\cdot\zeta\cdot n_1\cdot Cz_{2m}\cdot\eta_2\right] \\ Cz_2 = Cz_{2m}\,\eta_2\left[1 - \dfrac{1}{4\pi}\cdot\dfrac{S_1}{L_1 L_2}\cdot\dfrac{h}{l_2}\cdot\zeta\cdot n_2\cdot Cz_{1m}\cdot\eta_1\right]. \end{cases}$$

ou, en mettant

$$\varepsilon' = \frac{L_1 + L_2}{2h} \quad ; \quad \varkappa_1 = Ln\frac{\sin\gamma + \sqrt{1 + \varepsilon'\cos^2\gamma}}{\sin\gamma + \sqrt{1 + \varepsilon''\cos^2\gamma}} \quad ; \quad \tau_1 = \frac{l_1}{2h}\cos\gamma$$

$$\varepsilon'' = \frac{L_1 - L_2}{2h} \quad ; \quad \varkappa_1 = Ln\frac{\sqrt{1 + \varepsilon'\cos^2\gamma} - \sin\gamma}{\sqrt{1 + \varepsilon''\cos^2\gamma} - \sin\gamma} \quad ; \quad \tau_1 = \frac{l_2}{2h}\cos\gamma$$

$$m_1 = 1 - \sqrt{\frac{\frac{1-\tau_1^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-\tau_1^2}{2}\right)^2 + \tau_1^2\cos^2\gamma}}{1 + \tau_1^2 - 2\tau_1\sin\gamma}}$$

$$m_2 = 1 - \sqrt{\frac{\frac{1-\tau_2^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-\tau_2^2}{2}\right)^2 + \tau_2^2\cos^2\gamma}}{1 + \tau_2^2 + 2\tau_2\sin\gamma}}$$

$$\chi_1 = \cos\gamma\left(\frac{1}{\sin\gamma + \sqrt{1 + \varepsilon''^2\cos^2\gamma}} - \frac{1}{\sin\gamma + \sqrt{1 + \varepsilon'^2\cos^2\gamma}}\right)$$

$$\chi_2 = \cos\gamma\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon''^2\cos^2\gamma} - \sin\gamma} - \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon'^2\cos^2\gamma} - \sin\gamma}\right)$$

---

[1]) FUCHS, HOPF u. SEEWALD, *Aerodynamik*.

on a successivement

$$n_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{2\tau_1 \cos\gamma}{1-\tau_1^2} \quad ; \quad n_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{2\tau_2 \cos\gamma}{1-\tau_2^2}$$

$$\zeta = \frac{\sqrt{1+\varepsilon' \cos\gamma} - \sqrt{1+\varepsilon'' \cos\gamma}}{\cos\gamma}$$

$$\eta_1 = 1 - \frac{l_2}{2L_1} \cdot \frac{1}{1+2\frac{l_2}{L_2}} \left[\varkappa_1 + \frac{2\zeta h}{l_1} m_1 + \chi_1 \alpha \right] \cdot \frac{\alpha+\varphi}{\alpha}$$

$$\eta_2 = 1 - \frac{l_1}{2L_2} \cdot \frac{1}{1+2\frac{l_1}{L_1}} \left[\varkappa_2 + \frac{2\zeta h}{l_2} m_2 - \chi_2 (\alpha+\varphi) \right] \frac{\alpha}{\alpha+\varphi}$$

η_1 et η_2 peuvent s'écrire:

$$\eta_1 = 1 - N_1 - \frac{M_1}{\alpha} - O_1\alpha \quad ; \quad \eta_2 = 1 - N_2 + \frac{M_2}{\varphi+\alpha} + O_2\alpha$$

où on a

$$N_1 = \frac{l_2}{2L_1} \cdot \frac{1}{1+2\frac{l_2}{L_2}} \left(\varkappa_1 + \frac{2\zeta h}{l_1} m_1 + \chi_1 \varphi \right);$$

$$N_2 = \frac{l_1}{2L_2} \cdot \frac{1}{1+2\frac{l_1}{L_1}} \left(\varkappa_2 + \frac{2\zeta h}{l_2} m_2 \right)$$

$$M_1 = \frac{l_2}{2L_1} \cdot \frac{\varphi}{1+2\frac{l_2}{L_2}} \left(\varkappa_1 + \frac{2\zeta h}{l_1} m_1 \right) \quad ; \quad M_2 = \frac{l_1}{2L_2} \cdot \frac{\varphi}{1+2\frac{l_1}{L_1}} \left(\varkappa_2 + \frac{2\zeta h}{l_2} m_2 \right)$$

$$O_1 = \frac{l_2}{2L_1} \cdot \frac{1}{1+2\frac{l_2}{L_2}} \chi_1 \quad ; \quad O_2 = \frac{l_1}{2L_2} \cdot \frac{1}{1+2\frac{l_1}{L_1}} \chi_2 .$$

Il résulte en portant ces valeurs dans la relation (1)

$$Cz_1 = Cz_{1m} \left(1 - N_1 - \frac{M_1}{\alpha} - O_1\alpha \right) \cdot \left[1 + k_1 \left(1 - N_2 - \frac{M_2}{\alpha+\varphi} + O_2\alpha \right) Cz_{2m} \right]$$

$$Cz_2 = Cz_{2m} \left(1 - N_2 - \frac{M_2}{\alpha+\varphi} + O_2\alpha \right) \cdot \left[1 - k_2 \left(1 - N_1 - \frac{M_1}{\alpha} - O_1\alpha \right) Cz_{1m} \right]$$

où

$$k_1 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{S_2}{L_1 L_2} \cdot \frac{h}{l_1} \cdot \zeta \cdot n_1 \quad ; \quad k_2 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{S_1}{L_1 L_2} \cdot \frac{h}{l_2} \cdot \zeta \cdot n_2 .$$

Pour les ailes monoplanes, on peut encore écrire

$$Cz_{1m} = \frac{5{,}53\,\pi\lambda_1}{5{,}53 + \pi\lambda_1}.\alpha = A_1\alpha$$

$$Cz_{2m} = \frac{5{,}53\,\pi\lambda_2}{5{,}53 + \pi\lambda_2}.(\alpha + \varphi) = A_2(\alpha + \varphi)$$

les coefficients A_1, A_2 pouvant être déduits aussi sur les courbes expérimentales des ailes monoplanes.

Dans ces conditions, on peut écrire les coefficients de portance des deux ailes, en fonction de l'incidence de l'aile supérieure:

$$Cz_1 = A_1\alpha\left(1 - N_1 - \frac{M_1}{\alpha} - O_1\alpha\right)$$
$$.\left[1 + \frac{1}{4\pi}.\frac{S_2}{L_1 L_2}.\frac{h}{l_1}\,\zeta n_1 A_2(\alpha + \varphi)\left(1 - N_2 - \frac{M_2}{\alpha + \varphi} + O_2\alpha\right)\right]$$

et

$$Cz_2 = A_2(\alpha + \varphi)\left(1 - N_2 + \frac{M_2}{\alpha + \varphi} + O\alpha_2\right)$$
$$.\left[1 - \frac{1}{4\pi}.\frac{S_1}{L_1 L_2}.\frac{h}{l_2}\,\zeta n_2 A_1\alpha\left(1 - N_1 - \frac{M_1}{\alpha} - O_1\alpha\right)\right]$$

ou encore

$$Cz_1 = [(1 - N_1)\,A_1\alpha - A_1M_1 - A_1O_1\alpha^2].[1 + k_1(1 - N_2)\,A_2(\alpha + \varphi)$$
$$- k_1A_2M_2 + k_1A_2O_2\alpha(\alpha + \varphi)]$$

et

$$Cz_2 = [(1 - N_2)\,A_2(\alpha + \varphi) + A_2M_2 + A_2O_2\alpha(\alpha + \varphi)]$$
$$.[1 - k_2A_1(1 - N_1)\,\alpha + k_2A_1M_1 + k_2A_1O_1\alpha^2]$$

si on met

$$J_1 = A_1M_1[k_1A_2M_2 - k_1(1 - N_2)\,A_2\varphi - 1];$$
$$J_2 = (1 + k_2A_1M_1).[A_2M_2 + (1 - N_2)\,A_2\varphi]$$

$$T_1 = (1 - N_1)\,A_1.[1 - k_1A_2M_2 + k_1(1 - N_2)\,A_2\varphi]$$
$$- M_1A_1[k_1(1 - N_2)\,A_2 + k_1A_2O_2\varphi]$$

$$T_2 = [(1 - N_2)\,A_2 + A_2O_2\varphi].(1 + k_2A_1M_1)$$
$$+ [(1 - N_2)\,A_2\varphi + A_2M_2].k_2A_1(1 - N_1)$$

$$U_1 = (1 - N_1)\,A_1[k_1(1 - N_2)\,A_2 + k_1A_2O_2\varphi] - A_1M_1k_1A_2O_2$$
$$- A_1O_1[1 - k_1A_2M_2 + k_1(1 - N_2)\,A_2\varphi]$$

$$U_2 = -[(1-N_2)\,A_2 + A_2O_2\varphi]\,k_2A_1\,(1-N_1) + [(1-N_2)\,A_2\varphi + A_2M_2]\,.\,k_2A_1O_1 + A_2O_2\,(1+k_2A_1M_1)$$

$$V_1 = (1-N_1)\,A_1k_1A_2O_2 - A_1O_1\,[k_1\,(1-N_2)\,A_2 + k_1A_2O_2\varphi]$$

$$V_2 = [(1-N_2)\,A_2 + A_2O_2\varphi]\,k_2A_1O_1 - O_2A_2k_2A_1\,(1-N_1)$$

$$Z_1 = -A_1O_1k_1A_2O_2 \quad ; \quad Z_2 = A_2O_2k_2A_1O_1$$

on peut écrire ainsi les expressions simplifiées des coefficiens Cz_1, Cz_2

$$(2) \qquad \begin{cases} Cz_1 = J_1 + T_1\,\alpha + U_1\,\alpha^2 + V_1\,\alpha^3 + Z_1\,\alpha^4 \\ Cz_2 = J_2 + T_2\,\alpha + U_2\,\alpha^2 + V_2\,\alpha^3 + Z_2\,\alpha^4 \end{cases}$$

Les coefficients globaux de résistance sont ensuite calculés avec les formules de PRANDTL:

$$(3) \quad Cx_1 = Cx_{1m} + \frac{\sigma}{\pi}\cdot\frac{L_2}{L_1}\cdot\frac{Cz_1\,Cz_2}{\lambda_2} \; ; \; Cx_2 = Cx_{2m} + \frac{\sigma}{\pi}\cdot\frac{L_1}{L_2}\cdot\frac{Cz_1\,Cz_2}{\lambda_1}$$

où l'on a

$$\sigma = \sigma_1 + s' - \sqrt{s'^2 + \left(\frac{\tau'}{t}\right)^2}$$

avec $\mu' = \dfrac{L_2}{L_1}$, il résulte, selon PRANDTL

$\sigma_1 = \dfrac{1}{1+5{,}53\,\varepsilon}$, pour ε compris entre 1/4 et 1/15, ou bien

$\sigma_1 = \dfrac{1-0{,}66\,\varepsilon}{1{,}055+3{,}7\,\varepsilon}$, pour ε compris entre 1/2 et 1/15 (valeurs plus exactes).

$$\tau' = \frac{1-\mu'}{1+\mu'} \; ; \; s' = 0{,}8\,\sigma_1\,(1-\sigma_1) - 0{,}1 \; ; \; t = \frac{0{,}56}{\sigma_1 + s' - 0{,}22}.$$

La portance totale du biplan est ainsi

$$Cz = Cz_1\frac{S_1}{S} + Cz_2\frac{S_2}{S}$$

et la traînée

$$Cx = Cx_{1m}\frac{S_1}{S} + Cx_{2m}\frac{S_2}{S} + 2\,\frac{\sigma}{\pi}\,\frac{S_1\,.\,S_2}{SL_1\,L_2}\,Cz_1\,Cz_2.$$

Le coefficient unitaire de moment par rapport au centre de gravité peut être ensuite aisément déduit, avec les valeurs de Cx, Cz ainsi calculées et pour une incidence quelconque α (fig. 1). Soit un système de coordonnées ayant l'origine dans le centre de gravité de l'avion et

soit encore Gx parallèle à l'axe de portance nulle de l'aile supérieure (méthode préconisée par M. CARAFOLI [1]). On a

$$Cm_G = \frac{2M_G}{\rho S l W^2} = -Cm_{01}\frac{S_1}{S}\cdot\frac{l_1}{l} - Cm_{02}\frac{S_2}{S}\cdot\frac{l_2}{l} + Cz_1\frac{d_1}{l}\frac{S_1}{S}\cos(\nu_1+\alpha)$$

$$+ Cx_1\frac{d_1}{l}\frac{S_1}{S}\sin(\nu_1+\alpha) - Cz_2\frac{d_2}{l}\cdot\frac{S_2}{S}\cos(\nu_2+\varphi+a)$$

$$- Cx_2\frac{d_2}{l}\frac{S_2}{S}\sin(\nu_2+\varphi+a) + Ct\cdot\frac{t}{l} - Cx_r\frac{r}{l} - C'x\frac{s}{S}\frac{D}{l}\sin(\alpha-\psi)$$

$$- C'z\frac{s}{S}\cdot\frac{D}{l}\cos(\alpha-\psi) - \frac{s}{S}\cdot\frac{b}{l}C'm_0 - \frac{0{,}1\,e_2}{h}\left(\frac{S_1}{S} - \frac{S_1'}{S_2'}\frac{l_1'}{l_2'}\cdot\frac{S_2}{S}\right).$$

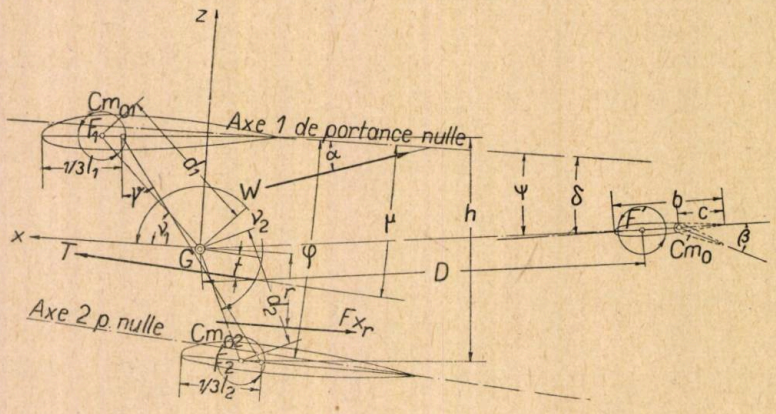


Fig. 1.

On peut négliger éventuellement, dans cette relation, l'angle compris entre la portance de l'empennage et la perpendiculaire sur la droite GF' ; de même on peut négliger la variation en position et grandeur des résistances passives, ainsi que les moments dûs aux résistances à l'avancement des gouvernes (résistance unitaire $C'x$).

Le coefficient de traction Ct peut s'écrire en tenant compte des équations générales du vol sur une trajéctoire faisant l'angle θ avec l'horizontale (fig. 2).

Soit, en effet, P la portance, R la résistance à l'avancement et T la traction. On a

$$T\cos(\alpha+\mu) = R + G\sin\theta$$
$$P + T\sin(\alpha+\mu) = G\cos\theta$$

[1]) E. CARAFOLI, Sur la stabilité statique longitudinale et le centrage des avions; *l'Aéronautique*, no. 128, janvier 1930.

si on admet $\alpha + \mu \cong 0$, cas touchant de près la réalité, et en divisant les deux équations par $\frac{\rho}{2} SW^2$ on obtient

$$Ct = C_X + Cz \operatorname{tg}\theta$$

où l'on a

$$C_X = Cx + Cx_r + C'x \frac{s}{S}.$$

L'angle du courant à l'endroit de l'empennage est modifié par l'hélice qui, aux diverses incidences, tourne dans un plan oblique par rapport à la direction du courant en amont; ainsi est produite une petite portance supplémentaire, négligée précédemment et, comme réaction, une vitesse induite, de sens contraire, variable avec l'incidence α. Il faut tenir compte ensuite de l'angle de déflection dû aux deux ailes, afin d'évaluer exactement les forces sur les gouvernes.

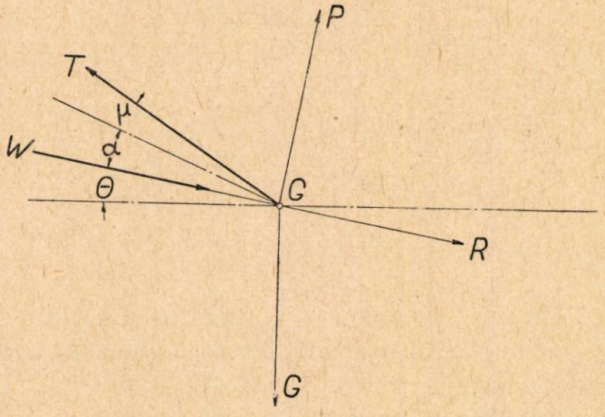


Fig. 2.

Un autre effet produit par l'hélice est l'augmentation de la vitesse de l'air en aval du plan de rotation. Cet effet, négligeable en général en ce qui concerne les ailes, si l'on tient compte que l'hélice est placée devant le fuselage ou le capotage du moteur, est beaucoup plus accentué sur l'empennage.

Le coefficient de charge sur le disque de l'hélice sera

$$\tau = \frac{2T}{\rho\pi R^2 W^2}$$

et soit encore w la vitesse supplémentaire en aval, due au souffle. En

tenant compte des résultats obtenus dans les théories connues de l'hélice on a

$$\frac{w}{W} = \sqrt{1+\tau} - 1$$

ou bien, en notant $W_s = W + w$ la vitesse totale en aval, on obtient (d'après M. Carafoli)

$$\frac{W_s^2}{W^2} = 1 + \frac{S}{\pi R^2} Ct.$$

En réalité on constate (Hopf) que la vitesse supplémentaire est approximativement moindre que la vitesse w calculée, soit 0,7 w. Donc

$$W_s = W + 0{,}7w$$

et

$$\frac{W^2}{W^2} = [1 + 0{,}7(\sqrt{1+\tau} - 1)]^2 = \left[1 + 0{,}7\left(\sqrt{1 + \frac{S}{\pi R^2} Ct} - 1\right)\right]^2.$$

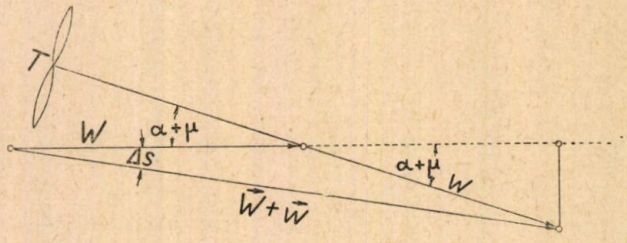


Fig. 3.

Les forces étant proportionnelles au carré de la vitesse, l'expression ci-dessus donnera directement le coefficient multiplicateur de $C'x$, $C'z$, C'_{m0} pour l'empennage.

L'angle de déflection dû au souffle se déduit aisément, en composant géométriquement les vitesses $\vec{W}$ et $\vec{w}$; il faut remarquer que, en ce qui concerne la valeur numérique de la somme $\vec{W} + \vec{w}$, l'erreur faite par l'addition algébrique est minime, ce qui justifie le résultat trouvé ci-dessus.

On a (fig. 3)

$$\Delta_S \backsimeq \frac{w}{W + w}(\alpha + \mu)$$

$$\Delta_S \backsimeq \left(1 - \frac{1}{0{,}7\sqrt{1 + \frac{S}{\pi R^2} Ct} + 0{,}3}\right) \cdot (\alpha + \mu).$$

La déflection du courant provoquée par les deux ailes est [1])

$$\Delta = \frac{1{,}8}{\pi\lambda_1} Cz_1 + \frac{1{,}8}{\pi\lambda_2} Cz_2$$

relation obtenue en supposant que les vitesses induites à l'endroit de l'empennage sont majorées d'environ 80%, par rapport aux vitesses induites sur chaque aile, ce qui correspond, pour les avions de proportions normales, à peu près à la réalité.

L'incidence réelle de l'empennage horizontal dépend encore du braquage β du profondeur, qui modifie la position de l'axe de portance nulle du profil. Si l'on considère ce braquage positif lorsque le profondeur est déplacé vers le bas par rapport à la position neutre, on a l'augmentation correspondante de l'incidence, d'après GLAUERT [2]) et MUNK

$$\Delta(\alpha - \delta) = \frac{2}{\pi}\left[\arcsin\sqrt{\frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{c}{b}\left(1 - \frac{c}{b}\right)}\right] \cdot \beta$$

et la variation du coefficient de moment à la portance nulle

$$\Delta C''m_0 = 2\sqrt{\frac{c}{b}\left(1 - \frac{c}{b}\right)^3} \cdot \beta.$$

L'expérience confirme ces résultats théoriques à un facteur de réduction près. Comme, toutefois [3]), ce facteur n'intervient que pour les valeurs $\frac{c}{b} < 0{,}35$, on peut appliquer les résultats ci-dessus sans aucune correction.

En tenant compte des observations précédentes, on peut écrire aussi les valeurs réelles des coefficients de l'empennage horizontal:

$$C'z = \frac{5{,}53\pi\lambda'}{5{,}53 + \pi\lambda'} \cdot \left\{ \alpha - \delta - \frac{1.8}{\pi\lambda_1} Cz_1 - \frac{1.8}{\pi\lambda_2} Cz_2 \right.$$

$$- \left(1 - \frac{1}{0{,}7\sqrt{1 + \frac{S}{\pi R^2}} Ci + 0{,}3}\right) \cdot (\alpha + \mu)$$

$$\left. + \left[\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{c}{b}\left(1 - \frac{c}{b}\right)}\right] \cdot \beta \right\} \cdot \left[1 + 0{,}7\left(\sqrt{1 + \frac{S}{\pi R^2}} Ct - 1\right)\right]^2$$

$$= C''z \cdot \left[1 + 0{,}7\left(\sqrt{1 + \frac{S}{\pi R^2}} Ct - 1\right)\right]^2$$

---

[1]) FUCHS HOPF u. SEEWALD, *Aerodynamik*.

[2]) GLAUERT, *Elements of airfoil and airscrew theory*.

[3]) R. PRIS, *Aérodynamique expérimentale*.

$C''z$ étant la portance de l'empennage dans le courant W, sans tenir compte du souffle de l'hélice, de même que $C''m_0$ et $C''x$. Il faut noter que $C''z$ vient d'être calculé en admettant la loi théorique de variation pour $C''z = f(i')$. On peut tout aussi bien utiliser les courbes expérimentales en calculant l'incidence d'après la formule

$$i' = \frac{1}{0{,}7\sqrt{1 + \frac{S}{\pi R^2} Ct} + 0{,}3}(\alpha + \mu)$$

$$+ \frac{2}{\pi}\left[\text{arc sin}\sqrt{\frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{c}{b}\left(1 - \frac{c}{b}\right)}\right] \cdot \beta - \delta - \frac{1.8}{\pi\lambda_1} Cz_1 - \frac{1.8}{\pi\lambda_2} Cz_2 - \mu.$$

et en multipliant les valeurs de C_z'' obtenues par le facteur $\left(\frac{W_s}{W}\right)^2$.

Le coefficient de moment à la portance nulle sera

$$C'm_0 = \left[C''m_0 + 2\sqrt{\frac{c}{b}\left(1 - \frac{c}{b}\right)^3} \cdot \beta\right] \cdot \left[1 + 0{,}7\left(\sqrt{1 + \frac{S}{\pi R^2}} Ct - 1\right)\right]^2$$

où $C''m_0$ est le coefficient pour le profil de l'empennage, ayant un braquage nul.

Si on met

$$Q_1 = C_{1m0}\frac{S_1}{S}\cdot\frac{l_1}{l} + C_{2m0}\frac{S_2}{S}\frac{l_2}{l} + 0{,}58\frac{s}{S}\frac{b}{l}C''_{m0} + \frac{0{,}1\,e_2}{h}\left(\frac{S_1}{S} - \frac{S'_1}{S'_2}\cdot\frac{l'_1}{l'_2}\frac{S_2}{S}\right)$$

$$Q_2 = \frac{d_1}{l}\frac{S_1}{S} \quad ; \quad Q_3 = \frac{d_2}{l}\frac{S_2}{S} \quad ; \quad Q_4 = 1 - 0{,}49\frac{s}{\pi R^2}\frac{b}{l}C''_{m0}$$

$$Q_5 = 0{,}49\frac{s}{\pi R^2}\frac{D}{l}; \; Q_6 = 0{,}98\frac{s}{\pi R^2}\frac{b}{l}\sqrt{\frac{c}{b}\left(1 - \frac{c}{b}\right)^3}; \; Q_7 = 0{,}42\frac{s}{S}\frac{b}{l}C''_{m0}$$

on obtient

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} Cm_G = -Q_1 + Q_2[Cz_1\cos(\nu_1 + \alpha) + Cx_1\sin(\nu_1 + \alpha)] \\ \qquad -Q_3[Cz_2\cos(\nu_2 + \varphi + \alpha) + Cx_2\sin(\nu_2 + \varphi + \alpha)] \\ + \{Q_4 - Q_5[C''z\cos(\alpha - \psi) + C''x\sin(\alpha - \psi] - Q_6\beta)\}\cdot \\ \quad (C_X + Cz\,\text{tg}\theta) - \{Q_7 + 0{,}857\dfrac{\pi R^2}{S}Q_5[C''z\cos(\alpha - \psi) \\ + C''x\sin(\alpha - \psi) + Q_6\beta]\}\cdot\sqrt{1 + \dfrac{S}{\pi R^2}(C_X + Cz\,\text{tg}\theta)} \\ - 1{,}183\dfrac{\pi R^2}{S}\{Q_5[C''z\cos(\alpha - \psi) + C''x\sin(\alpha - \psi)] + Q_6\beta\}. \end{array}\right.$$

Pour chaque incidence et braquage, on peut calculer, ainsi qu'il vient d'être montré, les coefficients Cx, Cz de chaque aile, de l'ensemble biplan et des gouvernes, soit en utilisant les courbes relevés sur chaque élément, soit en utilisant les lois théoriques indiquées.

Pour réaliser la stabilité longitudinale statique, la condition générale

$$\Sigma = \frac{d\,Cm_G}{d\alpha} < 0 \tag{5}$$

doit être satisfaite.

Si on observe que dans la relation (4) le sens positif des moments est le même que celui des angles α (contrairement aux courbes expérimentales), la condition (5) montre qu'aux différents braquages β, les courbes $Cm_G = f(\alpha)$ doivent être légèrement descendantes. On peut facilement calculer la pente de ces courbes dans un point quelconque.

$$\left\{\begin{aligned}
\Sigma = \frac{dCm_G}{d\alpha} &= Q_2\left[\left(\frac{dCz_1}{d\alpha} + Cx_1\right)\cos(\nu_1+\alpha)\right.\\
&+\left.\left(\frac{dCx_1}{d\alpha} - Cz_1\right)\sin(\nu_1+\alpha)\right] - Q_3\left[\left(\frac{dCz_2}{d\alpha} + Cx_2\right)\cos(\nu_2+\varphi+\alpha)\right.\\
&+\left.\left(\frac{dCx_2}{d\alpha} - Cz_2\right)\sin(\nu_2+\varphi+\alpha)\right] + \left(\frac{dCx}{d\alpha} + \frac{s}{S}\cdot\frac{dC''x}{d\alpha}\right.\\
&+\left.\frac{dCz}{d\alpha}\operatorname{tg}\theta + Cz\frac{d\operatorname{tg}\theta}{d\alpha}\right)\Big\}Q_4 - Q_5[C''z\cos(\alpha-\psi) + C''x\sin(\alpha-\psi)] - Q_6\beta\\
&-\frac{S}{2\pi R^2}\left[Q_7 + 0{,}857\,\frac{\pi R^2}{S}\,Q_5[C''z\cos(\alpha-\psi) + C''x\sin(\alpha-\psi)] + Q_6\beta\right].\\
&\cdot\left.\frac{1}{\sqrt{1+\frac{S}{\pi R^2}\,Cx + Cz\operatorname{tg}\theta}}\right] + Q_5\left[\sin(\alpha-\psi)\left(C''z - \frac{dC''x}{d\alpha}\right)\right.\\
&-\left.\left(\frac{dC''z}{d\alpha} + C''x\right)\cos(a-\psi)\right]\\
&\cdot\left[Cx + Cz\operatorname{tg}\theta + \frac{\pi R^2}{S}\left(0{,}857\sqrt{1+\frac{S}{\pi R^2}(Cx + Cz\operatorname{tg}\theta)} - 1{,}183\right)\right].
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Afin d'éviter une complication plus grande encore de cette formule, on a admis, pour le calcul de Cx seulement, que la traînée de l'empennage est C''_x au lieu de C'_x, erreur qui peut être considérée comme négligeable.

D'après les formules établies précédemment (relations (2), (3) on a

$$\frac{dCz_1}{d\alpha} = T_1 + 2U_1\alpha + 3V_1\alpha^2 + 4Z_1\alpha^3$$

$$\frac{dCz_2}{d\alpha} = T_2 + 2U_2\alpha + 3V_2\alpha^2 + 4Z_2\alpha^3$$

et

$$\frac{dCx_1}{d\alpha} = \frac{dCx_{1m}}{d\alpha} + \frac{\sigma}{\pi}\cdot\frac{L_2}{L_1\lambda_2}\left(Cz_1\frac{dCz_2}{d\alpha} + Cz_2\frac{dCz_1}{d\alpha}\right)$$

$$\frac{dCx_2}{d\alpha} = \frac{dCx_{2m}}{d\alpha} + \frac{\sigma}{\pi}\cdot\frac{L_1}{L_2\lambda_1}\left(Cz_1\frac{dCz_2}{d\alpha} + Cz_2\frac{dCz_1}{d\alpha}\right)$$

où on peut encore introduire, aux incidences usuelles, la formule générale

$$(7) \qquad Cx_m = Cx_0 + (1+\xi)\frac{Cz^2}{\pi\lambda}$$

enfin, la tangente de l'angle de la trajectoire avec l'horizontale est [1])

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\dfrac{\mu''\eta'}{\Lambda_0^3}\cdot\dfrac{\pi R^2}{S} - C_X}{Cz},$$

Λ_0 étant le pas de l'hélice, μ'' le coefficient du couple et η' le rendement de l'hélice. On a

$$\frac{d(\operatorname{tg}\theta)}{d\alpha} = \frac{\left(\dfrac{\pi R^2}{S}\cdot\dfrac{d\dfrac{\mu''\eta'}{\Lambda_0^3}}{d\alpha} - \dfrac{dC_X}{d\alpha}\right)Cz - \left(\dfrac{\mu''\eta'}{\Lambda_0^3}\cdot\dfrac{\pi R^2}{S} - C_X\right)\dfrac{dCz}{d\alpha}}{C_z^2}$$

et soit μ_1'', η_1', Λ_{01} les valeurs de μ'', η', Λ_0 à un moment donné. Si le couple moteur reste constant (admission constante), on obtient successivement

$$\frac{\mu''\eta'}{\Lambda_0^3} = \frac{\mu_1''\eta_1'}{\Lambda_{01}^3}\cdot\frac{W_1^3}{W^3}\cdot\frac{\eta'}{\eta_1'}\cdot\sqrt{\frac{\mu_1''}{\mu''}} \cong \frac{\mu_1''\eta_1'}{\Lambda_{01}^3}\cdot\left(\frac{Cz\cos\theta_1}{Cz_1\cos\theta}\right)^{3/2} = K\frac{C_z^{3/2}}{\cos^{3/2}\theta}$$

et

$$\frac{d\left(\dfrac{\mu''\eta'}{\Lambda_0^3}\right)}{d\alpha} = \frac{3}{2}K\left(\frac{\sqrt{Cz}\cos^{3/2}\theta\dfrac{dCz}{d\alpha} + C_z^{3/2}\sqrt{\cos\theta}\sin\theta\dfrac{d\theta}{d\alpha}}{\cos^3\theta}\right)$$

---

[1]) N. TIPEI, Une nouvelle méthode pour le calcul des performances. *Bul.*, no. 1-2-3 (1939—1940).

si on considère que μ_1'', η_1', Λ_{01}, $\cos\theta_1$ et Cz_1 peuvent être choisis arbitrairement, pour n'importe quel régime de vol, on tire

$$\frac{(d\,\mathrm{tg}\theta)}{d\alpha} = \frac{\left(C_X + \frac{\pi R^2}{2S}\,\frac{\mu''\eta'}{\Lambda^3}\right)\frac{dCz}{d\alpha} - Cz\,\frac{dC_X}{d\alpha}}{\left(Cz - \frac{3\pi R^2}{4S}\sin 2\theta\,.\,\frac{\mu''\eta'}{\Lambda_0^3}\right)Cz}$$

les valeurs

$$Cx_1,\ Cx_2,\ Cz_1,\ Cz_2,\ C''x,\ C''z,\ \frac{dCx_{1m}}{d\alpha},\ \frac{dCx_{2m}}{d\alpha},\ \frac{dCz_{1m}}{d\alpha},\ \frac{dCz_{2m}}{d\alpha},\ \frac{dC''z}{d\alpha},\ \frac{dC''x}{d\alpha}$$

sont fonctions de la même variable α. Dans ce cas, le calcul des coefficients Cm_G et $\frac{dCm_G}{d\alpha}$, quoique laborieux, ne présente aucune difficulté.

Si on désire un résultat moins précis, on peut introduire quelques simplifications. Ainsi on peut admettre, à n'importe quelle incidence

$$U_1 = U_2 = V_1 = V_2 = Z_1 = Z_2 = 0$$

ou, ce qui veut dire la même chose, négliger les puissances d'ordre supérieur d'α.

Aux petits angles d'attaque on a

$$\frac{dC_X}{d\alpha} = \frac{dCx_1}{d\alpha} = \frac{dCx_2}{d\alpha} = 0\,;\ \cos\alpha \cong 1\,;\ \alpha - \psi \cong 0 \text{ et } Cx_1 = Cx_{01}\,;\ Cx_2 = Cx_{02}$$

constantes et égales aux valeurs des ailes monoplanes à l'incidence nulle.

Aux grandes incidences, on aura

$$\frac{dCz}{d\alpha} \cong \frac{dCz_1}{d\alpha} \cong \frac{dCz_2}{d\alpha} \cong O\ ;\ Cz_1 \cong Cz_{1m_{\mathrm{Max}}}\ ;\ Cz_2 \cong Cz_{2m_{\mathrm{Max}}}\,.$$

* * *

Il a été fait mention, au début de cet article, qu'il est nécessaire de définir un point F par rapport auquel le moment des deux ailes soit constant, afin de situer le centre de gravité de l'avion.

Soit, en général, $Cz_1 = f_1(\alpha)$, $Cz_2 = f_2(\alpha)$, $Cx_1 = f_1'(\alpha)$ et $Cx_2 = f_2'(\alpha)$ et soit encore F le point par rapport auquel le moment total est un invariant (fig. 4). Si F_1, F_2 sont les foyers des deux ailes et $F_1F = x$; $F_2F = y$, faisant les angles $\overline{\omega}_1$ et $\overline{\omega}_2$ avec l'axe de portance nulle de l'aile supérieure, l'équation des moments par rapport à F donne:

$$x\,.f_1(\alpha).\cos(\overline{\omega}_1 + \alpha) - yf_2(\alpha)\cos(\overline{\omega}_2 + \alpha) + xf_1'(\alpha)\sin(\overline{\omega}_1 + \alpha) - yf_2'(\alpha).$$
$$\sin(\overline{\omega}_2 + \alpha) - Cm_{01}\,l_1 - Cm_{02}\,l_2 = lCm_0$$

ou bien encore

$$x[f_1(\alpha)\ \cos\ (\bar{\omega}_1+\alpha)+f_1'(\alpha)\ \sin\ (\bar{\omega}_1+\alpha)]-y[f_2(\alpha)\ \cos\ (\bar{\omega}_2+\alpha)+f_2'(\alpha)\ \sin\ (\bar{\omega}_2+\alpha)]\equiv \text{cte}$$

relation qui, dans sa forme générale, ne saurait être satisfaite. Si on admet

$$\cos\alpha=\sim 1\ ,\ \sin\alpha=\alpha \text{ ainsi que}$$

$$Cz_1=J_1+T_1\alpha\ \ ;\ \ Cz_2=J_2+T_2\alpha\ \ ,\ \text{on a}$$

$$x[C_1+C_1'\alpha+C_1''\alpha^2+C'''\alpha^3]-y[C_2+C_2'\alpha+C_2''\alpha^2+C_2'''\alpha^3]=C=\text{cte}$$

où les valeurs des coefficients C sont:

$$C=lCm_0+l_1Cm_{01}+l_2Cm_{02}$$

$$C_1=J_1\cos\bar{\omega}_1+\left(Cx_{01}+\frac{J_1}{\pi\lambda_1}+\frac{\sigma}{\pi}\frac{L_2}{L_1\lambda_2}J_1T_2\right)\sin\bar{\omega}_1$$

$$(7)\qquad C_1'=\left(Cx_{01}+\frac{J_1}{\pi\lambda_1}+\frac{\sigma}{\pi}\frac{L_2}{L_1\lambda_2}J_1J_2+T_1\right)\cos\bar{\omega}_1$$

$$+\left[2\frac{J_1T_1}{\pi\lambda_1}+\frac{\sigma}{\pi}\frac{L_2}{L_1\lambda_2}(T_1J_2+T_2J_1)-J_1\right]\sin\bar{\omega}_1$$

$$C_1''=\left[\frac{\sigma}{\pi}\frac{L_2}{L_1\lambda_2}(T_1J_2+T_2J_1)+2\frac{J_1T_1}{\pi\lambda_1}\right]\cos\bar{\omega}_1$$

$$+\left[\frac{T_1^2}{\pi\lambda_1}+\frac{\sigma}{\pi}\frac{L_2}{L_1\lambda_2}T_1T_2-T_1\right]\sin\omega_1$$

$$C_1'''=\left(\frac{T_1^2}{\pi\lambda_1}+\frac{\sigma}{\pi}\frac{L_2}{L_1\lambda_2}T_1T_2\right)\cos\bar{\omega}_1$$

et de même pour C_2, C_2', C_2'', C_2''', si on remplace les indices 1 par 2 et inversement.

Il résulte donc que le rapport

$$(8)\qquad \frac{x}{y}=\frac{\dfrac{C}{y}+C_2+C_2'\alpha+C_2''\alpha^2+C_2'''\alpha^3}{C_1+C_1'\alpha+C_1''\alpha^2+C_1'''\alpha^3}$$

doit être constant, soit encore

$$\frac{\dfrac{C}{y}+C_2}{C_1}=\frac{C_2'}{C_1'}=\frac{C_2''}{C_1''}=\frac{C_2'''}{C_1'''}=\frac{x}{y}$$

si on ajoute encore la condition

$$(10)\qquad x\sin(\bar{\omega}_1+i)+y\sin(\bar{\omega}_2+i)=\text{constante}=h$$

on obtient un système d'équations d'où un tire les valeurs x, y, $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ et Cm_0.

De cette manière le problème général, ainsi qu'il vient d'être traité précédemment, est notablement simplifié. En effet, le système biplan peut être remplacé par une aile monoplane de corde l, dont on connaît

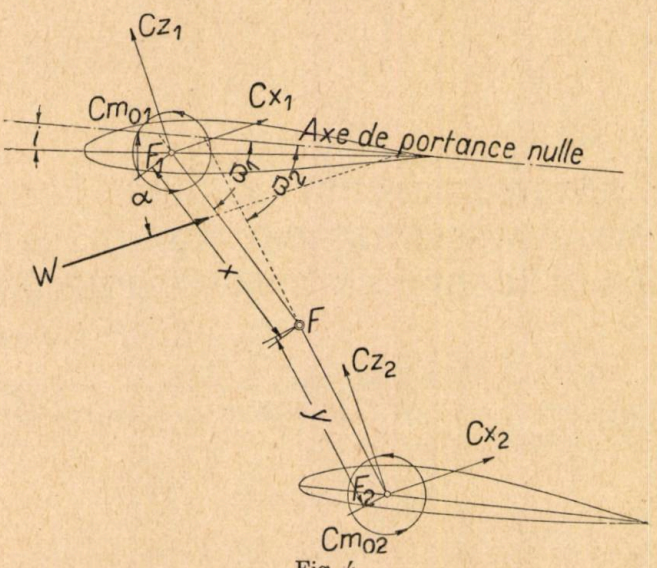


Fig. 4.

le foyer, Cm_0 et les coefficients Cx, Cz, pour chaque position. Avec le calcul de la déflection du courant, selon les formules indiquées, la question de la stabilité statique longitudinale peut être ramenée, tout au moins pour un résultat approximatif, à un problème plus simple et déjà connu.

631.6 SOLS

DER SÄTTIGUNGSZUSTAND DES BODENS UND DIE WASSERSTOFFIONENKONZENTRATION DER WÄSSERIGEN BODENSUSPENSION

von **N. C. Cernescu**

Es werden in kritischer Weise die bestehenden Beziehungen zwischen dem Sättigungsgrad des Bodens und der Wasserstoffionenkonzentration der Bodensuspension diskutiert.

EINLEITUNG

Die Wasserstoffionenkonzentration $[H]$ einer Lösung, die eine schwache Säure und eines ihrer Salze enthält, kann durch die klassische Form der Puffergleichung gegeben werden:

$$(1) \qquad [H] = k_s \frac{\textit{Konzentration der freien Säure}}{\textit{Konzentration des gebild. Salzes}}$$

Die Acidoide des Bodens haben den Charakter schwacher Säuren mit einem sehr grossen Molekül, welche durch Ionisierung die Wasserstoffionenkonzentration des Bodens bestimmen. Unter der Annahme, dass die im Ton-Humus-Komplex des Bodens adsorbierte Wasserstoffmenge ein Mass für die Säurekonzentration des Systems Wasser-Boden, und die Menge der adsorbierten Alkali-und Erdalkalikationen ein Mass für die Konzentration des gebildeten Salzes darstellt, kann die Wasserstoffionenkonzentration der Bodenlösung durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$(2) \qquad [H] = k_s \frac{T - S}{S}$$

oder:

$$(3) \qquad pH = pk_s + \log \frac{S}{T - S}$$

$[H]$ = Wasserstoffionenkonzentration der Bodenlösung;

$T - S$ = Sättigungsdefizit (Menge des adsorbierten Wasserstoffs);

S = Menge der adsorbierten Basen.

Mit Hilfe der Gleichung (2) zeigt Th. Saidel (15) den Parallelismus zwischen den Werten des Verhältnisses $\frac{S}{T-S}$ und den pH-Werten bei einer Reihe von natürlichen Böden Rumäniens auf und deduziert für pk_s den Mittelwert 6,0 (Die Mehrzahl der Proben haben ein pH zwischen 6 und 7,55).

Im Allgemeinen wird zur Charakterisierung eines Bodens der Begriff des Sättigungsgrades gebraucht, der zuerst von D. J. Hissink eingeführt wurde. Der Sättigungsgrad eines Bodens entspricht seinem Gehalt an Basen, ausgedrückt in Prozenten der Austauschkapazität.

$$V = Sättigungsgrad = \frac{S}{T-S}\,100$$

Die Ersetzung der Werte $T - S$ und S in Gleichung (2) durch den Sättigungsgrad führt zu:

$$[H] = k_s \frac{100 - V}{V} \tag{4}$$

Der Sättigungsgrad wird in Bezug auf eine mehr oder weniger konventionell bestimmte Austauschkapazität berechnet. Im Allgemeinen wird ein Boden als mit Basen gesättigt bezeichnet, wenn er sich im Adsorbtionsgleichgewicht mit einer Lösung von Kalziumkarbonat- und Bikarbonat bei dem CO_2-Teildruck der Luft befindet; das entspricht einem pH-Wert der Lösung von 8,3—8,4. Ein solcher Boden hat den Sättigungsgrad 100 und nach obiger Gleichung müsste $[H] = 0$ sein. Für den Fall der vollkommenen Entbasung (Sättigungsgrad = 0) strebt die Reaktion des Bodens ebenfalls einem endlichen Wert zu (pH ultimate), während die erwähnte Gleichung gegen ∞ zustrebt. Die Gleichungen (2, 3) können folglich nur in einem beschränkten Intervall um den Wert $V = 50$ angewendet werden.

Auf Grund eines reichen aus der wissenschaftlichen Literatur zusammengetragenen Materials schuf Vageler (18) eine empirische Gleichung mit welcher er versucht, die quantitativen Verhältnisse zwischen den pH-Werten und dem Sättigungsgrad des Bodens für alle Werte des Sättigungsgrades (1—100) wiederzugeben:

$$pH = \frac{1{,}4\,(V - 20)}{131 - V} + 4{,}8 \tag{5}$$

R. Bradfield (1) berechnet mit Hilfe der Gleichung (2) und der Titrationskurve einer durch Elektrodialyse entbasten Tonsuspension, den Wert der Konstante pk_s. Die Form der Neutralisierungskurve ist diejenige einer monobasischen Säure. Die für pk_s erhaltenen Werte

bleiben jedoch nicht konstant, sondern ändern sich kontinuierlich in dem Intervall $pH = 4{,}9 - 7{,}10$, zwischen 5,56 und 7,3 (Mittel $pk_s = 5{,}86$). Obwohl die Tonsäure bei der Neutralisierung sich wie eine monobasische Säure verhält, konnte nach BRADFIELD ihre Ionisierung durch eine Reihe von Gleichungen von der Form $\frac{[H].S}{T-S} = k_a, k_b, k_c \ldots k_n$ dargestellt werden.

Das Erhalten einer Titrationskurve, die jener einer monobasischen Säure ähnlich sieht, ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass ein Gemisch von Säuren mit genügend angenäherten Dissoziationskonstanten, sodass sie sich teilweise überlagern können, eine monobasische Kurve liefern kann. Was den Humus anbetrifft, so führen die neueren Untersuchungen über die Humussäuren zu einem analogen Bild. Die Humusstoffe haben den Charakter polybasischer Säuren mit sehr grossen Molekülen und hoher Basizität (W. SCHEELE, 16).

Ausserdem müssen wir uns dessen bewusst sein, dass bei der Bestimmung der Wasserstoffionenkonzentration eigentlich die «Aktivität» und keinesfalls die «Konzentration» der Wasserstoffionen gemessen wird (S. MATTSON, 10). Die wahre Gleichgewichtskonstante würde nur dann erhalten, wenn die mit dem Aktivitätsfaktor multiplizierte Konzentration des Säure-Anions an Stelle der Konzentration des gebildeten Salzes in den Nenner der Gleichung (1) eingeführt würde. Andererseits wird, für den Fall, dass das vom Kation mit den Säuren gebildete Salz schwach dissoziiert ist (und dies trifft wahrscheinlich bei den kolloiden Bodenacidoiden zu), die Hinzufügung eines Salzes eine scheinbare Vergrösserung der Dissoziationskonstante bewirken [1]). Die scheinbare Dissoziationskonstante wird in ihrer Abhängigkeit von der wahren, durch die Gleichung ausgedrückt:

$$(6) \qquad k_s = \frac{k\left(\frac{i+}{k_c} + 1\right)}{fa}$$

k_c = Dissoziationskonstante des Salzes;
$i+$ = Konzentration des Kations;
k = Wahre Dissoziationskonstante;
fa = Aktivitätsfaktor des Säure-Anions.
(SANTE MATTSON, 10).

Das Verhältnis (1), in welches an Stelle der Aktivitäten die analytischen Konzentrationen eingeführt werden, führt zur Berechnung der scheinbaren Dissoziationskonstante k_s, deren Wert sich mit den Werten des Verhältnisses $S : (T - S)$ ändert. Die durch diesen Effekt hervorgerufenen Änderungen schliessen die von BRADFIELD und SCHEELE

[1]) Dieses Verhalten erklärt die wohlbekannte Tatsache, dass durch Hinzufügung eines neutralen Salzes (z. B. KCl) die Aktivität der Wasserstoffionen in den wässrigen Bodensuspensionen erhöht wird.

formulierte Hypothese einer erhöhten Basizität der Bodenacidoide nicht aus.

Die einfache Bildung von nicht vollkommen dissoziierten Salzen mit mono-oder divalenten Ionen, sowie die Bildung einer Mizelle durch Aggregation zweier oder mehrerer Moleküle führt nach S. MATTSON (9, 10) zu unüberwindlichen Komplikationen bei der Anwendung der obigen Dissoziationsgleichung. Das gleichzeitige Vorhandensein zweier Acidoide sehr verschiedener Natur im Boden (Humus und Ton), sowie auch die sehr verschiedene Natur der adsorbierten Kationen kompliziert die Lage noch mehr. Für den Fall des Ton-Humuskomplexes können also die Gleichungen (1) und (2) die Reaktion im Boden höchstens qualitativ kennzeichnen.

Die Wasserstoffionenkonzentration des Bodens wird im Allgemeinen als abhängig von dem Sättigungsgrad und dem Dissoziationsgrad der Bodenacidoide angesehen. Bei den Böden mit stark dissozierten Säuren lässt sich bei einem gewissen *pH*-Wert ein grösserer Sättigungsgrad als bei jenen mit schwächer dissoziierten Säuren feststellen.

Die Ermittlung der Stärke der Bodenacidoide bildete den Gegenstand einer ganzen Reihe von Untersuchungen. Wie oben gezeigt wurde, ändert sich die mit Hilfe der Gleichung (2) berechnete Dissoziationskonstante mit dem Sättigungsgrad. Um praktisch vergleichbare Werte, die uns relative Bilder liefern, zu erhalten, griff man zu verschiedenen Methoden. S. MATTSON charakterisiert die Stärke der Acidoide mit Hilfe der Wasserstoffionenkonzentration bei der totalen Entbasung des Bodens (*pH* ultimate). Der Wert « *pH* ultimate » wächst mit dem Sinken des Dissoziationsgrades des Acidoids.

$\frac{SiO_2}{R_2O_3}$	3,18	1,89	0,31
Austauschkapazität	0,80	0,33	0,04
pHu	3,7	4,7	6,1

W. H. PIERRE und G. D. SCARSETH (14) vergleichen den Sättigungsgrad verschiedener Böden, der derselben Wasserstoffionenkonzentration entspricht ($pH = 4{,}8$). Je höher der Dissoziationsgrad der Bodenacidoide ist, umso grösser ist der Sättigungsgrad. R. BRADFIELD (1), L. D. BAVER (3), W. H. PIERRE und G. D. SCARSETH (14) berechnen die Dissoziationskonstante mit Hilfe der Gleichung (2). Um die verschiedenen Ergebnisse vergleichen zu können, müssen wir in diesem Falle denselben Sättigungsgrad wählen. Aus den angeführten Gründen ist

die Annahme $V = 50\%$ zu empfehlen. Die auf diese Weise bestimmte Konstante führt den Namen « Relative Dissoziationskonstante » und dient zur Charakterisierung des Acidoids. Mit dem Wachsen des Verhältnisses $Si\ O_2 : R_2O_3$ nimmt mit der Gesamtaustauschkapazität auch das Pufferungsvermögen, sowie die Dissoziationskonstante (die Stärke des Acidoides) zu. Im Allgemeinen fällt die Stärke des Acidoids mit der Intensität der Verwitterung, des Mineralbodens unabhängig von einer erfassbaren Änderung des Verhältnisses $Si\,O_2 : R_2O_3$.

Truog, I. W. Tidmore und F. W. Parker (17) haben ebenfalls gezeigt, dass die Säuren der verschiedenen Böden verschiedene Stärke oder Avidität haben können. Truog definiert die Avidität als den Prozentsatz des Gesamtwasserstoffes, der durch die Base Kalium ersetzt wird, wenn der Gehalt an CH_3COOK im System Boden-Lösung äquivalent der Gesamtmenge des austauschbaren Wasserstoffs ist. Die auf diese Art bestimmte Avidität des Wasserstoffs ändert sich von Boden zu Boden. Wie leicht zu ersehen ist, entsprechen die höheren Aviditätswerte denjenigen Böden, die bei demselben *pH*-Wert einen höheren Sättigungsgrad zeigen. Der Vergleich verschiedener Böden auf Grund ihrer Avidität kann nur bei einem bestimmten, für alle Böden gleich grossen Sättigungsgrad durchgeführt werden.

EIGENE UNTERSUCHUNGEN

Da wir im Besitz eines reichen analytischen Materials von S, $T—S$, V und *pH*-Bestimmungen in Profilen der verschiedenen zonalen Bodentypen Rumäniens, von den Tschernoziomen bis zu den alpinen Podsolen sind, so versuchten wir festzustellen, inwieweit von einer Korrelation zwischen dem Sättigungsgrad und der Wasserstoffionenkonzentration (oder *pH*) der Bodenlösung gesprochen werden kann.

Wir wollen nicht lange bei der angewandten Methode verweilen, da dieselbe anderen Ortes (N. Cernescu, (4) genau beschrieben worden ist. Wir betonen nur, dass der Sättigungsgrad als entsprechend dem polaren Adsorbtionsgleichgewicht des Bodens im Kontakt mit einer N-CH_3COOK-Lösung bei einem *pH*-Wert entsprechend dem Umschlagspunkt des Phenolphtaleins angesehen wird. Der Wert S wurde in den meisten Proben nach der von W. Rice vorgeschlagenen Methode bestimmt. Die Werte *pH*, V und T varieren für jeden Bodentyp innerhalb der in Tabelle 1 angegebenen Grenzen.

TABELLE 1

Die ungefähren Grenzwerte von *pH*, *V* und *T* für die oberen Horizonte der rumänischen Bodentypen.

	pH	*V* %	*T* m. äq. pro 100 g
Tschernoziome	7,0—8,3	90 —100	30—45
Degradierte Tschernoziome	5,8—7,0	75 — 87	31—39
Rötliche Braunerden (mediterrann. Braunerden)	6,0—6,6	80 — 86	24—28
Podsolige Braunerden (mitteleurop. Braunerden)	5,5—5,7	66 — 70	26—28
Unreife Podsole	4,7—5,2	13 — 46	13—18
Sekundäre Podsole (graue Waldböden)	4,5—5,4	5 — 25	6—14
Primäre Podsole (alpine Böden)	4,2—4,6	3 — 10	10—40

Aus dem Diagramm (Fig. 1) geht hervor, dass im Allgemeinen für

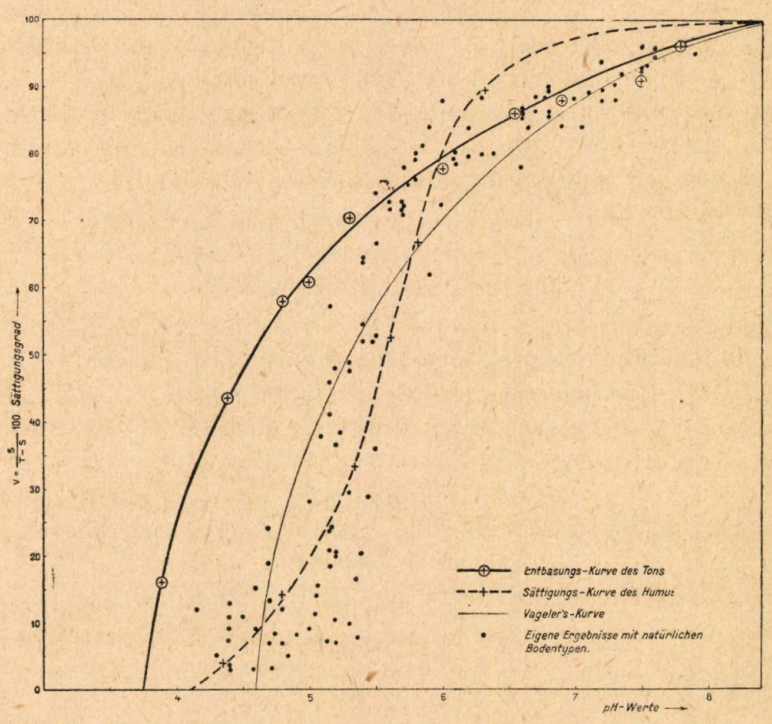


Fig. 1. — Graphische Darstellung der Beziehung zwischen dem Sättigungsgrad und *pH*-Wert- bei den natürlichen Bodentypen, verglichen mit der Entbasungskurve eines Tons und der Sättigungskurve des Humus.

Sättigungsgrade kleiner als 75% die Streuung der Punkte sehr gross ist, vor allem bei Sättigungsgraden unter 20%. Bei Sättigungsgraden

über 75% liegen die Punkte weniger gestreut entlang ein und derselben Linie. Bei einem Sättigungsgrad über 75% zeigt die Lage der Punkte ein ziemlich rasches Ansteigen des Wertes *pH* mit dem Sättigungsgrad an (Schwache Pufferung), während bei Werten unter 75% sich die *pH*-Werte im Verhältnis zu den Änderungen des Sättigungsgrades nur langsam ändern (Stärkere Pufferung). Dieselben Beobachtungen wurden von E. E. Turk und R. H. Bray (2) an ihrem eigenen Material gemacht. Die grosse Streuung der Werte ist auf die Unzulänglichkeit der Methode zurückzuführen, sowie auf Faktoren, die das Verhältnis zwischen dem *pH*-Wert und dem Sättigungsgrad beeinflussen können, die schon erwähnt wurden.

Wir wollen untersuchen, wie sich die Wasserstoffionenkonzentration mit dem Sättigungsgrad für jeden der beiden Bodenkomplexe mit acidoidem Charakter, nämlich Ton und Humus, ändert, um auf diese Weise eine Deutung unserer eigenen Ergebnisse zu erhalten.

1. Die Entbasungs- und Neutralisierungskurve des Tones.

Wir entnahmen einem durch Entkalkung von Löss entstandenen Lehm aus dem *B*-Horizont des braunrötlichen Bodens von *Moara Domnească* eine Probe. Ihr Gehalt an Ton beträgt 30,5%, jener an Humus bloss 0,25%. Der Sättigungsgrad ist 83,5% und entspricht einem *pH* von 6,65. Dieser Sättigungsgrad wurde geändert, indem durch verschieden lang andauernde Elektrodialyse ein Teil der adsorbierten Basen durch Wasserstoff ersetzt wurde. Die Steigerung des Sättigungsgrades wurde durch Hinzufügen einer bestimmten Menge von $Ba(OH)_2$-Lösung erreicht, und zwar sowohl in den nicht elektrodialytisch behandelten Teilen der Proben als auch in teilweise entbasten Proben. Die erhaltenen Ergebnisse finden sich in Tabelle 2.

TABELLE 2

Entbasungs- u. Neutralisierungskurve eines Tons. (Probe aus dem *B*-Horizont einer rötlichen Braunerde).

10 g Boden + 25 ccm Wasser (Die Werte auf 100 g umgerechnet).

$T-S$ m. äquiv.	15,9	15,4	11,5	10,8	8,3	6,4	3,9	3,4	2,7	1,2
S m. äquiv.	11,5	11,9	15,9	16,9	19,5	21,9	24,4	24,9	25,6	27,1
$V=\frac{S}{T-S}100$	42,0	43,6	58,0	61,0	70,4	77,4	86,2	88,0	90,7	95,8
pH . .	4,25	4,37	4,80	4,95	5,30	6,00	6,55	6,90	7,45	7,80
pk_S . .	4,39	4,50	4,66	4,76	4,93	5,47	5,75	6,04	6,97	6,45

Die Prüfung der Tabelle 2 und der Figur 1 ergibt, dass die Punkte eine kontinuierliche Reihe bilden. Das Pufferungsvermögen bleibt längs der Tonkurve erhalten.

Die Gleichung (2) kann diese Reihenfolge nicht quantitativ wiedergeben. Die Berechnung der Konstante pk_s führt zu Werten, die mit dem Sättigungsgrad systematisch zwischen 4,40 und 6,45 ansteigen. Dieses bestätigt die Ergebnisse von R. Bradfield (2).

2. Die Entbasungs- und Neutralisierungskurve des Humus.

Zu diesem Zwecke verwendeten wir eine Probe aus dem Horizont *B* eines alpinen Podsols auf Sandstein, die 14,7% Humus enthielt und eine maximale Austauschkapazität von 63,7 Milliäquivalenten aufwies, die fast ganz dem Humus zukommt. Der Sättigungsgrad = 3,9% ($pH = 4{,}37$) zeigt eine sehr fortgeschrittene Entbasung an. Bei der Neutralisierung dieses Humus stiessen wir auf einige experimentelle Schwierigkeiten, die festgehalten zu werden verdienen.

Der austauschbare Wasserstoff wurde an einer frisch eingebrachten Probe bestimmt, und zwar ohne Schwierigkeit, durch Waschen auf dem Filter mit einer Lösung von CH_3COOK und Titrieren der freigewordenen Essigsäure. An derselben Probe wurde, nach langem Verweilen in lufttrockenem Zustand, unter denselben Arbeitsbedingungen ein viel kleinerer Wert für den austauschbaren Wasserstoff gefunden. Die Methode der wiederholten Auszüge führte zu demselben Ergebnis. Wir griffen darauf zwecks Bestimmung des austauschbaren Wasserstoffs zu der Methode Di Gleria (7), die auf der Neutralisierung durch Ammoniumhydratlösung und Bestimmung des adsorbierten Ammoniums nach Entfernung des Ammoniak-Überschusses durch sukzessives Verdampfen auf dem Wasserbad bis zu syrupartiger Dicke, beruht. Der auf diesem Weg erhaltene Wert für den austauschbaren Wasserstoff (6,15 Milliäquivalente pro 10 g) stimmt genau mit dem am frischen Material durch Waschen mit CH_3COOK-Lösung (6,13 *M. Ä.* pro 10 g) erhaltenen Wert überein.

Bei der Neutralisierung des Humus mit $Ba(OH)_2$-Lösung wurde ebenfalls eine sehr grosse Verzögerung in der Erreichung des Gleichgewichtes beobachtet *(Tabelle 3)*. Es wurden 10 g Boden (6,13 *M. Ä.* Wasserstoff) und 25 ccm Wasser genommen, das steigende Mengen von $Ba(OH)_2$ enthielt. Es wurde 10′ kräftig geschüttelt und nachher noch hie und da in dem in der Tabelle angegebenen Intervall.

TABELLE 3

Neutralisierungskurve des sauren Humus mit Hilfe einer $Ba(OH)_2$-Lösung. (Probe aus dem *B*-Horizont eines alpinen Podsols).

10 g Boden + 25 ccm Lösung (Die Werte auf 100 g umgerechnet).

Zugefügte $Ba(OH)_2$ (m. äquiv. pro 100 g)	0	6,2	18,7	31,2	40,5	54,5	62,3
S (m. äquiv. pro 100 g)	2,4	8,6	21,1	33,6	42,9	56,9	64,7
$T - S$ (m. äquiv. pro 100 g)	61,3	55,07	42,6	30,1	20,8	6,8	0,0
$V = \frac{S}{T-S} 100$	3,8	13,5	33,1	52,7	67,3	89,4	100
pH-Werte nach 10′ bei 20°	4,37	5,70	7,12	7,92	—	—	—
pH-Werte nach 60′ » 20°	—	5,20	6,25	7,50	7,70	8,10	—
pH-Werte nach 6 St. bei 20°	—	5,23	5,95	6,83	7,30	7,85	—
pH-Werte nach 24 St. » 20° + 7 St. » 75°	—	5,05	5,87	6,60	7,05	7,60	—
pH-Werte nach Gleichgewicht: 24 St. bei 75° + 12 St. » 20°	—	4,80	5,35	5,60	5,80	6,30	8,35
pk_s	5,78	5,60	5,65	5,55	5,49	5,42	—

Es muss bemerkt werden, dass der Austausch des Wasserstoffs mit Hilfe eines alkalischen Acetats keine guten Ergebnisse liefern kann, wenn wir mit älteren schon lange getrockneten Proben arbeiten. Bei solchen Proben geht sogar die Neutralisierung mit einem Alkali-Hydrat bei gewöhnlicher Temperatur nur sehr langsam von sich. Wahrscheinlich treten dabei in der Struktur der Humusstoffe Änderungen auf, die eine Verzögerung der Diffusion der austauschenden Ionen innerhalb der Mizelle bewirken. Ähnliche Beobachtungen über die Zeitdauer zur Erreichung des Neutralisierungsgleichgewichtes bei kolloiden Tonen wurden von L. D. Bayer und G. D. Scarseth (3) erwähnt. Sven Odén (11) bemerkt eine analoge Erscheinung bei den Humussäuren: Nach dem Trocknen kann die vollständige Mobilisierung der Säurefunktion nur durch Behandlung mit Hydrat, auf dem Wasserbad, erreicht werden.

Bei unseren Versuchen haben wir das Gleichgewicht nur nach 7-stündigem Verweilen der Proben im elektrischen Ofen bei 75° C in gut verschlossenen Phiolen aus Jenaer Glas erreicht. Die *pH*-Werte wurden nach einem 20-stündigen Verweilen bei Zimmertemperatur gemessen.

Aus der Tabelle 3 und dem Diagramm 1 kann ersehen werden, dass die Punkte in vollkommener Kontinuität aufeinanderfolgen. Das Pufferungsvermögen des Humus ist bei Sättigungsgraden $V = 75 - 100\%$ sehr schwach. Unter 75% steigt das Pufferungsvermögen sehr rasch an und bleibt viel höher als das des Tones.

TATSACHEN UND DEUTUNGEN

Die Prüfung des Diagrammes (Fig. 1) enthüllt uns eine interessante Tatsache: alle Punkte, die einem Sättigungsgrad $> 75\%$ entsprechen, sind entlang des betreffenden Astes der Entbasungskurve des Tons verteilt, während die Punkte die den Proben mit einem Sättigungsgrad unter 75% entsprechen, sich von der Tonkurve entfernen und die Tendenz haben, sich dem entsprechenden Ast der Neutralisierungskurve des Humus zu nähern und ihr zu folgen.

Welches ist die Erklärung dieser Tatsache?

Die Mehrzahl der Proben mit $pH > 6$ entstammen aus Bodenprofilen der Lœss-Serie (rötliche Braunerde-Tschernoziom) oder aus den tieferen Horizonten einiger Podsole auf Lehm und haben im Tonkomplex ein dem Wert 3 angenähertes Verhältnis $SiO_2 : R_2O_3$. Der genetische Prozess, der sich nur auf eine mässige Entbasung beschränkt, hat die Eigenschaften dieses Tonkomplexes nicht fühlbar geändert. Die untersuchten Proben haben dieselbe spezifische Austauschkapazität für Ton (ca 0,74 *M. Ä.* pro g) die jener für den von uns verwendeten, durch Entbasung des Lœsses entstandenen Lehmes sehr nahesteht. Bei diesen Böden kommen dem Humus nur in den allergünstigsten Fällen — höchstens 30—40% der Gesamtaustauschkapazität zu. Der Rest kommt dem Ton zu (5). Diese Tatsache erklärt uns im Verein mit der Beobachtung, dass das Pufferungsvermögen des Tones im angeführten Intervall grösser als dasjenige des Humus ist, die Streuung der Punkte entlang des betreffenden Astes der Entbasungskurve des Tones, bei Sättigungsgraden über 75%. Der Einfluss des Humus ist von geringer Bedeutung. Der Tonkomplex erleidet nur eine schwache, der durch Elektrodialyse hervorgerufene ähnliche Entbasung.

Die Entbasung, die von einem Sinken der *pH*-Werte unter 6 gefolgt wird, bringt wesentliche Änderungen in der Zusammensetzung des Tonkomplexes im Boden mit sich. Nach S. Mattson (9) wird als Endergebnis eines fortgesetzten Waschens ein Komplex erhalten, der bei sämtlichen *pH*-Wert der Waschlösung isoelektrisch ist. Schon bevor wahrnehmbare Veränderungen im Verhältnis $SiO_2 : R_2O_3$ des Bodens auftreten, kündigen eine Menge von Erscheinungen wesentliche Veränderungen im Tonkomplex an. So beginnt die Mobilisierung des Aluminiums und des Magnesiums aus dem Netz (siehe Cernescu, (4) sowie die Änderung der Austauschkapazität. Die Pufferwirkung des mineralischen Acidoids des Bodens, die qualitativ durch das Verhältnis zwischen dem Acidoid und seinem Salz nach der Puffergleichung bestimmt wird, ist unter den natürlichen Bedingungen der Entbasung erhöht, und zwar durch die Tendenz des Acidoids, seine Zusammen-

setzung so zu ändern, dass es unter den neuen Reaktionsbedingungen isoelektrisch bleibt. Die scheinbare Dissoziationskonstante des mineralischen Acidoids wird bei steigender Intensität der Verwitterung kleiner.

Der entsprechende Sättigungsgrad fällt bei demselben *pH*-Wert mit steigender Intensität der Verwitterung; der kolloide Ton aus jungen Böden zeigt im Allgemeinen für den einem bestimmten *pH*-Wert entsprechenden Sättigungsgrad grössere Werte als wie bei einem aus verwitterten Böden isolierten Ton, selbst wenn analytisch noch keine Änderung im Verhältnis $SiO_2 : R_2O_3$ festgestellt werden kann. Diese Tatsache ist auch in Fig. 1 erkenntlich. Der frisch entbaste Lehm zeigt bei einer Sättigung unter 70% *pH*-Werte, die von natürlichen Böden mit demselben Sättigungsgrad nicht erreicht werden.

Mit dem Sinken des Sättigungsgrades beginnt auch die Dispersion des Tones im Boden und seine Wanderung in die Tiefe, sodass im oberen Horizont des Bodenprofils das organische (Humus) über das anorganische Acidoid (Ton) zu überwiegen beginnt.

Bei den typischen sekundären Podsolen kann im oberen Horizont die dem Humus zukommende Fraktion 50% der Gesamtaustauschkapazität erreichen oder gar überschreiten, während bei den primären (alpinen) Podsolen auf Sandsteinen, die dem mineralischen Komplex zukommende Fraktion vernachlässigbar klein wird. Ebenso wächst bei einem Sättigungsgrad unter 75% das Pufferungsvermögen des Humus im Verhältnis zu demjenigen des frisch entbasten Tones beträchtlich.

Diese Tatsachen erklären eindringlich, weshalb unterhalb eines gewissen Sättigungsgrades die *pH*-Werte für die oberen entbasten Horizonte der natürlichen Böden sich von der Tonkurve entfernen und eine Lage entlang der Humuskurve einzunehmen trachten.

Zum Unterschied gegenüber der Entbasung des Tones durch Elektrodialyse ändert sich die Dissoziationskonstante (pk_s) in dem Profil der Podsole verhältnismässig wenig, während der Sättigungsgrad sich innerhalb ziemlich weiter Grenzen ändert. Die Verringerung des Sättigungsgrades bringt die Schwächung des Acidoids mit sich (pk_s nimmt zu). Die pk_s-Werte zeigen bei der elektrodialytischen Entbasung des Tons dagegen sinkende Tendenz mit dem Sättigungsgrad. Gleichzeitig ist die Tatsache zu bemerken, dass die pk_s-Werte für Humus sich viel weniger ändern. Die erwähnten Effekte verursachen eine scheinbare Konstanz der pk_s-Werte in den oberen Horizonten des Podsols (siehe Tabelle 4, Nr. 10—27). Die entsprechenden pk_s-Werte näheren sich denjenigen des Humus (Tabelle 2 u. 3).

Die Streuung der Werte unter 75% kann sowohl durch die sehr wechselnde Intensität der Verwitterung des mineralischen Bodenkom-

plexes als auch durch das wechselnde Verhältnis zwischen den beiden Acidoiden (Ton und Humus) verursacht werden.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass es keine enge allgemeine Korrelation geben kann, die die Aufstellung einer Gleichung erlauben würde, durch welche die quantitativen Verhältnisse zwischen dem Sättigungsgrad und dem *pH*-Wert des Bodens ausgedrückt werden könnten.

TABELLE 4

Ergebnisse der Bestimmungen bei sämtlichen Bodentypen.

Bodenprofil	Tiefe cm.	*pH*	*T—S* m. äq.	*S* m. äq.	*T* m. äq.	*V* %	pk_s	*e* m. äq.	*a* %
1. Degradierter Tschernoziom *(Fundulea)*	0—20	6,67	4,2	26,8	31,0	86,5	5,87	0,25	6,0
	25—40	6,60	3,9	25,7	29,6	86,8	5,78	0,27	7,1
	60—70	7,20	3,1	26,4	29,5	89,5	6,27	0,10	3,4
	110—125	7,60	1,0	29,5	27,1	96,3	7,18	—	0,2
2. Degradierter Tschernoziom *(Drăgănești)*	0—16	5,85	9,5	29,1	38,6	75,4	5,36	1,17	12,3
	16—34	6,05	7,5	29,9	37,4	80,0	5,45	0,90	11,9
	34—52	5,80	10,2	31,5	41,7	75,7	5,33	1,71	16,7
	52—72	6,04	7,4	34,4	41,8	82,3	5,37	—	—
	72—92	6,70	4,5	36,2	40,7	89,0	5,80	—	—
	110—130	7,85	1,9	33,6	35,5	94,7	6,60	—	—
3. Rötliche Braunerde *(Băneasa)*	0—25	6,57	3,9	24,5	28,4	86,2	5,77	0,25	6,5
	40—70	6,55	4,3	25,9	30,2	85,6	5,77	0,40	9,4
	145—175	7,17	2,7	24,3	27,0	90,0	6,22	0,12	4,4
4. Rötliche Braunerde *(Moara Domnească)*	0—20	6,35	5,3	19,6	24,9	78,8	5,78	0,42	8,0
	60—80	6,52	4,1	25,4	29,5	86,1	5,73	0,28	6,8
	110—130	6,65	3,4	24,9	28,3	88,0	5,78	0,18	5,4
5. Rötliche Braunerde *(Snagov)*	0—20	6,06	5,1	19,1	24,2	78,9	5,49	0,87	17,1
	20—40	5,98	3,3	21,0	24,3	86,3	5,18	0,56	16,9
	50—70	6,20	2,2	24,7	26,9	91,8	5,15	0,43	19,8
	70—90	6,75	2,0	28,2	30,2	93,5	5,61	0,23	11,9
	110—130	7,50	1,2	31,2	32,4	96,4	6,09	—	—
	150—170	7,77	1,1	30,7	31,8	96,5	6,33	—	—
6. Muldenpodsol *(M. Domnească)*	0—15	5,90	5,5	9,0	14,5	62,0	5,69	0,86	15,7
	15—30	6,36	5,4	20,6	26,0	79,2	5,77	0,49	9,7
	50—70	6,02	5,2	21,9	27,1	80,9	5,40	0,59	11,4
	70—90	6,85	3,2	23,0	26,2	87,9	6,00	—	—
	100—120	6,65	3,7	18,7	22,4	83,5	5,95	—	—
	200—210	7,05	3,1	21,2	24,3	87,4	6,22	—	—
7. Muldenpodsol *(Snagov)*	0—13	5,85	5,4	12,6	18,0	70,2	5,49	1,05	19,5
	13—30	6,10	2,4	9,1	11,5	79,1	5,53	0,54	22,5
	30—53	6,20	4,2	15,4	19,6	78,7	5,63	0,81	19,6
	53—73	6,27	4,7	24,6	29,3	83,9	5,56	0,95	19,4
	73—93	6,36	4,5	27,8	32,3	86,1	5,57	0,89	19,7
	110—130	6,80	2,8	24,8	27,6	89,7	5,87	0,53	18,4
	190—210	6,95	2,4	22,9	25,3	90,5	5,98	0,34	13,2
	357—370	7,20	1,7	25,5	27,2	93,8	6,03	0,19	15,2
8. Mitteleurop. Braunerde (Cota 511 — *Sighișoara*)	0—20	5,70	8,1	20,2	28,3	70,5	5,31	1,16	14,3
	20—40	5,47	6,6	18,2	24,8	73,4	5,06	1,26	19,2
	40—60	5,90	5,5	20,4	25,9	79,1	5,34	0,80	14,7
	70—90	6,82	3,9	22,9	26,8	85,3	6,05	0,34	8,6

Fortsetzung

Bodenprofil	Tiefe cm	*pH*	*T–S* m. äq.	*S* m. äq.	*T* m. äq.	*V* %	pk_s	*e* m. äq.	*a* %
9. Mitteleurop. Braunerde *(D. Rusu)*	0—20	5,45	8,9	17,5	26,4	66,3	5,16	—	—
	20—40	5,15	10,7	14,1	24,8	57,0	5,13	—	—
	50—70	5,85	5,2	23,0	28,2	81,5	5,20	—	—
10. Unreifer Podzol *(Sig. Dealul Rusului)*	3—20	5,2	14,2	8,2	22,4	36,7	5,44	—	—
	30—50	5,7	8,0	20,0	28,0	71,4	5,30	—	—
	80—100	8,3	—	—	19,3	100	—	—	—
11. Unreifer Podsol *(Sig. Br. 1)*	0—25	6,6	5,8	13,7	19,5	70,2	—	0,53	9,2
	40—60	7,1	4,2	16,6	20,8	80,0	—	0,28	6,6
12. Unreifer Podsol *(Sigh. Br.)*	0—20	4,7	15,5	2,4	17,9	13,4	5,51	4,24	27,4
	20—35	5,0	13,2	5,1	18,3	27,9	5,41	4,12	31,3
	60—80	5,7	8,8	14,5	23,3	62,2	5,48	1,95	22,1
13. Unreifer Podsol *(Sig. Aluniș)*	0—15	4,72	13,2	2,8	16,0	17,5	5,39	4,54	34,5
	15—30	5,15	9,5	6,6	16,1	41,2	5,31	3,22	33,8
	50—70	5,72	4,6	16,5	21,1	77,8	5,17	1,45	31,6
14. Unreifer Podsol *(Sig. Br. 8)*	0—20	5,35	7,2	6,1	13,3	46,0	5,42	1,63	22,6
	20—40	5,47	6,4	6,8	13,2	51,5	5,45	1,57	24,5
	60—80	6,50	4,3	13,6	17,9	76,1	6,00	0,64	14,9
15. Sekundärer Podsol *(Biertan-Șaroș)*	0—2	4,7	9,9	3,1	13,0	23,9	5,21	—	—
	2—12	5,1	4,8	2,9	7,7	37,7	5,30	—	—
	12—27	5,3	3,5	3,4	6,9	49,2	5,32	—	—
	27—42	5,4	2,9	5,3	8,2	64,3	5,14	—	—
	42—50	5,6	5,6	14,9	20,5	72,7	5,16	—	—
	50—65	5,7	8,3	25,2	33,5	75,2	5,22	—	—
	65—80	5,8	6,9	26,2	33,1	79,1	5,22	—	—
	80—95	5,9	4,9	26,5	31,4	84,1	5,18	—	—
	100—120	6,3	3,3	26,8	30,1	88,8	5,40	—	—
	120—140	7,5	1,0	26,8	27,8	96,2	6,10	—	—
	140—160	7,6	1,0	27,1	28,1	96,5	6,18	—	—
16. Sekundärer Podsol *(Daneș)*	3—11	4,5	8,5	0,7	9,2	8,4	5,57	—	—
	11—22	4,8	5,2	1,6	6,8	27,3	5,30	—	—
	22—32	5,3	4,1	3,5	7,6	47,8	5,36	—	—
	35—55	5,4	10,3	17,7	28,0	64,3	5,16	—	—
	50—70	5,6	9,8	25,2	35,0	71,8	5,19	—	—
	70—90	5,8	7,2	26,7	33,9	79,0	5,23	—	—
	90—110	5,9	3,7	27,9	31,6	88,1	5,02	—	—
17. Sekundärer Podsol *(D. Boului)*	2—15	5,15	6,4	2,0	8,4	23,6	5,95	1,52	23,8
	20—40	5,23	5,1	1,3	6,4	20,4	6,08	1,28	25,1
	70—90	5,85	8,5	4,5	13,0	34,6	6,12	1,50	17,6
	180—200	6,75	3,8	12,7	16,5	76,9	6,23	0,30	7,9
18. Sekundärer Podsol *(Dealul Galben)*	2—17	4,78	8,5	1,6	10,1	12,1	5,65	3,30	38,9
	40—60	5,47	9,7	11,5	21,2	52,9	6,39	1,74	18,0
	70—90	6,02	5,5	18,4	23,9	76,5	5,50	1,12	20,2
	200—220	7,17	3,6	24,6	28,2	87,1	6,36	0,18	5,0
	280—290	7,92	3,4	25,3	28,7	88,3	—	0,15	4,4
19. Sekundärer Podsol *(Eichrücken)*	0—3	4,62	17,5	3,1	20,6	14,8	5,37	4,56	26,2
	3—20	4,85	10,3	0,6	10,9	5,1	5,08	2,47	24,0
	20—40	5,15	5,8	1,3	7,1	18,6	5,80	1,49	25,7
	40—55	5,20	5,9	5,2	11,1	47,0	5,24	1,87	31,8
	60—80	5,60	3,4	13,9	17,3	80,2	5,21	0,96	28,3

Fortsetzung

Bodenprofil	Tiefe cm.	*pH*	*T–S* m. äq.	*S* m. äq.	*T* m. äq.	*V* %	pk_s	*e* m. äq.	*a* %
20. Sekundärer Podsol *(Gelberberg-Jungkernberg)*	2—17	5,15	9,8	0,8	10,6	7,3	6,25	—	—
	17—42	5,35	6,8	1,4	8,2	16,5	6,05	—	—
	42—57	5,60	8,1	9,0	17,1	52,5	5,56	—	—
	57—72	5,72	9,2	16,3	25,5	64,0	5,47	—	—
	140—170	7,45	2,6	20,2	22,8	88,7	6,56	—	—
21. Sekundärer Podsol *(Aluniș)*	0—15	5,17	10,5	3,8	14,3	26,5	5,73	—	—
	15—30	5,35	7,3	2,8	10,1	27,5	5,77	—	—
	30—40	5,50	5,5	3,1	8,6	35,7	5,75	—	—
	70—90	5,80	5,2	13,2	18,4	71,8	6,20	—	—
22. Sekundärer Podsol *(Jungkernberg)*	2—20	5,25	6,8	4,1	10,9	37,5	5,45	—	—
	20—30	5,61	4,3	6,5	10,8	60,9	5,42	—	—
	30—60	5,70	3,9	9,6	13,5	71,1	5,31	—	—
	120—140	6,07	3,3	13,0	16,3	80,0	5,47	—	—
23. Sekundärer Podsol *(Vălcandorf)*	0—15	5,05	10,2	1,9	12,1	15,6	5,78	—	—
	15—30	5,30	7,4	3,1	10,5	29,7	5,68	—	—
	50—70	5,75	11,6	18,5	30,1	62,0	5,55	—	—
	120—140	6,5	3,9	22,8	26,7	85,5	5,73	—	—
24. Alpine Braunerde *(P. Arsă — C. Peleș)* .	0—15	4,23	36,8	4,9	41,7	11,7	5,11	—	—
	5—15	4,40	30,9	2,8	33,7	8,3	5,44	—	—
	15—30	4,77	30,8	2,7	33,5	8,0	5,83	—	—
	30—40	4,95	21,8	1,3	2,31	5,6	6,17	—	—
	40—50	4,95	12,7	2,8	15,5	18,0	5,60	—	—
	50—60	5,05	10,6	2,2	12,8	17,2	5,73	—	—
25. Primärer Podsol *(unter Az. Procumbens)*	0—10	4,25	24,1	3,3	27,4	12,0	5,11	—	—
	10—15	4,45	6,1	0,9	7,0	12,9	5,28	—	—
	15—20	4,75	42,4	3,7	46,1	8,0	5,80	—	—
	20—30	4,93	38,5	3,8	42,3	9,0	5,90	—	—
	30—40	5,15	25,7	2,9	28,6	10,2	6,11	—	—
	50—60	5,40	7,2	1,8	9,0	20,0	6,10	—	—
26. Prim. Podsol *(Furnica — V. cu dor)* . . .	0—5	4,47	13,8	1,7	15,5	11,0	5,36	—	—
	5—20	4,45	15,0	1,2	16,2	7,4	5,54	—	—
	20—26	4,83	41,8	3,0	44,8	6,7	5,68	—	—
	26—36	4,95	28,6	2,5	31,1	8,0	6,01	—	—
	35—45	5,05	14,0	1,8	15,8	11,8	5,76	—	—
	50—60	5,17	8,6	2,2	10,8	20,3	5,76	—	—
27. Primärer Podsol *(C. Ciocârliilor)*	0—12	4,40	9,64	0,98	10,6	9,2	5,39	—	—
	12—22	4,30	26,6	1,50	28,1	5,4	5,55	—	—
	22—32	4,70	20,4	1,59	2 ,0	6,9	5,83	—	—
	32—42	4,90	8,35	1,66	10,0	16,6	5,60	—	—
	50—60	5,15	5,20	1,65	6,9	24,1	5,65	—	—

DIE WASSERSTOFFIONENKONZENTRATION UND DIE EFFEKTIVE AZIDITÄT

Wir haben nach der von F. W. Parker (13) beschriebenen Methode die Avidität des Wasserstoffs für einen Teil der untersuchten Profile bestimmt. Die erhaltenen Werte zeigen, dass sich die Avidität innerhalb weiter Grenzen ändern kann. Als allgemeine Regel fällt die Avidität

mit dem Ansteigen des Dissoziationsgrades. Wie erwähnt, stellt die Avidität denjenigen Prozentsatz der Gesamtwasserstoffmenge dar, die ausgetauscht wird, wenn dem Boden eine Lösung zugesetzt wird, die eine dem Wasserstoffgehalt des Bodens äquivalente Menge von CH_3COOK enthält. Die absolute Menge des unter diesen Bedingungen ausgetauschten Wasserstoffs führt, für 100 g Boden, den Namen «*Effektive Azidität*». Mit anderen Worten

$$Avidität = \frac{Effektive\ Azidität}{T - S} \times 100.$$

Die «*effektive Azidität*» ist demnach von der Menge des austauschbaren Wasserstoffs im Boden und von der Dissoziationsfähigkeit dieses Wasserstoffes abhängig, welch letztere wieder durch die Natur des Acidoids und den Sättigungsgrad bedingt wird.

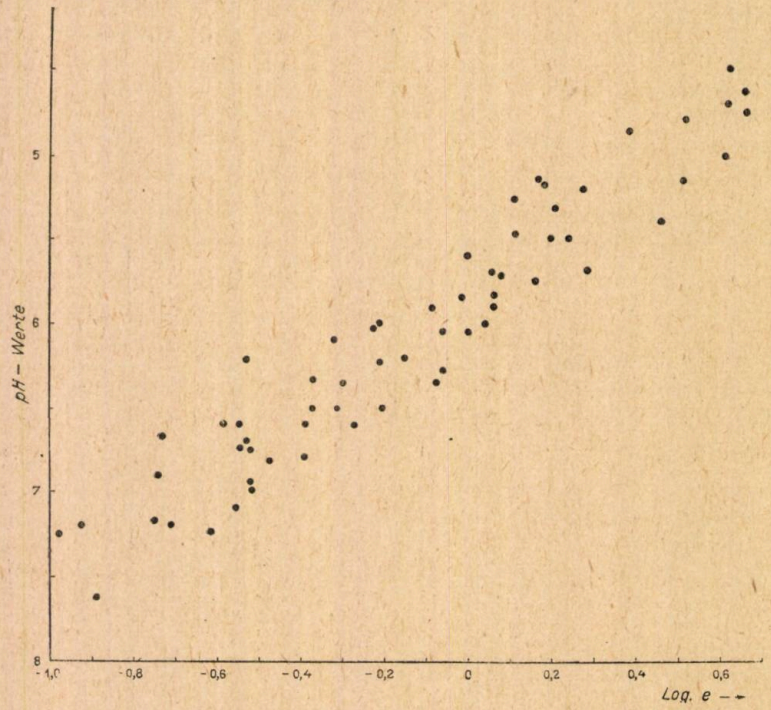


Fig. 2. — Zusammenhang zwischen dem Logarithmus der «effektiven Azidität» und den *pH*-Werten.

Wenn die Wasserstoffionenkonzentration der Bodenlösung durch das Zusammenwirken aller dieser Elemente (Gesamtmenge des austauschbaren Wasserstoffs, Dissoziationskonstante des Acidoids und Sättigungsgrad) bestimmt wird, so ist es natürlich, dass zwischen der effektiven Azidität und der Wasserstoffionenkonzentration eine Beziehung bestehen muss. In Fig. 2 kann gesehen werden, dass, zwischen den

Werten -log $[H] = pH$ und *log (Effektive Azidität)*, obwohl die Streuung der Punkte des Diagrammes sehr gross ist, ein linearer Zusammenhang klar in Erscheinung tritt. Die Streuung wird durch die experimentellen Schwierigkeiten bei der genauen Bestimmung der effektiven Azidität verursacht. Die Zeitspanne von einigen Monaten, die zwischen der Feststellung der Werte S, $T - S$ und pH und der Bestimmung der «*effektiven Azidität*» verstrichen war, konnte Veränderungen in den Dissoziationsbedingungen des Wasserstoffes verursachen. Die Messung der pH-Werte wird auch durch die Bodensuspension beeinflusst (Sogenannter Suspensionseffekt, H. PALLMANN (12).

Die erwähnte Beziehung zwischen pH und dem *log (Effektive Azidität)* berechtigt uns zu der Annahme, dass die Wasserstoffionenkonzentration der Bodenlösung qualitativ den Gesetzen des Kationenaustausches folgt. Die Ionen des Wassers treten mit den im Boden adsorbierten Kationen in Austausch, das so entstandene Austausch-Gleichgewicht bestimmt nun die Wasserstoffionenkonzentration in der wässerigen Bodenlösung [1]).

Infolge der sehr schwachen Dissoziation des Wassers spielen nur jene Kationen des Bodens die Hauptrolle, die eine bestimmte «Aktivität» aufweisen. Es ist dies die «leicht austauschbare Fraktion» T. SAIDEL's (15). Die anderen, schwerer disoziierbaren Kationen, oder diejenigen, die in der Struktur des Acidoids dem Austausch schwer zugängliche Lagen einnehmen, haben nur einen sehr geringen Einfluss. Diese Tatsache erklärt uns, warum ein längeres Aufbewahren in trokkenem Zustand eine Änderung des pH-Wertes zur Folge hat und zugleich die praktische Unmöglichkeit, den gesamten adsorbierten Wasserstoff mit einem Acetat bei gewöhnlicher Temperatur zu entfernen.

---

[1]) Nach den allgemeinen Gesetzen des Kationenumtausches führt das Umtauschgleichgewicht zwischen den im Boden sich befindlichen Kationen und denjenigen des Wassers zu folgender Gleichung (A. P. VANSELOW, 19):

$$\left[\frac{C_H}{C_{OH}}\right]_L = k' \left[\frac{T-S}{S}\right]_B$$

da:

$$C_{OH} = \frac{10^{-14}}{C_H}$$

$$C_H^2 = 10^{-14} \cdot k' \left[\frac{T-S}{S}\right]_B$$

oder:

$$pH = pk_s + \log \frac{S}{T-S}$$

man erhält letzten Endes die logarithmisierte Form der Puffergleichung wieder.

Die «effektive Azidität» kann demnach ein Mass für die «aktive Fraktion» des Verhältnisses $\left[\frac{T-S}{S}\right]$ bilden.

SCHLUSSFOLGERUNGEN

1. Im Vorhergehenden wird der Parallelismus zwischen dem Sättigungsgrad und der Wasserstoffionenkonzentration (*pH*) der Bodenlösung diskutiert. Es wird gezeigt, dass die Pufferungsgleichung höchstens qualitativ die Gleichgewichte bezeichnen kann, welche die Wasserstoffionenkonzentration des Systems Wasser-Boden bestimmen.

2. Durch stufenförmige Entbasung eines Lehmes aus dem *B*-Horizont eines rötlichbraunen Waldbodens und durch Messung der entsprechenden *pH*-Werte bei verschiedenen Sättigungsgraden wurde die Kurve der Fig. 1 erhalten. Die für k_s erhaltenen Werte sind nicht konstant, im Allgemeinen wachsen sie mit dem Grad der Entbasung.

3. Durch stufenförmiges Neutralisieren einer Probe aus dem *B*-Horizont eines alpinen Podsols, der reich an Humus und praktisch frei von Ton war, wurde die Kurve erhalten, die die Abhängigkeit des Sättigungsgrades vom *pH*-Wert beim Humus wiedergibt.

4. Der Vergleich der erhaltenen Werte für den Sättigungsgrad und für *pH* mit den Neutralisierungs-und Entbasungskurven des Humus und des Tons ergibt bei sämtlichen natürlichen Böden:

Die einem *pH*-Wert >6 (Sättigungsgrad $>75\%$) entsprechenden Punkte zeigen die Tendenz, der bei der Entbasung des Tones erhaltenen Kurve zu folgen. Die einem *pH*-Wert <6 (Sättigungsgrad unter 75%) entsprechenden Punkte entfernen sich von der Tonkurve, streuen sehr stark und zeigen die Tendenz, sich der Neutralisierungskurve des Humus zu nähern und ihr zu folgen.

5. Es wird die Deutung dieser Regelmässigkeit diskutiert. Bei einem Sättigungsgrad $>75\%$ haben wir es mit Böden zu tun, in denen der Einfluss des Tones, der mit 60—100% an der Austauschkapazität teilnimmt, überwiegt. Da auch das Pufferungsvermögen des Tones in diesem Intervall grösser als das des Humus ist, so trachten die erhaltenen Punkte der Entbasungskurve des Tones zu folgen.

Da mit steigender Entbasung eine Dispersion und Migration des Tones im Boden stattfindet, beginnt das organische Acidoid (Humus) über das mineralische (Ton) zu überwiegen. Zugleich ist bei einem Sättigungsgrad unter 75% die Pufferung des Humus grösser als diejenige des Tones, sodass logischerweise die erhaltenen Werte der Entbasungskurve des Tones zu folgen trachten. Hinzu kommt noch die Tatsache,

dass die Entbasung die Verwitterung und damit die Schwächung des Ton-Acidoids bewirkt.

Die scheinbare Dissoziationskonstante (pk_s) zeigt für die auf Löss aus der Serie: degradierter Tschernosiom und rötliche Braunerde gebildeten Böden ($V = 75—85$), Werte, die von dem Wert 5,8 sehr wenig abweichen. Dagegen schwanken die pk_s-Werte für die auf tertiärem Sandstein aus der Serie: degradierte Braunerde-sekundärer Podsol ($V = 15—65$) um einen Mittelwert von 5,5, zwischen 5,1—5,7. Der mittlere pk_s-Wert entspricht dem für denselben V-Intervall bei Humus berechneten pk_s-Wert (Siehe Tabelle 3).

6. Es wird gezeigt, dass zwischen dem log (effektive Azidität) und den pH-Werten eine durch einen linearen Zusammenhang ausgedrückte Beziehung besteht. Die Wasserstoffionenkonzentration der Bodenlösung wird also von denselben Gesetzen bestimmt, welche den Kationenaustausch beherrschen. Die Ionen des Wassers treten mit den adsorbierten Bodenkationen in Austausch; das Austauschgleichgewicht bestimmt die Wasserstoffionenkonzentration der wässerigen Bodenlösung.

BIBLIOGRAPHIE

1. BRADFIELD, R., 1923, The nature of the acidity of the colloidal clay, *Journal of Am. Chem. Society.*
2. BRAY, R. H. and de TURK, F. E., 1931, Field methods for lime requirement of soils. *Soil Science*, Bd. 32: 329—341.
3. BAYER, L. D. and SCARSETH, G. D., 1931, Nature of soil acidity as affected by the SiO_2: R_2O_3-Ratio, *Soil Science*, Bd. XXXI: 159—173.
4. CERNESCU, N. C., 1939, Die Austauschkap. und die austauschfähigen Kationen des Bodens (Methoden). *Inst. Geol. al Rom., Studii technice şi Econom., Seria C* 5.
5. — 1939, Die Austauschkap. des Bodens im Verhältnis zum Ton und Humusgehalt. *(Studii techn. şi Econ.), Seria C* 6.
6. — 1940, Die Austauschfähigen Kationen in den Profilen der zonalen Bodentypen, *Annal. Fac. Agron. Buc.*, V. I (1939/1940): 21—33.
7. DI GLERIA, J. und KOTZMANN, L., Ungesättigkeit der Böden vom Standpunkte der Kolloidlehre. *Verhandl. der II-ten Komm. der Intern. Bodenkundl. Gesellsch. Kjöbenhavn*: 79—92.
8. KOLTHOFF, I. M., Concentration des ions d'hydrogèn. Gauthier-Villars, Paris 1926.
9. MATTSON, S., 1932, Amphoteric reactions and isoelectric weathering, *Soil Science* XXXIV: 209—240.
10. MATTSON, S., 1937, Colloidal electrolytes, *Soil Science*, 43: 421—452.
11. ODÉN, SVEN., 1919, Die Huminsäuren, *Koll. Beihefte*, Bd. XII: 75—260.
12. PALLMANN, H., 1931, Wasserstoffaktivität in Dispersionen und kolloiddispersen Systemen, *Kolloid Beihefte*, 30: 334—405.

13. PARKER, F. W., 1927, Methodes for the determination of the amount and acidity of exchangeable hydrogen in Soils. *Proc. of First Intern. Congress of Soil Science, II Comm., Washington*: 164—174.
14. PIERRE, W. H. and SCARSETH, G. D., 1934, Percentage base saturation of Soils, *Soil Science*, XXXI: 99—113.
15. SAIDEL, T., 1931, Über die Lösungsgesetzmässigkeiten von Bodenbestandteilen, *An. Inst. Geol. al Rom.*, XVI: 752—755.
16. SCHEELE, W., 1937, Beiträge zur Charakterisierung natürlicher Humusstoffe, *Koll. Beihefte*, Bd. 46: 369—424.
17. TIDMORE, J. W. and PARKER, F. W., 1924, Methodes of studying the strength of soil acids, *Soil Science*, 18: 331—338.
18. VAGELER, P., Kationen und Wasserhaushalt des Mineralbodens. Berlin (J. Springer), 1932.
19. VANSELOW, A. P., 1932, Equilibria of base exchange reactions, *Soil Science*, 33: 95—113.

631.6 SOLS

WIEDERHOLTE BODENAUSZÜGE MITTELS ULTRAFILTRATION

von **Const. D. Chiriță**

In der modernen chemischen Bodenuntersuchung ist die Feststellung der Basensättigungsverhältnisse des Bodens Gegenstand der Hauptbeschäftigungen geworden.

Für die quantitative Bestimmung der austauschbaren Bodenkationen und die Verfolgung ihrer Lösungs- und Austauschgeschwindingkeit hat sich die Methode der wiederholten Bodenauszüge als äusserst geeignet erwiesen.

Die Methode wurde erst von ULBRICHT (6) bei Bodenuntersuchungen benutzt, von SAIDEL (2) wissenschaftlich aufgebaut und in die moderne Bodenkunde eingeführt. In einer Reihe von Arbeiten haben SAIDEL (3, 4, 5) und seine Mitarbeiter vom Geologischen Institut sowie vom Landwirtschaftlichen Institut Rumäniens, die Tecknik der Methode und die mathematischen Gesetzmässigkeiten der wiederholten Auszüge vervolkommnet.

Bei dieser Methode wird eine bestimmte Bodenmenge mit einem bestimmten Volumen einer Salzlösung (Alkali- oder Ammoniumazetat, Ammoniumchlorid u. a.) bestimmter Konzentration versetzt und die Mischung solange umgerührt oder geschüttelt, bis das Austauschgleichgewicht eingestellt ist. Nach Klärung der Suspension, wird ein aliquoter Teil (meistens 2/3 oder 3/4) von der Flüssigkeit abpipetiert. Das abpipetierte Flüssigkeitsvolumen wird mit einem neuen, gleichen Volumen von derselben Salzlösung ersetzt, welche zum ersten Auszug benutzt worden ist. Es wird wieder umgerührt oder geschüttelt und nach Klärung der Suspension, wird wie früher, ein neuer aliquoter Teil der Lösung abpipetiert. Diese Operationen werden 5—7 mal ausgeführt und so

wird eine Reihe von wiederholten Bodenauszügen erhalten. In diesen Auszügen werden die austauschbaren Bodenkationen quantitativ bestimmt.

Die Gesamtmenge eines austauschbaren Kations wird mittels SAJDELSCHEN Formeln berechnet oder mittels graphischer Extrapolierung nach PAVLOVSCHI (1) festgestellt. Die Klärung der Bodenauszüge wird mittels Sedimentierung in Glaszilinder oder durch Zentrifugierung erhalten.

Die Klärung mittels Sedimentierung dauert lange (24 Stunden für jeden Auszug, also 6 Tage für 6 wiederholte Auszüge) und ist sehr oft von strörenden Sekundärreaktionen und von Gärungsvorgängen begleitet.

Die Klärung mittels Zentrifugieren verkürzt die Klärungsdauer auf 3 Minuten für jeden Auszug, so dass eine Reihe von 6 wiederholten Auszügen in 5 Stunden ausgeführt werden kann.

Für die Klärung der Bodenauszüge mittels Zentrifugieren ist eine grosse elektrische Zentrifuge mit 4 oder 6 Bechern zu 100 cm^3 und 5000—6000 Touren in der Minute notwendig. Die ständige Mischung des Bodens mit der Salzlösung wird 20 Minuten lang in den Zentrifugiergläsern, mittels eines von einem elektrischen Motor betriebenen Dreher ausgeführt.

Der Nachteil der Klärung mittels Zentrifugieren besteht in der Schwierigkeit des Wiederdispergieren des zentrifugierten Bodens, welcher am unteren Teil der Gläser gepresst und angeklebt ist (besonders stark bei tonigen Böden).

Im bodenkundlichen Laboratorium der *Technischen Hochschule* und des *Forstlichen Institutes Rumäniens* wurde neulich ein anderes Verfahren zur schnellen Erhaltung von klaren Bodenauszüge aufgebaut. Bei diesem Verfahren wird das Zentrifugieren der Bodensuspension durch Ultrafiltration ersetzt.

Die Technik des Verfahrens. Es werden Glas -oder Porzellantrichter nach Büchner, Porzellannutschen mit Siebschale oder mit auswechselbaren Siebplatten oder sogenannte Ultrafiltertrichter benutzt. In diesen Trichtern oder Nutschen werden Membranultrafilter nach BECCHOLD oder von uns vorbereitete Ultrafilter eingesetzt. Solche Ultrafilter werden aus Weissbandpapierfilter SCHLEICHER & SCHÜLL, welche kurz in 2,5 prozentiger Zelluloidlösung in Azeton eingetaucht werden, sehr leicht im Laboratorium vorbereitet. Das Fixieren der Papierultrafilter an Büchnerschen Trichtern wird am besten mit ein wenig Hahnfett erreicht, mit welchem die Filterränder auf 0,5 cm Breite fein angeschmiert werden. Die mit Ultrafiltern versehenen Trichter werden an

Saugflaschen für quantitative Analyse nach KÜHL dicht montiert (fig. 1).

Der Boden und die Salzlösung werden in diese ultrafiltrierenden Trichter eingeführt, wo die Suspension mechanisch oder besser mit der Hand — bei Benutzug einer Gummifahne (eine kleine Gummipalette an der Spitze eines Glasstabes fixiert) — umgerührt wird.

Nach 20 Minuten langer Umrührung wird Vakuum eingestellt und die ganze Flüssigkeitsmenge durch die Ultrafilter gesaugt (der Boden hält an sich eine kleine, seiner minimalen Wasserkapazität entsprechende Flüssigkeitsmenge).

Die Ultrafiltration der Bodenauszüge dauert nicht länger als 1—2 Minuten und wenn die Ultrafilter gut vorbereitet wurden, sind die Auszüge ausgezeichnet klar.

Wenn mit kleinen Bodenmengen und grossen Flüssigkeitvolumina gearbeitet wird (Z. B. 10 g. Boden : 100 cm^3 Salzlösung), wird auf diese Weise bei jedem Auszug praktisch das ganze Flussigkeitsvolumen erhalten, während beim Sedimentieren- und beim Zentrifugierenverfahren nur eine Fraktion desselben erhalten werden kann.

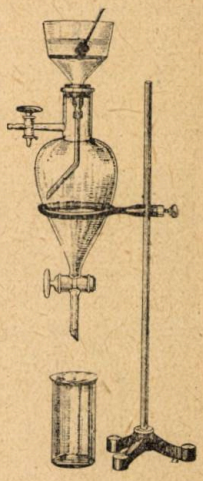


Fig. 1. Glastrichter nach Büchner, mit Papierultrafilter, an der Saugflasche nach Kühl montiert.

Auch wenn die vom Boden festgehaltene Flüssigkeitsmenge nicht vernachlässigt werden kann (beim Arbeiten mit grösseren Bödenmengen), da diese von einem Auszug zum nachfolgenden immer im Boden bleibt, wird kein Fehler gemacht, wenn diese Flüssigkeitsmenge doch vernachlässigt wird und die Gesamtmenge des betreffenden Kations graphisch festgestellt wird.

Nach jedem Auszug wird das zu Anfang gebrauchte Flüssigkeitsvolumen wieder in die Trichter gebracht. Der am Ultrafilter angeklebte Boden wird leicht mit der Gummifahne gehoben und die Suspension wieder 20 Minuten umgerührt.

Die Trichter- und Ultrafiltergrösse kann verschieden, und zwar nach der Boden- und Flüssigkeitsmenge, gewählt werden.

Für die Arbeit im Serienbetriebe werden 4 Ultrafiltertrichter benutzt, deren Saugflaschen mit einer einzigen gemeisamen Saug(Vakuum)-flasche verbunden werden (Fig. 2). So kann ein einziger Arbeiter die wiederholten Auszüge mittels Ultrafiltration für 4 Böden in 3 Stunden ausführen. Wenn die Umrührung der Suspension mit der Hand ausgeführt wird, dann rührt der Arbeiter gleichzeitig mit beiden Händen die Suspensionen von zwei Trichtern um und kommt ständig von einem

Trichterpaar zum anderen. Diese Umrührungsart hat sich der mechanischen gegenüber als einfacher bewährt und für die Sicherung eines vollkommenen Kationenumtausches als einwandfrei erwiesen.

Das oben beschriebene Verfahren zeigt folgende Vorteile:

1. Es gestattet eine schnelle Erhaltung von sehr klaren Bodenauszügen im Serienbetriebe, u. zw. ohne kostspielige Einrichtungen zum Zentrifugieren und mechanischem Umrühren.
2. Die Experimentalfehler sind minimal.
3. Die Berechnungen werden vereinfacht, da jedes Mal praktisch die ganze Auszugsmenge erhalten wird.

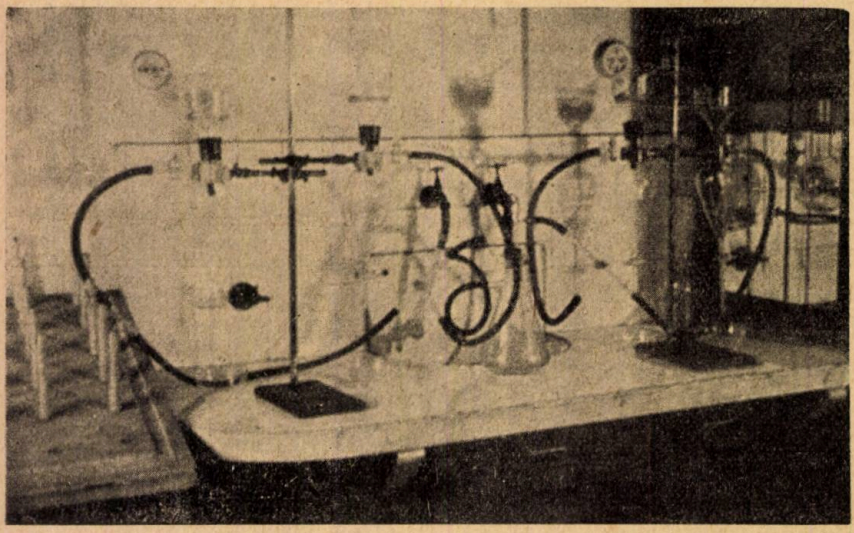


Fig. 2. Einrichtung zur gleichzeitigen Erhaltung der wiederholten Auszüge von 4 Böden mittels Ultrafiltration.

Das Verfahren wurde von uns besonders zur Bestimmung der austauschbaren *H*-Ionen (Sättigungsdefizit des Bodens), beim Benutzen der normalen *K*-Azetatlösung von *pH* 8,3 angewandt. Um ein intensiveren Umtausch zu erhalten, haben wir mit je 5 g Boden und 50 cm^3 Azetatlösung gearbeitet — also war das Verhältnis Boden : Lösung gleich 1 : 10.

Die graphische Darstellung der Ergebnisse zur Feststellung durch Extrapolierung der Gesamtmenge austauschbarer *H*-Ionen (fig. 3) hat gezeigt dass nur die Ergebnisse der Auszüge Nr. 3, 4, 5, 6 sich auf einer Geraden befinden, also, dürfte man annehmen dass beim III-ten Auszug nur die schwer austauschbaren *H*-Ionen nach SAIDELS Gesetz in Lösung zu gehen anfangen. Das Befinden der Ergebnisse der

wiederholten Bodenauszüge Nr. 3, 4, 5, 6 auf einer Gerade bestätigt die Korektheit der Arbeit nach dem Ultrafiltrationsverfahren.

AUSTAUSCHBARE *H*-IONEN

in wiederholten Bodenauszüge mittels Ultrafiltration bestimmt

Boden	Milliäquiv. *H*-Ionen im Auszug								Gesamt-austauschbarer Wasserstoff T — S
	I a_1	II a_2	III a_3	IV a_4	V a_5	VI a_6	VII a_7	VIII a_8	
Munteni (Tschernosiom) . . .	0,92	0,26	0,10	0,08	0,065	0,05	—	—	1,68
Săveni (Tschernosiom) . . .	0,83	0,30	0,125	0,10	0,08	0,06	0,04	0,03	1,69
Lehliu (Degradierter Tschernosiom. Horiz. B) .	1,04	0,38	0,21	0,17	0,14	0,115	0,095	0,08	2,58
Blebea-Valul lui Traian (Degradierter Tschernosiom. Horiz. B) .	1,19	0,39	0,19	0,13	0,085	0,055	—	—	2,14
Ţigănesti (Rötliche Braunerde) .	1,11	0,40	0,24	0,18	0,11	—	—	—	2,34
Pantelimon (Schwach podzolierte rötliche Braunerde).	2,40	0,76	0,34	0,26	0,22	0,17	—	—	4,80

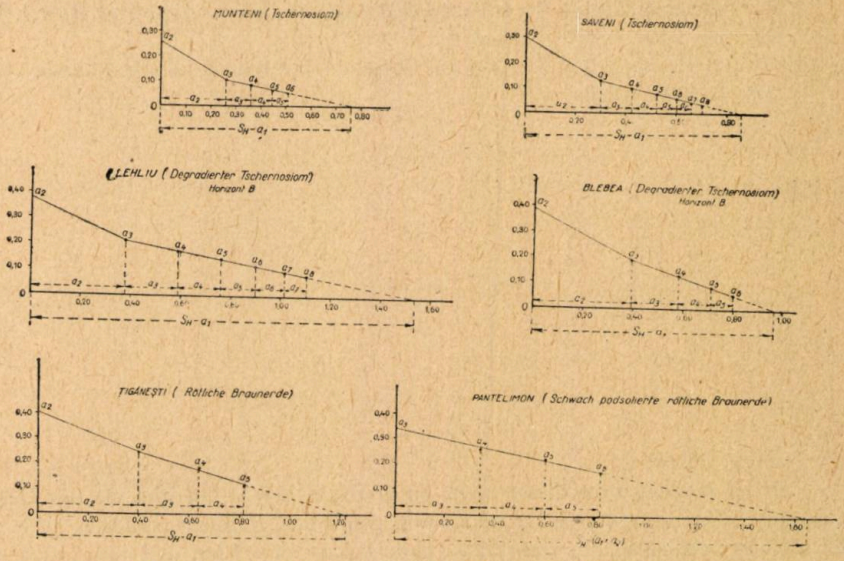


Fig. 3. Darstellung der Ergebnisse zur Feststellung der Gesamtmenge austauschbarer H-Ionen mittles graphischer Extrapolierung.

Bei manchen saueren Waldböden haben wir festgestellt dass auch beim III-ten Auszug noch ein Mehr an *H*-Ionen in Lösung geht [1]), also nur die Ergebnisse der Auszüge Nr. 4, 5 und 6 sich auf einer Gerade befinden.

Die dargestellten Zahlen und die Graphischen zeigen dass — mindestens für die *H*-Ionen —, 5—6 wiederholten Bodenauszüge als genügend zu betrachten sind -und zwar, im I-ten und II-ten Auszug gehen neben schwer austauschbaren auch alle leichtaustauschbare *H*-Ionen in Lösung, während die Ergebnisse des III-ten und IV-ten Auszuges — die Gerade auf welcher alle Ergebnisse sich befinden sollen, bestimmen; die Ergebnisse des V-ten und VI-ten Auszuges dienen als Kontrollpunkte dieser Eigenschaft der erhaltenen Gerade.

LITERATUR

1. PAVLOVSCHI, GH., Eine neue graphische Deutung der Ergebnisse von wiederholten Auszügen der Kationen aus Permutit *(An. Inst. Cercet. Agron. al Rom.)* (1934), București.
2. PAVLOVSCHI GH. et MAVRODINEANU R., Contribution à l'étude des bases déplaçables *(An. Fac. d'Agr. de Buc.)* (1940).
3. SAIDEL, T., Contributions à la connaissance des extractions aqueuses des sols. *Comptes-Rendus des Séances de l'Institut Géologique*, 10 (1921), București, 1926.
4. SAIDEL, T. STANCOVICI, P., Die Anwendbarkeit der « *S* » Beziehungen bei der Untersuchung des Lösungsvorganges von Bodensubstanzen *(Ann. Inst. landw. Forsch. v. Rumänien)* (1930).
5. SAIDEL, T. et PAVLOVSCHI, GH., Solubilisation et adsorption du potassium et de l'acide phosphorique du sol *(Analele Inst. de Cercet. Agron. al Rom.)*. Vol. IX, an. VIII (1937), București.
6. ULBRICHT, R. (Dr.), Ein Beitrag zur Methode der Bodenanalyse *(Landw. Vers. Stat.)*, 5200, 1863.

[1]) Es ist möglich dass dieses Mehr an *H*-Ionen des II-ten und oft des III-ten Auszuges nicht ganz von noch in Lösung gehenden *H*-Ionen, sondern auch von der kleinen Lösungsmenge verursacht wird, welche vom I-ten und vom II-ten zum III-ten Auszug vom Boden festgehalten wird.

669:9 HISTOIRE DE LA MÉTALLURGIE

TOPITOARELE DELA BAIA-DE-ARAMĂ DIN TIMPURI PREISTORICE PÂNĂ LA SFÂRŞITUL SEC. XVII

de Ing. **Al. Ostaşco**
Directorul Muzeului Industrial

Regiunea dintre Carpaţii Nordici şi Marea Egee, Nistru şi Adriatică cuprindea spre sfârşitul mileniului al III-lea a. Cr. spaţiul unei civilizaţii neolitice. După datele arheologice, această civilizaţie pare a fi locală, complet independentă de civilizaţiile vecine dela Nord şi dela apus, întreţinând însă legături cu lumea egeeană şi asiatică [1]).

Datorită faptului că în această regiune erau localităţi bogate nu numai în minereuri de cupru, dar şi în cupru nativ [2]), această civilizaţie a trecut dela neolitic la epoca bronzului prin perioada, relativ scurtă, a cuprului, în care o parte din scule şi arme se făceau din acest metal, precum s'a dovedit din mai multe obiecte găsite în această regiune. Prin perioada de cupru au trecut nu numai civilizaţiile din Europa [3]), dar şi în Asia. Aşa, bunăoară, civilizaţia din Nordul Indiei a trecut prin această perioadă, pe când în Sudul Indiei neoliticul a trecut direct în epoca fierului [4]).

Analizele făcute în 1912 în laboratorul Institutului de analize chimice al fostei Şcoli de Poduri şi Şosele probelor luate dela câteva obiecte de cupru găsite în Oltenia şi Muntenia, aparţinând, probabil, perioadei de cupru, au dovedit că, ţinând seama de impurităţile constatate, şi anume

---

[1]) HAMPEL J., Neuere Studien über der Kupferzeit, *Zeitschrift fur Ethnologie*, 28 (1896), p. 91.

[2]) *Ibid.*, p. 83.

[3]) DUNĂREANU-VULPE EC., Sull'origine e l'evoluzione delle scuri di rame carpato-danubiane, *Ephemeris Dacoromana*, IV, p. 181.

[4]) DAS SANTOSH KUMAR, The economic history of ancient India. Calcutta, 1925. Cap.: *The Cooper Age*.

cele care nu conțineau argint, cuprul provenea din zăcămintele de cupru din regiunea *Băii-de-Aramă* de astăzi, iar cele cu argint, din Transilvania [1]).

Cuprul nu putea să înlocuiască silexul pentru fabricarea multor scule ale neoliticului, ci numai aliajul lui cu staniul — bronzul, a adus schimbări adânci în viața societății de atunci.

Trecerea spre epoca bronzului, făcută lent și treptat, se datează pentru regiunea carpato-dunăreană cam pe la începutul mileniului al II-lea.

Această trecere nu a făcut să dispară toate formele din perioada de cupru. Ele au supraviețuit nu numai epoca bronzului, dar și următoarele, ajungând până în zilele noastre [2]): ceaune, tăvi, tigăi ieșite din mâinile arămarilor, în deosebi a celor din peninsula Balcanică, mai păstrează încă materialul, forma și modul de a fi lucrate din timpuri îndepărtate.

Analizele făcute odată cu cele de mai sus, cu probe provenite din obiecte de bronz găsite în *Oltenia* și *Muntenia*, au arătat că și în această epocă au continuat exploatările minereurilor dela *Baia-de-Aramă* și prin urmare obiectele erau fabricate aci, nu erau importate [3]).

Judecând după numărul relativ mic al obiectelor găsite în Dacia, PÂRVAN a exprimat părerea că întrebuințarea bronzului aci a fost limitată, el întrebuințându-se numai la arme și podoabe, și aceasta numai pentru clasa superioară [4]); însă semnalează că secera, « o singură unealtă se găsește în cantități enorme în depozitele vârstei de bronz » [5]). DÉCHELETTE, bazându-se pe acest fapt, presupune că secera este o invenție a Tracilor Nordici [6]).

Și această civilizație carpato-dunăreană « frumoasă și originală cultură a bronzului » cum o numește PÂRVAN [7]), păstrează trăsăturile caracteristice semnalate mai sus pentru epoca neolitică, pe care le transmite și epocei de fier [8]).

---

[1]) NICOLESCU-OTIN C., Contribuțiuni la metalurgia antică a cuprului în Țările locuite azi de Români. Buc., 1913, *passim*.

[2]) HAMPEL J., op. et loc. cit., cf. ANDRIEȘESCU I., Asupra epocei de bronz în România, *Bul. Com. Mon. Ist.*, 8 (1915), p. 159.

[3]) NICULESCU-OTIN C., *op. cit.*, *passim*; ANDRIEȘESCU, *op. cit.*, p. 157 și o rectificare în nota 4, p. 163. *Ibid.*, Nouvelles contributions sur l'âge du bronze en Roumanie, *Dacia*, II, 1925, p. 384.

[4]) *Getica*, p. 294.

[5]) *Op. et loc. cit.*

[6]) *Manuel d'archéologie gallo-romaine*, Paris. Vol. II, p. 17.

[7]) *Getica*, p. 648.

[8]) DUNĂREANU-VULPE EC., *Considérations sur certains formes caractérisant l'âge du bronze de l'Europe sud-orientale*. Paris, 1930, p. 4 și 56.

Deşi neavând deocamdată dovezi directe că regiunea *Baia-de-Aramă* a fost exploatată şi în întreg decursul mileniului I, nimic nu se opune să admitem că o parte din obiectele fabricate din aramă sau bronz în regiunea carpato-dunăreană erau fabricate din cupru din zăcămintele *Mehedinţului* de azi. Şi aceasta, cu atât mai mult, cu cât poporul care a creat civilizaţiile anterioare a rămas acelaş: Tracii Nordici, cunoscuţi în acest mileniu sub numele Geţi şi Daci [1]), care a păstrat individualitatea lui etnică în împrejurările turburi din timpul migraţiunii popoarelor.

Presupunem o întrerupere a activităţii metalurgice între secolul VIII—VI, când Dacia a fost adusă în sărăcie şi decadenţă în timpul dominaţiei Sciţilor, acestei calamităţi a Dacilor, cum o numeşte PÂRVAN. După ce aceşti năvălitori au fost absorbiţi în parte de populaţia autohtonă sau alungaţi, a urmat o « reînnoire şi întărire pe toate terenurile a Dacilor » prin venirea Celţilor, acestor « mari făurari ai Europei în epoca fierului », aducând cu ei un nou material civilizator şi industrial — fierul [2]).

Spre sfârşitul mileniului, o parte din arme, ca şi alte obiecte, se mai confecţionau încă din bronz şi dacă se va lua în consideraţie că armata lui BUEREBISTA, a acestui mare unificator al Dacilor, se ridica la 200.000 ostaşi [3]), va fi greu de presupus că acest mare organizator nu ar fi reluat lucrul şi în minele de aramă, dacă el ar fi fost întrerupt înaintea lui.

Bronzul, fiind în fine scos din atelierele de arme ca material principal, minele de aramă, mai ales cele de pe malul Motrului, nu au putut să servească pe restauratorul Statului dacic — DECEBAL — în pregătirile lui pentru lupta eroică contra năvălitorilor romani.

Pentru epoca daco-romană nu cunoaştem nicio ştire literară despre exploatarea minelor de aramă [4]), dar aceasta nu înseamnă că aceste exploatări nu existau; oare nu ştim despre exploatarea unei mine de fier numai dintr'o singură inscripţie găsită întâmplător la *Apulum (Alba-Iulia* [5]), iar pe malul Motrului nu s'a făcut până acum nicio cercetare arheologică care să ne lămurească.

---

[1]) PÂRVAN, *Getica*, *passim*; DUNĂREANU-VULPE EC., *Sull'origine e l'evoluzione delle scuri di rame carpato-danubiane*, p. 211; NISTOR I., *Autohtonia Daco-Românilor în spaţiul carpato-dunărean*, în *An. Ac. Rom., Sec. Ist.*, XXIV (1942), p. 216.

[2]) PÂRVAN, *Getica*, p. 297. Nu împărtăşim această părere: mai înainte de venirea Celţilor s'a desvoltat industria fierului în Europa.

[3]) STRABO, VII, 3, 11.

[4]) IORGA N., *Istoria Românilor*, Buc., 1936. Vol. I, 2, p. 240 urm.; GIURESCU C. C., *Istoria Românilor*, Buc., 1938. Vol. I, p. 154 urm., 160.

[5]) GIURESCU C. C., *op. cit.*, p. 155.

Ştim că Romanii nu au interzis exploatarea minelor de aramă în Macedonia, reducând chiar plata arendei pe jumătate [1]).

In timpurile turburi ce au urmat în Dacia după ce legiunile romane o părăsiseră, populaţia autohtonă, acum romanizată a fost întrebuinţată şi la lucrul în mine [2]). Pe rând au dominat-o Vandalii, Gepizii, Hunii, Avarii.

Spre sfârşitul secolului IX, precum mărturiseşte « Cronica » notarului anonim al regelui Bela, Ungurii, la descălecarea lor în Panonia, au găsit în Dacia Carpatină pe Vlahi şi Slavi organizaţi în trei voievodate [3]). Cam tot în acest timp şi restul populaţiei autohtone se grupează în mai multe voievodate, la fel cu cele din prima jumătate a secolului XIII pomenite în diploma Ioaniţilor din anul 1247 [4]), care în secolul următor sunt unite de Basarab într'un singur stat, al Basarabilor — Ţara Românească.

Dela urmaşii acestui Basarab Intemeietorul ni s'au păstrat între documentele domneşti câteva din ultimul deceniu al secolului XIV şi din secolul XV, toate redactate în limba slavă, în care se menţionează despre exploatarea minelor de cupru în regiunea *Băii-de-Aramă*. Aceste menţiuni sunt de o mare importanţă pentru istoria industriei române, şi fiindcă au rămas până astăzi sau prost traduse sau interpretate cu totul greşit, înainte de a trece la examinarea lor, vom da câteva lămuriri privitoare la terminologia metalurgică medievală.

Pornind dela cuprul nativ omul s'a învăţat să lucreze la rece şi pe urmă la cald, topindu-l. Prin topirea minereurilor de cupru el a obţinut metalul, ca mai târziu, făcând aliajul cupru-staniu, să obţină bronzul [5]). Arderea la primele cuptoare a fost ajutată de vânt şi pentru aceasta cuptoarele se aşezau pe locuri deschise, de preferinţă pe înălţimi; mai târziu s'a pus în mişcare foale acţionate de mână sau cu piciorul. S'a creat un tip de cuptoare numite cuptoare de vânt (Windofen, în terminologia germană medievală). Cam prin secolul XII s'a pus în

[1]) Titu Livius, *Ab urbe condita*, XLV, 29: « Metalla quoque auri atque argenti non exerceri; ferri et aeris permitti. Vectigal exercentibus dimidium ejus impositum, quod pependissent regi » (minele de aur şi cele de argint să nu fie exploatate, cele de fier şi cele de aramă sunt permise. Concesionarilor li se reduce arenda pe care o plăteau regelui, pe jumătate).

[2]) Gamillscheg E., *Romania-Germanica*, II, p. 240, cit. Nistor I., *op. cit.*, p. 248.

[3]) Popa-Lisseanu, *Izvoarele Istoriei Românilor*, vol. I; *Anonymi Belle regis notarii gesta hungarorum*, XXIV, XXVI, XLIV. Cf. *Idem*, Românii în izvoarele istorice medievale. Buc., 1939, cap. XIII; Românii în Descriptio Europae Orientalis, p. 215.

[4]) Hurmuzaki, vol. I. Buc., 1887, Nr. CXCIII.

[5]) Detalii la Rickard T. A., *Man and Metals*, New-York, 1932, pp. 113—137.

serviciul topitorului roata de apă, care, cu o mie de ani înainte, a pus în mișcare pietrele umblătoare ale morilor și mai târziu ferăstraiele de lemn și de piatră.

Cuptoarele s'au scoborît la vale, chiar pe malul râului, în care se instala motorul hidraulic, iar în dosul cuptorului, sub un acoperiș simplu, foalele, acționate de fofezele grindeiului, ca la piuă. Acest ansamblu se numea « Radwerk » [1]), o metaforă tehnică care s'a tradus în limba sârbă medievală prin cuvântul **коло** ce însemna o topitoare cu motor hidraulic, care mai acționa și pive-pisăloage, ciocane. Acest termen îl găsim în actele sârbești [2]).

Jirecek definește acest termen în modul următor: « Minereul (ruda) obținut a fost prelucrat în pisăloage, topitoare și ciocane, — *carri* Raguzanilor, *kolo* al Serbilor (literalmente roată), bunăoară « *Gvozdeno kolo* » — roata de fier —, « *Srebno kolo* » — roata de argint —, totdeauna mișcate de forța apei » [3]).

Acest termen a fost introdus și în Țara Românească tot ca o metaforă tehnică, *roata*; termenul a dispărut cu timpul, rămânând însă alte metafore ca *roata* (roata de udat), iar în susmenționatele acte domnești s'a întrebuințat termenul sârbesc **коло** înțelegând sub acest termen o topitoare cu motor hidraulic sau ansamblul pomenit mai sus.

Trecem acum la examinarea acestor acte. Deocamdată cunoaștem numai cinci acte în care se întâlnește termenul **коло**. Ele sunt hrisoave domnești de danie, date pe numele mănăstirii *Tismana* și datorită acestui și numai acestui fapt, actele au ajuns până în zilele noastre, iar acum sunt puse la adăpost sigur, în Arhivele Statului.

In primul, cel mai vechiu, care se datează cu anul 1392 [4]), [5]), Mircea I, confirmând m-rei *Tismana* daniile predecesorilor săi Radu, Dan și Vladislav, mai adaugă și din partea sa câteva danii dintre care

и доходъкъ що є господства ми wт кола Чип Ханоша,
що є оучинилъ ноко на Братилокѣ

---

[1]) Schuster W., Die Entwicklung der Eisenschmelztechnik in der Ostmark in *Technik Geschichte*, B. 28, p. 135.

[2]) *Rječnik Hrvatskoga ili srpskoga jezika* al Ac. Jugoslave. Zagreb, 1899. Cuvântul 1. *kolo c, e)*, însă se dă o explicație confuză: acest *kolo* ar fi roata de extracție (organum tractorium) deși se pomenește tot aci, într'un act din 1348 « *kolo gvozdeno* » — roata de fier, adică — metafora — topitoare de fier.

[3]) Jirecek, *Geschichte der Serben*, B. II, Erste Hälfte, Gotha, 1918, p. 57.

[4]) Intrebuințăm pentru primele trei acte, adică cele ale lui Mircea I, chronologia din Panaitescu P. P., *Documentele Țării Românești*, I, Buc., 1938; cf. Florescu G., *Observațiuni asupra documentelor lui Mircea-cel-Bătrân. Revista Istorică Română*, vol. VIII (1938).

[5]) Panaitescu, *op. cit.*, Nr. 11.

adică «*şi venitul care este al domniei mele dela roata lui Cip Hanoş pe care a făcut-o de curând la Bratilov*».

Aici nu se precizează în ce constă acest «venit» de pe roata concesionarului Cip.

In actul următor [1]), care se intercalează între 1392—1408 — originalul neavând dată — găsim:

wт Чоп Хановн кола на Братилокѣ десѧткъ мѣдн

adică: «dela roata lui Ciop Han la Bratilov zeciuială de aramă», prin urmare concesionarul trebuia să plătească în natură zeciuială din arama prelucrată în topitoarea sa.

In al treilea act (1408—1418 [2]):

приложи господство мн на банн wт Чоп Хан8шова кола на Братилокѣ ї̃-ток

adică: «a adăugat domnia mea la mina dela *Bratilov* dela roata lui Ciop Hanus zeciuială». Se specifică deci, că topitoarea lui Ciop se găsea la minele dela *Bratilov* [3]), nu la altele.

Următoarele două acte, unul (Argeş, 2 Aug. 1439) [4]) dela Vlad Dracul cu locul:

и приложи родитєл господства мн на банїѣ, wт Чоп Ханешева кола на Братилок, ї̃-ток

adică: «*şi a adăogat părintele domniei mele la minele dela Bratilov dela roata lui Cip Hanoş zeciuială*»;

şi al doilea (Bucureşti, 10 Iulie 1464) [5]) al lui Radu-cel-Frumos:

и єщє и на банн wт [Чоп Хано]шла кола на Братилок ї̃-ток

«şi încă la mina dela roata lui Ciop Han dela *Bratilov* zeciuială», nu mai adaugă nimic la cele ale lui Mircea I.

Aceste texte dovedesc că în ultimul deceniu al secolului XIV, regiunea dela *Baia-de-Aramă* a fost exploatată în concesiunea dată de domnitorul Ţării Româneşti.

---

[1]) *Ibid.*, Nr. 18.

[2]) *Ibid.*, Nr. 23.

[3]) *Bratilov* este o comună din jud. *Mehedinţi*, situată pe râul *Brebina*, spre Nord dela *Baia-de-Aramă*. Se găsesc încă urme de exploatări miniere.

[4]) *Ibid.*, Nr. 73.

[5]) *Ibid.*, Nr. 103.

La data primului act (1392) erau mai multe topitoare concesionate înaintea celei a lui Ciop, deoarece în acest act se subliniază că venitul dăruit provine dela roata lui Ciop, de curând făcută, și nu dela roată pur și simplu. Nu putea domnul să cedeze m-rei Tismana arama obținută dela prima și singura topitoare. Chiar dacă vom admite că întreaga producție de aramă urma să fie livrată tot domnului, arama donată ar fi fost dată dela casa domnitorului, cum se proceda cu brânza și altele, lucru pe care-l constatăm chiar în același act. S'a interpretat greșit faptul că în actul din 1384, dat tot pe numele aceleiași mănăstiri nu se pomenește de roata, în sensul că exploatarea minelor de aramă nu începuse încă la această dată [1]; el poate să afirme numai că la această dată nu funcționa încă topitoarea lui Ciop, lucru confirmat de altfel chiar în act: topitoarea lui Ciop era pusă în funcțiune nu mult înainte de data hrisovului.

Prin urmare putem afirma că în a doua jumătate al secolului XIV, în regiunea *Băii-de-Aramă* fumegau **roțile**, aceste mici uzine de aramă, ale cărei pive-pisăloage, foale și ciocane erau mișcate de apa Brebinei, Dacă dela data ultimului act (1464) și până la anul 1556 când s'a publicat « *De re metallica* » a lui Agricola a trecut mai puțin de o sută de ani, interval nu atât de însemnat pentru secolul XV—XVI, putem să restaurăm roțile dela Bratilo cu ajutorul descrierilor și gravurilor lui Agricola și « *rota-Radwerk-kolo-roată* » adică, întregul ansamblu denumit prin acest termen-metaforă, va învia în fața ochilor noștri.

In literatura diplomatică românească, nu s'a dat până azi exacta traducere și mai ales interpretarea termenului *kolo* [2]. Și fiindcă textele de mai sus au o deosebită însemnătate pentru istoria industriei românești, îmi permit să dau aci următoarele lămuriri cu un singur scop: să previn pe un istoric al industriei românești de a fi indus în eroare, fie utilizând traducerea textelor, fie consultând literatura istorică.

Confuziile se datoresc:
sau *a)* greșitei cetiri,
sau *b)* greșitei traduceri datorite cunoștințelor insuficiente în limba documentelor,
sau *c)* conținutului tehnic, mai exact-istorico-tehnic, al termenului *roata*, una din numeroasele metafore tehnice.

---

[1]) Idem, *Minele de aramă ale lui Mircea-cel-Bătrân* în *Rev. Istorică Română* (1837), p. 259.

[2]) Această confuzie o constatăm și în dicționarul limbii sârbo-croată al Academiei Jugoslave. Nota noastră, p. 262, [2]).

Documentul din 1392 a fost publicat prima dată de VENELIN în 1840 [1]), textul nostru având următoarea cetire:

и доходъ къщіє Господства ми ѡтъ Кола ми пханоша,
що є оучинилъ ново на Братиловѣ

deci în loc de доходъкъ що є (venitul care este) s'a cetit доходъ къщіє (venitul casei). VENELIN [2]) nu a observat că chiar în acest document «*casa*» este dată prin «дом», greașală care nu schimbă încă sensul, dar mai departe cetește

ѡт кола ми пханоша

care nu are niciun sens, deoarece poate să dea o singură aproximativă traducere «*dela roata de grâu*», traducere făcută, într'adevăr, de un autor, care a luat cetirea lui VENELIN [3]).

Lăsând la o parte alte greșeli de această natură, vom trece la traduceri. Absolut toate traducerile publicate [4]) fac greșeli în traducerea ѡт кола confundând *gen. sing.* кола din această frază, cu *nom. pl.* care are tot aceeași formă și traducând ѡт кола prin *dela roțile* în loc *dela roată*, și fiindcă *nom. pl.* mai are încă sensul de *care*, s'a dat și traducerea *dela carele*, schimbând cu totul sensul textului [5]).

Cuvântul мѣдь-*aramă* din al doilea text (1392—1408) a fost confundat cu медъ-miere, ce a dat la următoarea traducere:

«La aceasta adaugă și domnia mea dela carele lui CIOPHAN la Bratilov zeciuială dela miere» [6]).

Ce și-ar mai imagina un tehnician cetind această traducere!

Cea mai bună cetire și traducere le-a dat d-l P. P. PANAITESCU, la care găsim totuși greșeli ca «*roțile*» în loc de «*roată*», și în traducerea actului din 1464 cetim «*și încă și la mina, dela carele lui* CIOP. . .» [7]).

Rezumatele Repertoriului documentelor Țării Românești al Școalei superioare de arhivistică și paleontologie [8]) conțin următoarele traduceri:

---

[1]) VENELIN J., Влахо-болгарскія или дако-славянскія грамоты Пет. 1840, p. 9. Despre acest autor, care a fost de origină română, din Maramureș și purta numele GHEORGHE HUTA, a se vedea MINEA I., *Un vechiu cercetător al arhivelor noastre* în *Revista Arhivelor*, vol. III, I, pp. 47-49.

[2]) VENELIN, *Op. cit.*, p. 11.

[3]) DINU ARION, *Din Hrisoavele lui Mircea-cel-Bătrân.* Studiu de istorie a Dreptului Român, Buc., 1930, pp. 21, 53.

[4]) Indicate în: ANDRONESCU M., *Repertoriul documentelor Țării Românești publicate până azi*, I, Buc., 1937, Nr. 60, 62, 76, 218.

[5]) ȘTEFULESCU A., *Mânăstirea Tismana*, Buc., 1909, p. 182; NICOLAESCU S., *Documente inedite dela Mircea-cel-Bătrân*, Buc., 1936, pp. 10, 38.

[6]) NICOLAESCU S., *op. cit.*, p. 42.

[7]) *Opera cit.*

[8]) ANDRONESCU M., *Repertoriul Documentelor Țării Românești*, *Bul. Com. Ist. a României*, XVI, 1937.

sub Nr. 60 (actul din 1392) « *venitul dela carele lui* Cip Hanoș *la Bratila* »; sub Nr. 62 (actul 1392—1408) « *zeciuiala dela carele lui* Ciphan *la Bratila* » și sub Nr. 76 (actul 1408—1418) « *și zeciuială dela carele logofătului* Hanuș *la Bratila* » [1]).

Ce nedumerire se naște la cetirea acestor traduceri și, spre regret, acesta nu este un caz izolat [2]).

Interpretarea textului privitor la dania lui Mircea I, precum am văzut, cere, pe de o parte, o cunoaștere, fie cât de elementară, a procedeurilor metalurgice și evoluția lor, pe de altă parte, o concepție istorico-culturală: orice cuvânt, în deobște termenii tehnici, au cuprinsul intim legat cu mediul în care el s'a născut sau s'a întrebuințat. Forma exterioară a cuvântului, uneori rămâne neschimbată în decursul multor veacuri, însă cuprinsul lui se schimbă mereu cu evoluția cuprinsului și avem de a face, pot să spun, cu omonimele istorico-culturale. Problema devine mai complicată când avem în față termenele-metafore. Dacă nu este satisfăcută prima cerere, în cazul nostru, putem avea următoarea interpretare, care într'adevăr, cum vom vedea mai jos, a fost dată nu de mult: arama s'ar obține din minereuri prin spălarea ei în apă într'o cine știe ce roată de fier și iată deci, ce era roata lui Ciop! sau, găsind la Volta (*Memoria sull'identita del fluido elettrico col fluido galvanico*, 1801) cuvântul electromotor [3]), s'ar afirma că electromotorul (în sensul nostru) a fost zămislit încă în 1801; de câte ori s'au schimbat în decursul secolului XIX termenele mașină electrică, electromotor, telegraf și altele.

S'a făcut, pe cât știm, o singură interpretare a locurilor privitoare la roata dela *Bratilov* [4]). Neîndeplinind condițiile de mai sus, autorul nu putea să învingă dificultățile problemei.

« *Roata* » hrisoavelor ar fi o roată de extracție sau un « *sistem de prelucrare și extragere a minereului* » [5]), iar ceva mai târziu, în altă lucrare [6]), această « *roată* » ar fi « o *roată pentru spălarea în apă a minereului de aramă* » [7]).

---

[1]) Evident după traducerea lui Nicolaescu, *op. cit.*, p. 38, însă corectată în erată. (Nicolaescu a cetit în loc de чоп — лог).

[2]) A se vedea exemple la Vasilicoiu C., « *Preadalica* » *în legătură cu o clauză necunoscută de vechiu drept românesc « succesio mortis causa »* în *Convorbiri Literare*. LXXIII, 7-8, 1940.

[3]) Ostașco Al., *Galvani și galvanismul* în *Bul. I.R.E.*, (1937).

[4]) Panaitescu P. P., *opera cit.*

[5]) *Idem*, Minele de aramă ale lui Mircea-cel-Bătrân.

[6]) *Idem*, Doc. Țării Românești, p. 63.

[7]) Intre pasajele respective din « Minele de aramă ale lui Mircea-cel-Bătrân ». « Termenul *kolo*, roată, — la plural înseamnă și car — era întrebuințat în general în Serbia pentru așezarea cu scripete ce slujea la extragerea minereului din mine » (p. 259).

După data ultimului act în care se pomenește roata lui Ciop adică 1464, nu avem nicio știre despre exploatări miniere în regiunea *Băii-de-Aramă* până la mijlocul secolului XVII, când exploatarea a fost înfloritoare; erau mai multe topitoare, fiecare având câte 5—6 cuptoare cu suflători mișcate de motoare hidraulice cu producție anuală cam de 200.000 de oca.

Aceste date le avem din descrierea călătoriei patriarhului Macarie de Antiohia, care a vizitat Țările Românești, în călătoria sa la Moscova, atât la ducere (1653—1654) cât și la întoarcere (1656—1658) [1]).

Descrierea minelor este atât de frumos făcută, încât nu putem să nu o dăm aci, în extenso, (în traducerea E. Cioran) omițând numai câteva pasaje.

Miercuri, 15 Iulie (1657)

Am ajuns [2]) la renumita mină de aramă ce se află situată la marginea acestui ținut...

« Aceste mine de aramă (e vorba de cele dela Bratilov) se exploatau după sistemul roatei întrebuințat în minele sârbești, așa cum am văzut mai sus. Cuvântul *kolo*, plural *kola*, înseamnă roată sau car, dar dacă facem apropierea cu roata rudarilor sârbi, reiese limpede că avem a face cu același sistem de prelucrare și extragere a minereului și că s'a adoptat sistemul sârbesc (p. 261) »; în rezumat, redactat în franțuzește: « les installations pour l'extraction étaient désignées sous le nom de *kola* (roues) » (p. 267).

Pe cât este « limpede », autorul dă ceva mai târziu în « Doc. T. R. », p. 63, « *kolo*, roată și car, înseamnă roată pentru spălarea în apă a minereului de aramă, ca și la minele sârbești ».

Prin urmare, la întrebarea: ce a fost « roata » lui Ciop, autorul răspunde: « sau roata de extracție, sau roata de spălat minereuri ». Dar cum extrăgea Ciop arama din minereuri? — « Foarte simplu », răspunde autorul, « prin spălarea minereului într'o roată de fier ».

Iată ce este, după autor, roata lui Ciop, una din uzinele de aramă din secolul XIV—XV.

[1]) Această descriere este făcută de fiul patriarhului, arhidiaconul Pavel de Alep și redactată în limba arabă. Până în prezent lucrarea nu a fost publicată, afară de prima parte și cartea I din partea II, care s'a publicat de regretatul prof. V. Radu în *Patrologia Orientalis*, Tome XXII, Fasc. I, Paris, 1930, dând și o traducere franceză și publicând un studiu preliminar publicat la Paris, 1927. In 1829—1836 a apărut la Londra traducerea engleză făcută de Belfour, « The Travels of Macarius patriarch of Antioch », după care Emilia Cioran a făcut traducerea părților referitoare la călătoriile prin Țările Române. Prima călătorie a fost tradusă în 1865 de Hasdeu (Arhiva Istorică, I, 2); mai avem traduceri parțiale de Negruzzi, 1862 și Popescu Ciocănel (după textul arab).

Spre marele nostru regret, munca întreprinsă de V. Radu s'a întrerupt: opera lui Pavel de Alep este foarte importantă pentru cunoașterea stării de lucruri din Țările Române pe la jumătatea secolului XVII.

[2]) Plecând dela mănăstirea *Tismana*.

Această mină de aramă a fost descoperită în timpul lui Matei-Vodă. Felul acestei descoperiri a fost următorul:

Un sârb, mergând la vânătoare prin păduri, ajunse în acest loc, care atunci era încă cu totul necunoscut. Aci găsi o grămadă de pietre negre sfărâmate de vechimea vremii și devenite o masă solidă. Pietrele erau așezate aci încă din timpul Grecilor; aparența lor indica că împrejur trebue să fie o mină.

Sârbul se duse la domn să-l informeze de această împrejurare și o luă cu contract pe seama lui. Astfel cu autoritatea domnului s'a exploatat mina. E situată în vârful muntelui. Tot locul de jurîmprejur, cât și dealurile din vecinătate sunt acoperite cu piatră albă, sub care solul e roșu, întocmai la fel cu cel din *Alep*. Apele sunt foarte abundente. Păturile de aramă sunt adânci, acoperite cu un fel de verdeață; seamănă cu acele ale unei mine de sare. In sus și în jos lucrătorii transportă materialul cu ajutorul roților și frânghiilor, trase de cai, ce merg de jurîmprejur. In fund, se sapă incontinuu, noaptea și ziua, la lumina torțelor, și cu mare muncă scot materialul cel negru. Acela care nu se poate tăia din cauza tăriei sale, ei îl înconjoară cu cărbuni aprinși și apoi ies din mină. Indată ce s'a stins focul și s'a răcit se scoboară iar și găsind piatra crăpată, iau bucățile și le ridică pe gura puțului. Câte un mineral din vână e ca rugina de verde, altul e galben deschis și aceasta e adevărata aramă. Ei, cu toate acestea, amestecă toate laolaltă și-l transportă la casa de fuziune [1]). Aceste case sunt foarte mari și înalte, cu acoperișuri înclinate. In mijlocul fiecăreia sunt cinci sau șase cuptoare așezate pe rezervorii. *In dosul fiecărui cuptor este o pereche de suflători foarte mari, ce seamănă cu acele ce întrebuințează faurii și care se pun în mișcare prin apă; căci e astfel așezată ca, la spatele fiecărei asemenea case, să se afle un scoc cu apă curgătoare pe o roată exterioară; aceasta pune în mișcare o bârnă groasă, prin mijlocul căreia foile suflătorilor sunt ridicate și lăsate iar, așa că suflă cu o mare forță în foc*, (curs. n.).

Un lucrător pune incontinuu pe foc cărbuni și mineral de cupru. Aceste focuri sunt întreținute cu cea mai mare grije și muncă, atât ziua cât și noaptea, până ce cuprul e cu desăvârșire topit și se scurge dela sine într'o groapă săpată în pământ. Indată ce se răcește, ei îl crapă în bucăți mici și-l transportă afară. Apoi așează un strat de lemn de salcie și plop și unul de bucăți de metal, alternativ, până ce formează o grămadă mare, căreia îi dau foc de patru părți

[1]) La Belfour, *melting-hous*.

și o lasă să ardă ziua și noaptea, până ce s'a ars de tot. Apoi strâng metalul și îl pun pentru a doua oară în foc într'alt loc; astfel continuă de șase ori. Apoi readuc arama în cuptorul unde a fost mai întâi amestecată, o topesc din nou și metalul acesta se scurge apoi în groapa de pământ; totuși e încă brut și după ce se răcește, îl pun din nou în cuptoare. In acest rând ei obțin o amestecătură desăvârșită, ce curge ca apa. Scurgând-o în forme, scot aramă frumoasă și curată ca ceara.

Se zice că e mai bună și mai curată ca cea din Castemuni, fiind tot așa de plăcută ca argintul curat. E transportată de negutători în Turcia, Trapezund, Castemuni și Persia.

Ocaua se vinde cu un dolar. Se zice că într'un an a produs 600.000 oca, cât timp era mai abundentă la suprafața pământului, dar acum o scot dintr'o mare adâncime. In cei doi ani din urmă produsul anual a fost de 200.000 oca; dar se cer o mulțime de cheltueli, ca să se cumpere cărbuni, să se plătească lucrătorii, inginerii, etc.

« Râul *(Motru)* care merge pe lângă fabrică [1]) și care întoarce roatele ».

Până la sfârșitul secolului nu avem niciun document direct, însă se poate admite că exploatările au continuat cel puțin până la secolul XVII [2]).

---

[1]) La BELFOUR, *workshops*.

[2]) V. DRĂGHICEANU, *Monumentele Olteniei*, în *Bul. Com. Mon. Ist.* (1934), p. 118.

711 URBANISME

ORIENTATION PHOTOTROPIQUE EN URBANISME

par **Cincinat I. Sfinţescu**

L'orientation urbanistique, éolique et phototropique (thermique, héliotropique, héliothermique, actinique, plane, sphérique, etc.) n'est pas encore parvenue à une doctrine parce qu'elle n'a pas été étudiée sous tous les aspects qu'elle peut présenter.

A cause de cela, les conclusions et la pratique, trop variées, prêtent à des confusions et controverses.

L'auteur, après avoir exposé l'évolution du problème, établit quelques points de départ sur la base de l'analyse scientifique des facteurs déterminants. Il arrive à la conclusion que la solution de l'orientation s'applique tout d'abord aux façades des immeubles et ensuite aux rues, elle dépend de la rigidité décidée entre la direction de l'alignement des façades principales des immeubles et celle de l'axe des rues, elle dépend encore de la fonction (mode d'utilisation) des immeubles ainsi que de leur structure intérieure (si ces immeubles ont des pièces de même emploi sur quelques façades ou sur toutes les façades) en dehors des conditions principales habituelles, c'est-à-dire la latitude et le climat de la localité.

La condition de l'économie du terrain lie étroitement le problème de l'orientation à celui de la distance minima nécessaire entre les immeubles qui conduit aux données mathématiques de l'orientation.

Le dégagement de l'orientation des immeubles d'une même rue, phénomène qui a commencé à se manifester depuis 10 à 15 ans par des réalisations pratiques, fait ressortir de plus en plus l'importance du problème de l'orientation phototropique dans l'urbanisme pour éviter des erreurs qui peuvent avoir quelquefois des conséquences plus graves que celles qui résultent alors que les règlements de construction imposent une corrélation rigide entre les deux orientations.

L'auteur termine par quelques exemples critiques qui mettent en relief la nécessité urgente d'une doctrine, tel qu'il en resulte de l'évolution du problème.

L'Urbanisme cherche à remettre l'habitant de la ville moderne en contact avec la nature de qui la civilisation et la technique l'ont trop éloigné ; *le rurbanisme* s'efforce de familiariser le paysan à la technique

et à la civilisation, sans toutefois le déraciner de son milieu naturel, en commençant par là où la production est déficitaire et la population souffre, ce qui implique l'augmentation des moyens d'existence. C'est ainsi que l'urbanisme et le rurbanisme forment de fait un et même système pour l'équilibre de la vie sociale, système appliqué parfois à contresens, mais toujours dans une mesure variable correspondant aux besoins.

L'orientation *éolique*, c.-à.-d. l'utilisation et la préservation des vents (courants d'air) et l'orientation, *phototropique*, c.-à.-d. l'utilisation et la préservation des rayons solaires des habitants de même agglomération, font l'objet d'une étude plus attentive et même appliquée; il est certain qu'elle devient toujours plus nécessaire, comme seul et économique moyen de combattre la tendance en quelque sorte fatale, déterminée par l'artificialisation de notre existence biologique.

Tant que l'homme vit à l'état primitif, c.-à.-d. qu'il mène une existence libre au milieu de la nature, pendant les quelques heures qu'il reste à l'abri, son organisme n'est guère influencé, ni par la ventilation, ni par l'insolation.

Dans les pays tropicaux, l'homme primitif peut utiliser les abris naturels, cependant que dans les régions polaires les refuges de neige, aux ouvertures creusées dans des blocs de glace, lui étaient et lui sont encore suffisants pour ce genre d'existence. Mais l'homme civilisé qui vit presque continuellement enfermé dans une pièce (bureau, usine, atc.), en contact continu avec de nombreux semblables, arrive à affaiblir sa résistance corporelle par suite de l'insuffisance d'air et de lumière et devient la proie facile des bactéries répandues en permanence autour de lui.

L'imprévoyance sociale a aggravé la situation,.étant donné l'agglomération des maisons dans les villes et l'augmentation de leur hauteur, qui empêchent de plus en plus la pénétration des radiations solaires à l'intérieur, augmentant parfois à des proportions insupçonnées les courants d'air autour des maisons, ou, d'autres fois, empêchant presque complètement une ventillation minime.

Tous les moyens de ventilation et de chauffage (air conditionné) et même de diffusion dans les pièces de rayons ultra-violets ne peuvent remplacer les conditions naturelles, demeurant de simples distributions dosées parcimonieusement, en outre du fait important qu'ils ne peuvent être généralisés parce qu'ils deviendraient ruineux du point de vue économique et social.

Vouloir demeurer dans cette voie, en contradiction avec les exigences biologiques, n'est pas seulement un gaspillage inexcusable, soit

par la dépréciation généralisée des choses, soit par l'accentuation des besoins d'introduire dans les constructions certaines installations extrêmement coûteuses et dont l'évaluation totale n'a pas été calculée, mais encore à juste titre, semblable persistance peut être considérée comme crime de lèse-humanité.

L'orientation éolique, vantée même dans l'antiquité (Vitruve) a été vraisemblablement pratiquée même dans les temps préhistoriques, comme celle phototropique que Léonardo da Vinci n'a pas négligée puisqu'il prescrivait de respecter les distances entre les maisons par rapport aux rayons solaires arrivant à 45° sur l'horizontale.

Cependant, de grands progrès n'ont pas été réalisés dans l'étude et surtout dans la pratique de ces orientations pendant longtemps, quelquefois on a même enregistré des régressions, controverses et contradictions malgré que le peuple de chaque région ait une conviction personnelle à ce sujet, acquise dans la pratique de la vie.

En ce qui concerne l'orientation éolique celle-ci semble être dirigée vers sa vraie voie par le Prof. Stodieck. De même la crainte des gaz de guerre a donné une impulsion forcée aux recherches. Nous-mêmes, en passant, avons indiqué quelques applications urbanistiques. La mise en pratique du résultat des études semble pourtant encore très faible. Le cadre que nous nous imposons nous fait négliger ici cette orientation pour ne nous limiter qu'à l'orientation phototropique.

* * *

Avant de résumer les motifs et les résultats concernant l'orientation phototropique, nous indiquerons rapidement les propositions ou les résultats d'autres recherches d'où il résultera certaines contradictions mais aussi des aspects variés du problème. Ceci nous procure par ailleurs l'occasion de montrer que la plupart des problèmes urbanistiques peuvent être traités scientifiquement.

L'orientation phototropique en urbanisme comprend l'établissement de la direction favorable d'exposition aux rayons solaires des rues et des façades des maisons ayant comme but l'hygène et la santé des habitants.

On a d'autre part remarqué que l'étude de cette orientation présente en outre un intérêt économique tout au moins dans certaines régions du globe, là où le froid et la chaleur excessive alternent, où les neiges fondent difficilement, etc., et où la lutte contre cet inconvénient nécessite des dépenses supplémentaires de combustible, de transport, etc., qui pourraient être épargnées.

Voilà pourquoi l'orientation *phototropique* c.-à.-d. en rapport avec les rayons solaires (les rayons cosmiques parvenant en petites quantités

à la surface du globe par rapport aux rayons solaires — moins de 10% — et encore ne sont-ils pas tous bien connus) s'étudie et s'applique aussi bien pour des raisons d'hygiène que d'économie, sous l'aspect d'une gamme d'orientations: soit *héliotropique* (en rapport aux rayons lumineux), soit *thermique* (en rapport aux rayons caloriques et au degré thermique), soit *héliothermique* (en rapport au degré héliothermique, défini par Rey et Pidoux), soit *actinique* (en rapport aux rayons solaires à ondes courtes, groupe bleu-ultraviolet) soit, plus récemment, *énergétique* (degré d'énergie conçue par Marboutin et Bardet) soit, avec les orientations ci-dessus combinées et en plus avec l'orientation éolique.

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, les orientations mentionnées peuvent être recherchées seulement pour la rue, seulement pour les constructions ou encore pour les deux simultanément. On peut encore ne les envisager que pour une façade spéciale de la bâtisse (orientation plane) ou pour toutes les façades en rapport avec les fonctions des pièces de ces façades (orientation *sphérique*, orientation d'*équivalence*, comme c'est le cas pour les blocs, les hôtels isolés, les gratte-ciels isolés).

On a vu dès le début que l'orientation urbanistique dépend non seulement du but poursuivi, mais encore de la position géographique de la localité c.-à.-d. de la latitude et du climat, la latitude déterminant la direction, l'intensité des radiations solaires et leur durée d'action quotidienne, alors que le climat, fonction plus complexe, détermine la valeur pratique du but poursuivi par la captation de certaines radiations. Ainsi donc, un examen général des influences de ces deux facteurs principaux sur les différentes orientations parcourant le globe terrestre, éclairera mieux l'importance d'application de certaines combinaisons d'orientation dans les différents cas qui peuvent se présenter dans la pratique.

Cet examen général a manqué, toutes les recherches ont été isolées, pour des cas particuliers, et par conséquent incomplètes, avec des controverses ou des contradictions, insuffisamment motivées.

Par exemple, parmi les premières propositions et études, citons celles d'avant 1909 de Sir Raymond Unwin, qui ont compris l'orientation *héliotropique* ainsi que celle *actinique* (par rapport aux rayons ultra-violets) ayant en vue la situation et les besoins de l'Angleterre ou des pays de même latitude et climat, mais seulement en orientation *plane* et, pour le cas d'une relation *rigide* (cas de coïncidence, entre l'orientation de la rue et celle des maisons . Ainsi donc, les travaux d'Unwin comprennent quelques cas particuliers.

Ses recommandations qu'une rue doit être d'autant plus large que son orientation s'approche davantage de la direction N.-S. est juste. De même celle préférant l'orientation N.-S. des rues pour que les pièces reçoivent les rayons inclinés du soleil le matin ou l'après-midi (rayons ultra-violets et caloriques) c.-à.-d. alors que pendant le solstice d'hiver le locataire anglais se trouve à son domicile. Les conditions locales justifient ces propositions. L'orientation thermique n'a pas intéressé plus particulièrement Unwin, car en Angleterre, il ne fait ni trop froid ni trop chaud.

Nous avons montré en 1914 qu'il est de nombreux cas où l'orientation *sphérique* c.-à-d. en rapport avec toutes les directions (façades et rayons solaires) est à prendre en considération.

Évidemment, le système des constructions de maisons hautes, collectives, avec des cours intérieures plus ou moins grandes, construites par blocs (îlots) généralement réguliers et rectangulaires, étant assez répandu dans de nombreuses villes d'occident et américaines, a incité le Prof. Hoepfner à étudier après 1920 ce genre d'orientation sphérique, mais *héliotropique* seulement; par conséquent encore un cas particulier, bien que fréquent, étudié sous le seul aspect de l'hygiène.

En 1928, Rey et l'astronome Pidoux, partant de l'idée que non seulement la lumière mais encore la chaleur sont nécessaires dans certaines proportions, ont défini l'orientation *thermique* en rapport avec le degré thermique local (de chaque direction par rapport aux points cardinaux), ensuite le degré *héliotropique* en tant que durée d'insolation sur différentes directions, enfin, la combinaison de ces deux degrés dans le degré *héliothermique* (produit du degré thermique et du degré héliotropique).

La direction pour laquelle le degré héliothermique atteint son maximum est privilégiée et dicte l'orientation plane. Les graphiques des instituts météorologiques peuvent donner les courbes thermiques, héliotropiques et héliothermiques avec les directions des maxima. Rey et Pidoux ont établi de semblables orientations pour Paris. Cette étude, bien que partielle et pour des cas particuliers, a eu un certain retentissement. Les résultats furent livrés à l'enseignement et appliqués dans une certaine mesure en pratique, davantage pourtant pour l'orientation des constructions que pour celle des rues, conduisant, comme une conséquence dont on ne distingue pas encore assez l'importance, à un *dégagement de l'alignement des constructions par rapport à celui des bâtisses.*

R. Danger, plus tard, a attaqué le problème dans un sens plus pratique et a établi des abaques qui fournissent pour différentes latitudes

et azimuts des rues (prenant en considération le cas seulement où l'alignement de la rue est solidaire avec celui des façades des bâtisses) mais pour une certaine hauteur des immeubles, la distance nécessaire entre les façades des immeubles (par conséquent la largeur des rues aussi) pour que le jour du solstice d'hiver, la façade soit entièrement ensoleillée un temps minimum déterminé (une heure par exemple). La façon dont DANGER a mis la question, présente un progrès et une généralisation partielle, mais, comme on peut l'observer, elle laisse de côté encore bien des considérations.

En 1933, nous avons montré l'importance de l'application de la conception *énergétique* aux rayons solaires de petite longueur d'onde (rayons ultra-violets) dans l'orientation et l'hygiène urbanistiques, particulièrement dans les états nordiques.

MARBOUTIN et BARDET, en 1941 (peut-être même avant), contestant la justesse du procédé de REY et PIDOUX, ont introduit la notion énergétique, dans le sens que l'orientation optima est celle qui amasse l'énergie solaire maximum, mesurée à l'actinomètre. Utilisant les mesurages de A. HENRY (valables pour Paris), qui s'est servi d'un actinomètre inventé par lui, ils ont établi des graphiques desquels ils ont déduit que la façade Sud présente l'insolation la plus uniforme pendant toute l'année (donc les pièces jouissant de cette orientation sont chaudes en hiver et fraîches en été) et c'est toujours dans cette direction que les rayons ultra-violets sont les plus intenses. Mais si l'on tient compte du rapport qu'il y a entre la largeur de la rue et la hauteur des constructions, BARDET recommande une orientation faisant un angle de 60°—70° sur la direction Nord-Sud. Ainsi donc BARDET n'observe pas clairement l'importance du retour à l'indépendance de l'orientation dans les constructions en égard à celle de la rue et se préoccupe de l'état local de Paris (et de la région environnante). Il laisse de côté une série entière de questions.

Nous objecterons que dans la conception de l'orientation énergétique recommandée par MARBOUTIN et BARDET, il n'est pas tenu compte des valeurs utilitaires dans les différentes catégories de rayons. Donc l'orientation d'après l'énergie totale des rayons ne correspond pas à la réalité pratique.

VINACCIA, en Italie, est lui aussi en désaccord avec REY et PIDOUX et reproduit les résultats graphiques de MARBOUTIN pour Paris.

Pour le moment, c'est là qu'en est l'urbanistique en ce qui concerne l'orientation phototropique, les travaux publiés n'apportant pas en général des preuves certaines nécessaires à l'établissement de points de départ.

* * *

Dans cette situation et, ayant en vue les aspects du problème que nous avons classé dès le commencement, nous avons repris l'étude de l'orientation phototropique mais en cherchant au préalable à fixer quelque points de départ sûrs. Parmi ceux-ci, le plus important est *l'établissement d'un ordre d'utilité et de nécessité des différentes orientations phototropiques.*

1. Par la physique et la biophysique, les propriétés des diverses radiations solaires qui arrivent à la surface du globe ou à certaines hauteurs dans l'atmosphère, sont suffisamment connues; nous en mentionnerons cependant quelques-unes qui touchent de plus près le problème que nous nous sommes proposé. Les radiations solaires sont thermiques (infrarouges), lumineuses (spectre lumineux), chimiques (ultra-violettes). Mais ces qualités influencent différemment les êtres et les matériaux, elles se raccordent et parfois se combattent, les qualités indiquées étant celles qui prédominent et ne sont pas limitées à la catégorie de radiation indiquée. Les rayons thermiques, les rayons lumineux et les rayons ultra-violets sont utiles et nécessaires à la vie et à l'économie, mais les plus nécessaires sont les rayons lumineux, — bien qu'ils soient en moindre mesure — en même temps thermiques et biotiques et même abiotiques (ceux du bleu vers l'ultra-violet).

D'où il résulte que dans la majorité des cas, *la plus grande importance doit être accordée à l'orientation héliotropique.* L'orientation thermique, en général un peu décalée en rapport avec celle héliotropique, ne joue pas un grand rôle, étant accessoire à celle héliotropique qui est plus nécessaire. Il arrive parfois que nous soyons obligés de rechercher l'orientation antithermique et même celle antihéliotropique (vers l'equateur) ou seulement celle antihéliotropique (aux pôles).

Mais la vie sociale et l'hygiène sociale tirent toujours avantage de l'*orientation actinique* (surtout en rapport avec les rayons ultra-violets). Les rayons violets et ultra-violets ont une valeur eubiotique et aussi abiotique et leur pénétration dans tous les angles des pièces, tout au moins dans celles destinées aux logements, est nécessaire; par conséquent des rayons ultra-violets, ceux qui tombent plus près de l'horizontale sont préférables.

Un simple dessin nous montre que les rayons qui font 30° sur l'horizontale pénètrent par les fenêtres à une profondeur de près de 3,7 fois plus grande que ceux qui font des angles de 60°. L'atmosphère est beaucoup plus opaque pour les rayons ultra-violets (292—400 μμ de longueur d'onde), que pour ceux infra-rouges (760—11.000 μμ de lougueur d'onde) et les lumineux (400—760 μμ de longueur d'onde); en échange les rayons caloriques représentent le 80% de ceux émis par le soleil tandis que les ultra-violets n'en sont que le 7%, et encore la

quantité aux longueurs d'onde décroissantes est rapidement influencée par l'augmentation de l'épaisseur de la couche d'air. Les rayons ultra-violets ne réfléchissent pas de même manière que les rayons lumineux.

Une autre figure simple peut nous montrer que, approximativement, l'épaisseur de la couche d'atmosphère parcourue par les rayons qui viennent à 90°, 60°, 40° et 30° en rapport avec l'horizontale est respectivement de 120, 140, 175 et 450 km. C'est pour cela que nous avons choisi pour la *vérification* d'une bonne orientation actinique, des rayons à inclinaisons comprises entre 45° et 30° et non pas tous ceux au-dessous de 60° (ceux entre 60° et 45° ne pénètrent pas profondément dans la pièce; quant à ceux au-dessous de 30°, les rayons ultra-violets y sont trop raréfiés, et par conséquent ont une action abiotique faible).

L'orientation actinique a quelque valeur seulement si au moment de l'insolation les fenêtres sont ouvertes, ou si les vitres sont des vitres nommées actiniques c.-à.-d. transparentes aux rayons ultra-violets (comme celles fabriquées à l'oxyde de nickel ou à base de nitrosodimetilaniline). L'orientation actinique est intéressante aussi par son action eubiotique et aussi abiotique.

On sait que les rayons ultra-violets sont divisés en trois groupes: *ordinaire* (ceux qui arrivent sur la terre sans être absorbés par l'atmosphère, avec les rayons bleus-violets) qui sont eubiotiques et, dans certaines conditions, aussi abiotiques; *moyenne* (à longueurs d'onde au-dessous de 292 μμ et qui sont absorbés par l'atmosphère, mais peuvent être produits par une lampe à vapeurs de mercure) sont plutôt abiotiques; enfin, le groupe *extrême* (longueur d'onde autour de 100 μμ) qui donne des réactions cutanées douloureuses.

Il est prouvé que la lumière équilibre la vie des organismes supérieurs et détruit les organismes inférieurs. Nous avons établi un tableau, incomplet il est vrai, mais dont il résulte que les microbes de la peste, du typhus, du choléra, de la tuberculose, du tétanos sont détruits après une exposition de quelques heures aux rayons du soleil (le bacille de la tuberculose en deux heures) ou en quelques minutes s'ils sont exposés aux rayons ultra-violets (celui de la tuberculose en dix minutes).

Ainsi donc, il résulte que *non seulement l'orientation héliotropique est nécessaire, l'orientation actinique l'est aussi*; il résulte encore qu'*une exposition héliotropique journalière de deux heures et une exposition actinique d'une heure ou moins encore, sont nécessaires et suffisantes.* En d'autres termes, il n'est pas recommandable de séparer l'orientation héliotropique de l'orientation actinique, sauf dans des cas tout à fait exceptionnels (équateur, pôles).

2. Par l'astronomie, on connaît les aspects du mouvement apparent du soleil dans les localités situées aux différentes latitudes terrestres, partant de l'equateur vers le pôle.

A l'équateur, le soleil brille en permanence au ciel pendant 12 heures par jour et a un mouvement d'élévation rapide de l'horizon jusque près du zénith (à 12 heures), la hauteur la plus petite vers le sud du zénith étant au solstice d'hiver (23°,27′ sud du zénith) et au solstice d'été (pareillement 23°,27′, mais au nord du zénith) et apparaissant au zénith exactement à 12 heures aux deux équinoxes. Ainsi donc à l'équateur, le problème de l'orientation urbanistique est plutôt d'une orientation thermique (antithermique).

Vers les tropiques, la situation ne change guère; mais entre les tropiques et les cercles polaires la durée de l'exposition solaire quotidienne varie beaucoup pendant le courant de l'année tout comme l'inclinaison des rayons solaires en égard au zénith. Ainsi, au solstice d'hiver, à l'hémisphère boréal, le jour de l'exposition minimum coïncide au jour où l'inclinaison des rayons est la plus forte, c'est pourquoi aux approches de ce moment, les orientations thermique, héliotropique et actinique sont précieuses, tandis qu'au solstice d'été les situations étant inversées, l'orientation antithermique devient préférable.

Peut-être cette coïncidence d'intérêt pour tous les genres d'orientation lors du solstice d'hiver dans la zone d'entre les tropiques et les cercles polaires dans laquelle se trouve aussi Paris a-t-elle déterminé Marboutin et Bardet à concevoir l'orientation énergétique.

Déjà sur le cercle polaire, le soleil n'apparaît pas du tout au solstice d'hiver, pour arriver lors de l'équinoxe, à 12 heures, à une petite hauteur (23°,27′); le jour du solstice d'été, il ne disparaît pas du tout et décrit un cercle qui se projette comme une ellipse dans le ciel. Dans une telle région, l'*orientation énergétique* est adéquate.

Enfin, au delà des cercles polaires, jusqu'aux pôles, la durée des jours et des nuits continus augmente, séparée par une série de jours inégaux, série d'autant plus courte qu'on s'approche des pôles et se réduisant à un jour. Il est vrai que dans de pareilles régions, l'orientation énergétique diminue d'intérêt, l'antihéliotropique peut paraître intéressante (vers le solstice d'été).

Ainsi donc, une simple prospection le long d'un méridien suffit pour nous convaincre qu'il ne faut pas unifier dans une solution définitive les différentes orientations que nous avons indiquées.

3. Dans les régions terrestres aux latitudes où les orientations héliotropique et actinique sont d'importance, la solution optima en rapport avec ce genre d'orientations ne peut être déterminée sans la connaissance

des azimuts et des hauteurs du soleil, au moins aux solstices et aux équinoxes. Rey et Pidoux ont calculé des abaques se référant à la ville de Paris, nous pensons en avoir bientôt aussi pour Bucarest. De fait, des calculs complets et précis ne nous sont pas nécessaires, car, pour les jours spéciaux indiqués ci-dessus nous pouvons déterminer facilement par graphique les azimuts et les hauteurs à toute heure et jour n'importe quelle localité, en dessinant les « ellipses des azimuts » et les « ellipses des hauteurs » d'après deux méthodes que nous avons indiquées dans la revue « *Urbanismul* », novembre-décembre 1941, où se trouvent quelques développements de ces considérations sur l'insolation urbanistique.

Avec les données des ellipses nous établissons les ombres portées, ou même directement sur le terrain, des constructions, aux heures qui nous intéressent pour l'orientation et par conséquent nous déterminons les distances qui doivent être observées entre les maisons, pour obtenir l'insolation désirée (héliotropique, actinique, etc.), et pour un temps déterminé, par ex.: deux heures d'exposition de la surface entière aux rayons lumineux, ou une heure aux rayons actiniques avec inclinaison de 30°—45°.

* * *

La méthode graphique nous procure aisément les solutions d'orientation urbanistique, par exemple pour la latitude et les conditions de la Roumanie, dans les hypothèses et cas suivants que nous nous bornerons à énoncer:

I. **Alignement de la rue solidaire à celui des façades.**

a) Insolation quotidienne de la surface de la rue et d'une façade entière des immeubles qui s'y trouvent, pendant un minimum de temps (insolation plane), avec détermination du minimum de distance entre les maisons et vérification actinique;

b) idem, mais avec insolation optima *sphérique* (de toutes les façades) avec détermination des distances minima libres vers toutes les façades des immeubles;

c) insolation « *équivalente* » des deux côtés d'une rue et intégrale aux façades des immeubles de ces deux côtés journellement et pour un minimum de temps.

Les résultats sont que les distances minima se manifestent pour les orientations à direction Nord-Sud et les distances maxima pour les orientations à direction E-O, ce qui résulte de la relation:

$$D = I \cot h \times \sin a$$

où D est la distance entre les maisons, I leur hauteur, h l'angle que

fait le rayon solaire sur l'horizontale et a l'azimut du rayon au moment envisagé. Cette relation est analogue à celle utilisée par PIDOUX:

$$X = I \operatorname{cosec} (z + y) . \operatorname{tg} ah.$$

Mais, comme l'exposition actinique exige quelquefois pour le solstice d'été l'augmentation de ces distances, ce qui peut représenter un désavantage économique, d'autres fois les hauteurs admises pour les constructions rendent ces distances encore plus disproportionnées, enfin parce que les considérations thermiques exigent une exposition thermique prolongée l'hiver et beaucoup plus courte l'été, il faut classifier les résultats comme ci-après:

Les *rues commerciales* préférables sont celles qui sont orientées vers le Nord-Sud avec insolation « équivalente ».

Les *rues d'habitations*, aux maisons basses, une direction E-O, d'autant plus si ces maisons appartiennent au régime de construction dit « fermé ».

Les solutions optima apparaissent à la désolidarisation de l'alignement de la rue de celui des façades principales des immeubles.

II. **Alignement de la rue indépendant de celui des maisons.**

d) Insolation des façades longues des maisons disposées parallèlement entre elles d'après une *orientation* héliotropique *plane*, vérifiée à l'orientation actinique et pour une durée minima d'exposition, pour la détermination du minimum de distance entre les maisons.

Ce cas conduit aux longues façades orientées vers le sud avec *aménagements antiéoliques* et en vue de la formation de *cadres esthétiques*, solution recommandable surtout pour les *rues à habitations collectives et même familiales.*

e) Idem, mais pour l'insolation « *équivalente sphérique* » avec détermination du minimum de distance entre immeubles, vérifié à une exposition héliotropique et actinique pour le minimum de durée quotidienne.

Solutions qui se sont avérées les meilleures pour les constructions blocs, gratte-ciel, etc., avec habitations collectives et pièces présentant *beaucoup d'uniformité dans leur utilisation.*

* * *

L'esthétique de la rue est plus difficile à obtenir si on garde la conception d'un cadre usité dans ces derniers siècles, mais plutôt on peut revenir à une conception antique, celle de l'uniformité de l'angle d'apparence des bâtisses, question encore insuffisamment étudiée. Des exemples de réalisations, examinées à un autre point de vue, se trouvent en Amérique. E. HÉNARD, puis LE CORBUSIER (plan VOISIN de Paris) s'écartant de ce problème d'esthétique ont fait des

propositions poursuivant d'autres buts (constructions en forme de tour, pour la concentration capitaliste de la population).

* * *

C'est en Russie Soviétique où dans l'urbanisme, il a été toléré plus d'indépendance de conception que dans bien d'autres directions, que nous rencontrons plusieurs essais de dégagement de la construction par rapport au tracé de circulation, tels les quartiers ouvriers de *Sceglowsk* dans lesquels domine l'orientation parallèle au N-S, quelques-uns seulement ayant une orientation parallèle à l'E-O. Un quartier analogue se trouve à *Maineft*, même orientation N-S prédominante, avec une note de variété donnée par l'orientation N-O—S-O. C'est toujours l'orientation N-S qui prédomine dans un quartier d'habitation de *Helsinki*, voire même dans un quartier de *Haselhorst-Spandau* (Berlin) et encore dans un projet pour un quartier de *Dresde* (de P. Wolf) et même dans le projet pour une « ville-jardin » à *Vreewyk-Rotterdam*; tandis que C. Chiodi et G. Merlo semblent préférer pour des quartiers similaires, l'orientation N-S ou tout au plus N-O—S-E.

Pourquoi une telle différence dans le choix de l'orientation de maisons ayant une même destination?

Dans le plan de la « ville-jardin » *Vreewyk-Rotterdam*, le choix de l'orientation N-S est inconcevable, les maisons étant en grande majorité unifamiliales, tandis que la latitude et toutes autres conditions, comme nous l'avons démontré, contribueraient au choix de l'orientation E-O. Nous ne pensons pas que l'orientation éolique ait tant influencé la solution, mais c'est plutôt le genre de vie adopté d'Angleterre, qui a guidé Unwin dans le choix de l'orientation N-S. Il est probable que le courant chaud du golf-stream qui atténue les différences de température entre l'été et l'hiver, peut-être même aussi le prix élevé du terrain, y rendent plus avantageuse l'orientation choisie qui permet une rue plus étroite.

Des nouveaux travaux russes, il résulte que l'orientation N-S adoptée, ne serait justifiée que pour les constructions blocs, vraies casernes collectives, dans lesquelles la chambre est une « habitation sarcophage » où les deux longues façades du bloc doivent être orientées « équivalemment », même les maisons destinées à l'habitation seulement. Il semble du reste que cette régle d'orientation ait été copiée directement de la norme allemande, également favorable au N-S, norme établie depuis que l'on construisait des habitations collectives, blocs dont les pièces habitables étaient distribuées sur les deux façades longues, bien que le climat continental eût exigé, dans la plupart des cas, une orientation

plane E-O, avec distribution des pièces principales sur une façade seulement.

Nous estimons que les projets Chiodi et Merlo pour quartiers d'habitation dans des villes d'Italie à orientation vers le Sud (direct. E-O) sont plus rationnels, d'autant plus que dans le nord de l'Italie le climat exige une exposition thermique en hiver et antithermique en été.

Il semble cependant que, dans tous les projets et travaux on ait fait abstraction de l'influence de l'orientation éolique et de l'adaptation de la solution à des cadres esthétiques.

Nous comptons beaucoup sur les avantages que pourrait apporter l'approfondissement de l'étude et de la pratique quant à la séparation de l'orientation de la rue de celle des maisons, ce qui pourrait conduire à l'adoption de nouvelles solutions d'une valeur insoupçonnée au point de vue de l'hygiène, de l'économie et de l'esthétique urbaine et nous espérons que notre exposé servira de suggestion à certains essais et de preciser les problèmes qui se posent.

SOMMAIRE:

Pag.

PĂDURARU O. Bibliographie des publications de M. N. VASILESCO KARPEN V

BOUVAIST M. Sur les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les cercles tangents aux trois côtés 3

THÉBAULT V. Sur l'hexagone à côtés parallèles trois par trois 5

GHEORGIU ADRIAN. Quelques considérations sur la perspective 10

POMPEIU D. Formes diverses du théorème des accroissements finis 23

CIORĂNESCU N. Sur un problème pour les fonctions armoniques dans un cercle 26

CLAUDIAN VIRGIL (Prof. Buc.). Einige neue Betrachtungen über die Kriterien erster und zweiter Art für die Reihen mit positiven Gliedern . . 31

CÂRSTOIU I. Nouveaux points de vue sur quelques théorèmes fondamentaux de la mécanique des fluides. 42

BIANU BASILE. Sur les miroirs paraboliques 46

TOPORESCU ERNEST. Sur le mécanisme de la pression osmotique. 52

BELCOT CONST. Sur la bromométrie (7-e Note) 57

IONESCO TH. D. et CRETZULESCO CONST. Contributions à la chloruration du propane 68

ILIE MIRCEA D. Phénomènes tectoniques dans les Subcarpates roumaines. 78

CRETZOIU PAUL. Die bisher aus der Dobrogea bekannt gewordenen Leicanoraceen 84

GEORGESCU C-TIN C., CRETZOIU P. und LUPE I. Zur Kenntnis der Eichenformen des Bezirckes Vlasca in der Walachei 91

MATEESCO CRISTEA (Dr. Ing.). Résistance des constructions chargées au delà des previsions réglementaires 94

TEODORESCU C-TIN C. (Prof. Ing.). Das Quellen des Zementmörtels in feuchter Luft 104

STEOPOE AL. (Dr.). Untersuchungen über die Zersetzung des erhärteten Mörtels und Betons mit Salzsäure 108

BUDEANU C. I. (Prof. Ing.). Au sujet de la connexion entre les phénomènes électriques et magnétiques 119

CONSTANTINESCU I. (Ing.). Aspects physiques et mathématiques des phénomènes transitoires 131

PETRESCU G. Sur les conditions de fonctionnement du réseaux triphasés déséquilibrés 139

GHEORGHIU I. S. (Prof. Ing.). Augmentation de la capacité de trafic d'une ligne de chemin de fer par dédoublement ou par électrification de la ligne 150

Pag.

MARINESCO MATEI G. Un nouveau circuit sélectif 157
TĂNĂSESCU T. (Ing.). Résonance des circuits couplés 162
PAVEL DORIN (Prof. Dr. Ing.). Beitrag zum Entwurf von Wasserturbinen . 179
LINTEŞ I. La balistique du bombardement aérien 182
ZAMFIRESCU GR. L'emplacement des longerons dans la profondeur des ailes de l'avion 202
TIPEI N. (Ing.). Sur la stabilité statique longitudinale des biplans 224
CERNESCU N. C. (Dr.). Der Sättigungszustand des Bodens und die Wasserstoffionenkonzentration der wässerigen Bodensuspensionen 242
CHIRIŢĂ CONST. D. (Ing. Dr.). Wiederholte Bodenauszüge mittels Ultrafiltration 261
OSTAŞCO AL. (Ing., Dir. Mus. Industrial). Topitoarele dela Baia-de-Aramă din timpuri preistorice până la sfârşitul sec. XVII 267
SFINTESCU CINCINAT I. Orientation phototropique en urbanisme 279

ERATA

In unserer Nr. 3—4/1941 sind einige Fehler durch die Schwierigkeiten des Drucks unterlaufen und zwar bei Artikel Nr. 547, Seite 273 die wir hiermit richtig stellen:

Auf Seite 273 erste Zeile statt *der* Kristalform *die*

» » 273 fehlt zwischen 19 und 20 Zeile folgender Satz: ...einer Reihe von Mikrophotographien, welche in polarisiertem Licht...

Auf Seite 273 in Zeile 23 soll es heissen: abhängig *ist.*

Auf Seite 276 in der 36 Zeile fehlt das Wort *entweder* nach dem Wort beeinflusst, weiter in der 39 Zeile kommt nach dem Wort demonstriert *oder* und bleibt bei Zeile 40 das Wort oder nach *b)* aus.

9

513.1 GÉOMÉTRIE

SUR LES RÉSEAUX (M)

par **R. Roşca**

Les réseaux (M) ont été rencontré la première fois par DARBOUX, *dans l'étude des surfaces minima non-euclidiennes, ils ont fait depuis l'objet de différentes recherches, notamment celles de* GUICHARD *et* ŢIŢEICA.

Nous nous proposons de mettre en évidence dans le présent travail certaines propriétés de ces réseaux, comme suit:

1. *Les réseaux focaux* (η), (η') *de la congruence* $(\beta\beta')$ *conjuguée aux réseaux* (M), (β) *et* (β') *polaires réciproques (vis-à-vis de la quadrique fondamentale Q) à deux réseaux* (M), (x) *et* (x') *en correspondance de* MOUTARD *sont décrits par les deux milieux de segment constant* $\beta\beta'$, *tout comme les réseaux focaux* (z), (z') *de* (xx') *sont décrits par les deux milieux du segment* $xx' = \beta\beta'$. *Ces quatre réseaux focaux convenablement choisis forment une suite de Laplace périodique.*

2. *Soient* (x') *et* (x'') *deux réseaux* (M), *il n'y a que deux réseaux* (x), $(\bar{x})$ *transformés de* MOUTARD *communs à ces réseaux et qui soient aussi des réseaux* (M), *la transformation se faisant par constantes permutées.*

3. *Si deux réseaux* (M) *transformés de* MOUTARD *l'un de l'autre sont tracés chacun sur une surface de* CLIFFORD *la congruence qui leurs est conjugué est une congruence* normale-isotrope (Δ). *La configuration du No.* 1 *fournit dans ce cas six congruences* (Δ) *dont quatre seulement sont des congruences au sens de* GUICHARD.

Dans une note[1]) TZITZEÏCA a montré comment on peut déduire d'un réseau (M), une infinité d'autres, moyenant la transformation de MOUTARD. Résumons les résultats obtenus par TZITZEÏCA. Les quatres coordonnées homogènes x_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$ d'un point x du réseau sont des solutions linéairement indépendantes du système:

$$\Theta_{uv} = h\Theta$$

$$\Theta_{uu} - \Theta_{vv} = \frac{h_u}{h}\Theta_u - \frac{h_v}{h}\Theta_v \tag{1}$$

[1]) *Bull. Sc. de l'Ac. Roumaine* T 2 (1913) p. 11—15.

où h est une solution de l'équation

$$(2) \qquad (\log h)\, u_v = h - \frac{1}{h} \cdot$$

Ces coordonnées vérifient les relations

$$(3) \qquad Sx^2 = 1 \quad , \quad Sx_u^2 = 0 \quad , \quad Sx_v^2 = 0$$

qui caractérisent les réseaux (M).

Un point x' du réseau transformé (M') est donné par les relations

$$(4) \qquad x' = \frac{2\xi}{R} - x$$

les fonctions ξ_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$ étant définies à l'aide des équations:

$$(5) \qquad \xi_u = xR_u \quad , \quad \xi_v = Rx_v$$

et R vérifiant le système complètement intégrable suivant:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &R_{uv} = hR \\ &R_{uu} - cR_{vv} = \frac{h_u}{h} R_u - c\,\frac{h_v}{h} R_v \; ; \; c = \frac{1}{1-m} = \text{const.} \end{aligned}$$

2. Ceci étant rappelé, nous nous proposons en premier lieu à mettre en évidence, une suite de LAPLACE périodique déduite, de la congruence (xx') conjuguée aux deux réseaux (x) et (x').

On sait que les réseaux (M) constituent une généralisation des surfaces minima euclidiennes [1]). La distance elliptique $xx' = d$ est donnée dans ce cas par la formule

$$\cos d = Sxx' = \frac{2}{R} Sx\xi - 1 = \frac{2}{m} - 1,$$

m étant une constante que nous appellerons module de transformation.

Désignons par $[\beta]$ et $[\beta']$ respectivement les surfaces polaires réciproques par rapport à l'absolu (Q) des surfaces (M), $[x]$ et $[x']$, on sait que ce sont des surfaces de même définition [2]).

Écrivons maintenant les coordonnées relatives des points β, et β' par rapport respectivement aux tétraèdres mobiles $(xx'\, x_u\, x_v)$ et $(x'\, x\, x'_u\, x'_v)$.

On a:

$$\beta = k_1 x + k_2 x' + k_3 x_u + k_4 x_v \quad ; \quad \beta' = k'_1 x' + k'_2 x + k'_3 x'_u + k'_4 x'_v$$

---

[1]) DARBOUX, Leçons sur la théorie des surfaces (Tome III, p. 472).

[2]) DARBOUX, *loc. cité.*

les conditions:

$$S\beta x = 0 \ , \ S\beta x_u = 0 \ , \ S\beta x_v = 0 \ , \ S\beta^2 = 1$$

et:

$$S\beta' x' = 0 \ , \ S\beta' x'_u = 0 \ , \ S\beta' x'_v = 0 \ , \ S\beta'^2 = 1$$

donnent:

$$(7) \quad \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{chh'}}\left\{ -h\cos dx + hx' + 2c\,\frac{R_u}{R}\,x_v + \frac{2}{m}\,\frac{R_v}{R}\,x_u \right\} \\ \beta' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{chh'}}\left\{ -h'\cos d.\,x' + h'x - \frac{2}{m}\,\frac{R_v}{R}\,x'_u - 2c\,\frac{R_u}{R}\,x'_v \right\} \end{cases}$$

d'où l'on déduit en tenant compte des relations: (3), (4), (5)

$$(8) \qquad S\beta\beta' = \cos d$$

L'angle des plans tangents aux points correspondants x et x' des deux surfaces (M), transformées de Moutard *l'une de l'autre, est donc egal à la distance constante xx'* [1]*, qui sépare ces deux points.*

Si nous normalisons les coordonnées des foyers [2] z et z' de la congruence $(x\,x')$; ils seront déterminés par:

$$z = \frac{x + x'}{2\cos\frac{d}{2}} \quad ; \quad z' = \frac{x - x'}{2\sin\frac{d}{2}}$$

et l'on voit que dans l'espace elliptique les foyers de la congruence (xx') conjugué au deux réseaux (M), (x) et (x') transformés de Moutard l'un de l'autre sont les deux milieux du segment constant xx'. Nous allons montrer qu'il en est de même pour la congruence $(\beta\beta')$ conjuguée aux deux réseaux (β), (β'), polaires réciproques vis-à-vis de (Q) respectivement aux réseaux (x), (x').

Comme on a:

$$(9) \qquad \beta_x = \frac{x_v}{h} \ , \ \beta_v = \frac{x_u}{h} \text{ et } \beta'_u = \frac{x'_v}{h'} \ , \ \beta'_v = \frac{x'_u}{h'}.$$

on déduit

$$|\,\beta\beta_u\,\beta'\beta'_u\,| = 0 \qquad |\,\beta\beta_v\,\beta'\beta'_v\,| = 0$$

---

[1]) La courbure de l'espace étant réduite à l'unité il y a dualité parfaite entre la notion d'angle et de distance.

[2]) Dans l'espace projectif où est localisé l'espace elliptique, z et z' sont déterminés par:

$$x = \frac{R(x + z')}{2} \quad ; \quad x' = \frac{R(x - x')}{2}$$

voir Ţiţeica, Géometrie différentielle projective des réseaux, page 81).

et les développables de la congruence $(\beta\beta')$ correspondent à $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$, c'est-à-dire $(\beta\beta')$ est une congruence conjuguée au sens de GUICHARD, aux réseaux (β), (β'). Les congruences $(\beta\beta_{-1})$, $(\beta'\beta'_{-1})$ et $(\beta\beta_1)$, $(\beta'\beta'_1)$ des réseaux à invariants égaux (β), (β') étant respectivement harmoniques aux réseaux focaux de $(\beta\beta')$, les foyers sur chaque rayon $\beta\beta'$ seront déterminés par l'intersection de $\beta\beta'$, avec respectivement les droites $\beta_u\,\beta'_u$, $\beta_v\,\beta'_v$ ou en vertu de (9) $x_v\,x'_v$, $x_u\,x'_u$.

Un calcul facile donne:

$$\eta = \frac{\beta + \beta'}{2\cos\frac{d}{2}}\,, \qquad \eta' = \frac{\beta - \beta'}{2\sin\frac{d}{2}} \tag{10}$$

et l'on vérifie que

$$\eta_u = \sqrt{\frac{1}{chh'}}\cdot\sin\frac{d}{2}\cdot\frac{R_v}{R}\cdot\eta'$$

$$\eta'_v = -\sqrt{\frac{1}{chh'}}\cdot\sin\frac{d}{2}\cdot\frac{R_u}{R}\cdot\eta \tag{11}$$

ce qui confirme notre proposition.

On voit maintenant que les droites $x_v\,x'_v$, $x_u\,x'_u$ sur lesquelles se trouvent respectivement les transformés de LAPLACE z_1, z'_{-1} des foyers du rayon xx_1, engendrent deux autres congruences au sens de GUICHARD, ayant pour réseaux focaux (η'), (z) et (η), (z'), d'où l'on *déduit que les réseaux* (z), (z'), (η), (η'), (z') *forment une suite de* LAPLACE *périodique comme l'avions annoncé.*

On a donc le résultat suivant. *Les foyers* η, η' *de la congruence* $(\beta\beta')$ *conjuguée aux deux réseaux* (β), (β') *polaires réciproques vis-a-vis de* (Q) *aux deux réseaux* (M), (x) *et* (x') *en correspondance de* MOUTARD, *sont les deux milieux du segment constant* $\beta\beta'$ *tout comme les foyers* z, z' *de* (xx') *sont les milieux du segment* $xx' = \beta\beta'$, *de plus ces quatre foyers convenablement choisis forment une suite de* LAPLACE *périodique.*

3. Soit maintenant (x') et (x'') les deux réseaux (M) transformés de MOUTARD du réseau (x), correspondants aux deux solutions R' et R'' du système (6) et aux deux modules constants m' et m''.

Suivant le theorème général de permutabilité il existe ∞^1 réseaux $(\bar{x})$ transformés de MOUTARD de (x') et (x''), *nous allons montrer que parmi ces* ∞^1 *réseaux il y a un seul* $(\bar{x})$ *excepté* (x) *qui soit un réseau* (M), *le passage de* $\bar{x}$ *a* x' *et* x'' *ayant lieu respectivement suivant les modules constants* m'' *et* m'.

Dans le cas général de permutabilité on a les formules [1]):

$$(12)\qquad (x'+x)_u = \frac{R'_u}{R'}(x-x') \qquad (x'-x)_v = -\frac{R'_v}{R'}(x+x')$$

$$(x'+x)_u = \frac{R''_u}{R''}(x-x'') \qquad (x''-x)_v = -\frac{R''_v}{R''}(x+x'')$$

$$(13)\qquad \bar{x} = x - \frac{R''}{\rho'}(x''-x')$$

les deux solutions ρ' et ρ'' respectivement de:

$$x'_{uv} = h'x' \quad x''_{uv} = h''x''$$

qui réalisent la correspondance avec $\bar{x}$ satisfont à:

$$(15)\qquad \rho' R' + \rho'' R'' = 0.$$

Exprimons maintenant que:

$$(43)\qquad S\bar{x}^2 = 1$$

cette condition nécessaire est aussi suffisante pour que $(\bar{x})$ soit un réseau (M) comme le montrent les équations analogues à (12) qui lient $\bar{x}$ à x' ou x''.

On déduit de (13)

$$(17)\qquad \frac{R''}{\rho'}(Sx'\,x''-1) = Sx'\,x - Sx''\,x = \frac{2}{m'} - \frac{2}{m''}$$

d'où en posant $\cos D = Sx'\,x''$ il vient:

$$(18)\qquad \rho' R' = R'\,R''\,\frac{\cos D - 1}{Sxx' - Sxx''}$$

et le tout se réduit a prouver que cette expression de $\rho' R'$ vérifie les deux équations:

$$(19)\qquad (R'\rho')_u = R'^2\left(\frac{R''}{R'}\right)_u$$

$$(R'\rho')_v = -R'^2\left(\frac{R''}{R'}\right)_v$$

posons maintenant

$$Sx'\,x = \cos d'$$

$$Sx''\,x = \cos d''$$

[1]) Voir ŢIŢEICA, *loc. cité*, page 89.

les équations (12) donnent:

$$(\cos D)_u = \frac{R'_u}{R'}(\cos d'' - \cos d' + 1 - \cos D) + \frac{R'_u}{R''}(\cos d' - \cos d'' + 1 - \cos D)$$

(20)

$$(\cos D)_v = \frac{R'_v}{R'}(\cos d' - \cos d'' + 1 - \cos D) + \frac{R''_v}{R''}(\cos d'' - \cos d' + 1 - \cos D)$$

or ces valeurs de $(\cos D)_u$ et $(\cos D)_v$ sont précisément celles que l'on obtient en écrivant que l'expression $\rho' R'$ de (18) satisfait à (19) et la première partie de notre proposition est ainsi établie.

On déduit encore de (13)

$$S\bar{x}x' = \cos\bar{d}' = \cos d' - \frac{R''}{\rho'}(\cos D - 1)$$

(21)

$$S\bar{x}x'' = \cos\bar{d}'' = \cos d'' + \frac{R''}{\rho'}(\cos D - 1)$$

et en tenant compte de (17) on trouve:

$$\cos\bar{d}' = \cos d'' \quad \cos\bar{d}'' = \cos d'.$$

Donc le passage de deux réseaux (M), (x') *et* (x'') *aux deux réseaux* (M), (x), *et* $(\bar{x})$ *transformés de* MOUTARD *communs s'effectue par constantes permutées.*

Si nous posons maintenant $Sx\bar{x} = \cos\bar{D}$, on déduit de (13), (17) et (21) les deux relations:

$$\cos\bar{D} - 1 = \frac{R''}{\rho'}(\cos d' - \cos d'')$$

(22) et

$$\frac{R''}{\rho'}\sin\frac{D}{2} = \sin\frac{\bar{D}}{2}$$

La première formule (22) montre que dans l'espace elliptique simple [1]) si les deux modules m', m'' *sont égaux,* $\bar{x}$ *coïncide avec le point de départ* x. La seconde formule (22) montre que le *réseau harmonique commun* aux quatre congruences (xx'), $(x'\,\bar{x})$, $(\bar{x}\,x'')$, $(x''\,x)$ est décrit par le point de rencontre

$$t = \frac{x' - x''}{2\sin\frac{D}{2}} = \frac{x - \bar{x}}{2\sin\frac{D}{2}},$$

des deux diagonales $x\bar{x}$ et $x'\,x''$.

[1]) Dans l'espace elliptique simple la longueur de la droite est π, tandis que dans l'espace elliptique double ou sphérique, elle est égale à 2π.

4. Désignons par λ et λ' les pôles des plans focaux de la congruence (xx'), correspondant respectivement aux deux foyers

$$z = \frac{x + x'}{2\cos\frac{d}{2}} \text{ et } z' = \frac{x - x'}{2\sin\frac{d}{2}}.$$

L'angle θ de ces plans est donné par la formule:

$$S\lambda\lambda' = \cos\theta = \frac{S_i \frac{\partial}{\partial r_i} \left| r z z_u z_v \right| \frac{\partial}{\partial r'_i} \left| r' z' z'_u z'_v \right|}{ds\, ds'}$$

ds et ds' etant les éléments d'arcs de $[z]$ et $[z']$.

En effectuant les calculs on trouve la formule simple:

$$\cos\theta = \frac{h - h'}{h + h} \tag{23}$$

il est donc naturel de se demander s'il existe des réseaux (M) en correspondance de MOUTARD, tels que les invariants h et h' soient égaux. On sait qu'en général [1]) si on suppose $h = h'$ on est conduit aux deux cas distincts suivants, $h = 0$, $h = 1$.

En imposant la condition que le réseau (x) soit un réseau (M) la surface $[x]$ est une développable circonscrite à Q si $h = 0$ et une surface de CLIFFORD [2]) si $h = 1$; c'est ce dernier cas que nous envisagerons.

Comme $x_{uv} = x$, $x'_{uv} = x'$ la solution auxiliaire R satisfait aux équations

$$\frac{R_u R_v}{R^2} = 1 \quad \frac{R_{uu}}{R} - \left(\frac{R_u}{R}\right)^2 = 0$$

$$R_{uu} - \frac{R_{vv}}{1 - m} = 0 \quad \frac{R_{vv}}{R} - \left(\frac{R_v}{R}\right)^2 = 0$$

d'où l'on déduit

$$R = e^{bu + \frac{v}{b} + \text{const.}}$$

ou l'on a posé

$$b = \frac{1}{(1 - m)^{\frac{1}{4}}}.$$

---

[1]) BIANCHI, Lezioni di Geometria differenziale, Vol. II, parte I, page 45.

[2]) COOLIDGE, *loc. cité*, page 129.

Si nous nous rapportons maintenant à la formule (23) nous voyons que si $h = h'$ les deux plans focaux de la congruence sont conjugués par rapport à (Q) tout comme les foyers, propriété qui caractérise les congruences de normales aux surfaces à courbure absolue nulle, congruence que nous désignons dans ce qui suit par congruence (Δ).

On a donc le résultat suivant:

Si les deux réseaux (M) *transformées de* MOUTARD *l'une de l'autre sont situés sur des surfaces de* CLIFFORD, *la congruence qui leur est conjuguée est une congruence* (Δ).

Il est manifeste que la congruence conjuguée aux deux surfaces $[\beta]$ et $[\beta]'$ polaires réciproques vis-à-vis de Q des surfaces précédentes est aussi une congruence (Δ).

Remarquons en plus que si $h = h' = 1$ les foyers (η'), (z) et (η), (z') *des congruences* $(\eta' z)$ *et* $(\eta z')$ *sont conjugués vis-a-vis de* (Q), *donc les deux droites* $z\eta$ *et* $z'\eta'$ *sont polaires réciproques et comme les réseaux* (z) (z'), (η'), (z) *forment une suite de* LAPLACE *périodique ces deux droites sont respectivement normales aux surfaces à courbure absolue nulle* $[z]$, $[\eta]$ *et* $[z']$, $[\eta']$, *il résulte de là que les congruences* $(\eta' z)$, $(\eta z')$, $(z\eta)$ *et* $(\eta' z')$ *sont aussi des congruences* (Δ), *seulement les deux dernières ne sont plus de congruences au sens de* GUICHARD.

5. Considérons enfin deux surfaces de CLIFFORD, $[x']$, $[x'']$, transformées de MOUTARD d'une même surface de CLIFFORD $[x]$. De la relation générale (20) on déduit puisque les quantités

$$\frac{R'_u}{R'}, \frac{R'_v}{R'}, \frac{R''_u}{R''}, \frac{R''_v}{R''}$$

sont des constantes

$$\cos D - 1 = (\cos d' - \cos d'') \cdot \frac{R''_u - R'_u}{R''_u + R'_u} + k e^{-(B_v + A_u)}$$

où

$$A = \frac{R'_u}{R'} + \frac{R''_u}{R''}, \quad B = \frac{R'_v}{R'} + \frac{R''_v}{R''}.$$

Mais comme $\cos d' = \cos d''$ on a vu entraîne $\cos D = 1$ la constante K doit être nulle, $D = x' x''$ est donc constant dans le cas présent. Ceci dit on déduit des relations (13) et (17) en tenant compte de $D = \text{const}$, *que la seconde surface* (M), (x), *transformée de* MOUTARD *commune à* (x') *et* (x'') *est aussi une surface de* CLIFFORD, *les quatre réseaux en jeu forment ainsi une configuration invariable quand on fait varier* u *et* v.

La congruence $(x'\ x'')$ étant composée de rayons joignant les points correspondants de deux surfaces (x'), (x'') mutuellement applicables, de manière que chaque paire de points détermine toujours la même distance, est soit une congruence isotrope soit une congruence (Δ) [1]. Il est aisé de voir que $(x'\ x'')$ est une congruence (Δ); en effet elle coupe sous des angles constants les deux congruences (Δ), (xx') et (xx''); il est donc possible d'assembler les rayons de $(x'\ x'')$ en familles paratactiques droites ou gauches, propriété appartenant aux congruences (Δ).

On peut vérifier par le calcul que les deux foyers de $(x'\ x'')$

$$t' = \frac{x' + x''}{2\cos\frac{D}{2}}\ ,\quad t = \frac{x' - x''}{2\sin\frac{D}{2}}$$

décrivent des surfaces à courbure absolue nulle et il est bien évident que les développables de $(x'\ x'')$ ne correspondent plus à $u = \text{const}$, $v = \text{const}$.

Mêmes conclusions pour la congruence $(x\bar{x})$, qui a d'ailleurs une nappe focale commune avec $(x'\ x'')$, sur laquelle est tracé le réseau (t) harmonique aux quatres congruences (xx'), $(x'\ \bar{x})$, $(\bar{x}x'')$, $(x''\ x)$.

[1] COOLIDGE, Non Euclidian Geometry.

526.9 TOPOGRAPHIE

„LE RAPPORTEUR AUTO-RÉDUCTEUR"

— BREVET ROUMAIN —

par **D. Ciurileanu**

Cet appareil, conçu par l'ingénieur D. CIURILEANU *de Bucarest, sert à rapporter les points d'un plan par les coordonnées polaires, faisant en même temps la réduction à l'horizon des distances, l'opération qui jusqu'ici était faite par des calculs tout à fait séparés et anticipés au rapportage des points.*

Le dispositif auto-réducteur se compose:

a) *d'une alidade sur laquelle on met la distance lue sur le terrain;*

b) *d'une graduation spéciale pour l'angle vertical, sur laquelle on place l'alidade à l'angle vertical desiré;*

c) *d'un petit équerre qui réalise la projection de la distance oblique sur la direction du rayon principal du rapporteur, tandis qu'une aiguille pique le point cherché.*

Le rapporteur réduit également les distances lues à la stadia d'après la formule de $\cos^2\alpha$.

Dans ce cas-là les divisions verticales sont faites avec la formule $\cos\gamma = \cos^2\alpha$.

Les « Instructions » qui sont gravées sur le rapporteur donnent tous les renseignements de son emploi.

Les avantages de cet appareil sont:

1. *Un rendement de travail deux fois plus élevé qu'avec les autres rapporteurs qui ne donnent pas la réduction à l'horizon.*

2. *Il est beaucoup moins coûteux que les autres appareils similaires, ayant une construction simple qui peut être réalisée même dans les circonstances actuelles. Son prix est 3—5 fois moins coûteux.*

3. *Il ne produit aucune détérioration du plan, sa rotation étant très légère sur un seul point, même sur les planches métalliques.*

I. L'OBJET DE L'APPAREIL

Le rapporteur auto-réducteur — que nous proposons ici — est destiné à rapporter les points d'un plan par *les coordonnées polaires* — azimut et

distance — faisant en même temps *la réduction a l'horizon des distances lues à la stadia*, — l'opération qui jusqu'ici était faite par un calcul tout à fait séparé et anticipé au rapportage des points.

II. LA DESCRIPTION DU RAPPORTEUR

Le rapporteur auto-réducteur contient les pièces suivantes (fig. 1):

1. *Le cercle d'aluminium* — 24 cm diamètre — gradué centésimal (0^c — 400^c), ayant les grades subdivisés en demigrades = 50′.

Fig. 1

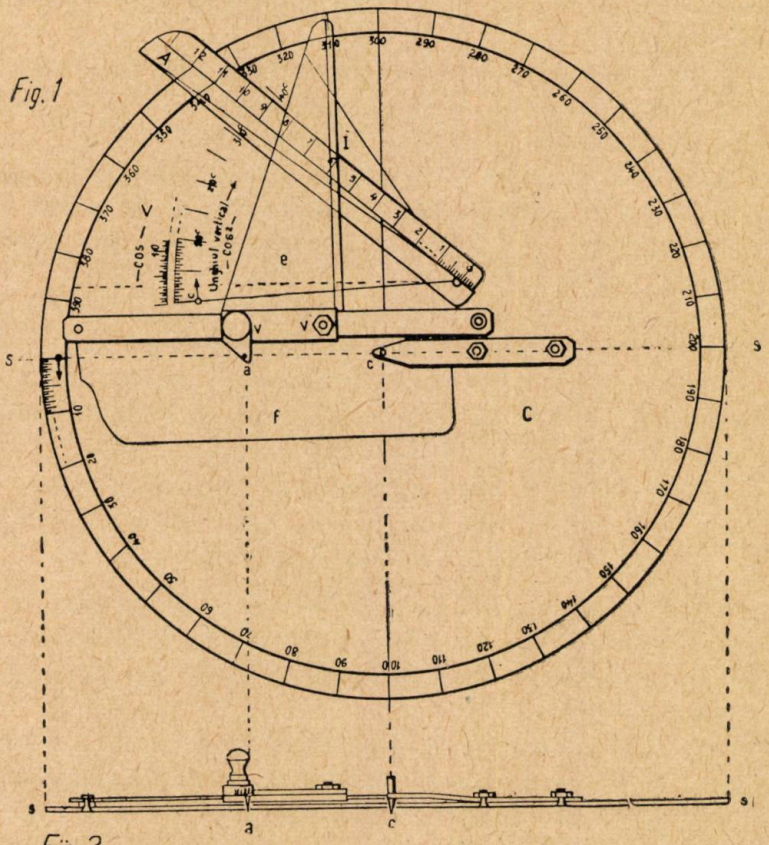


Fig. 2

Le disque métalique a une fenêtre radiale correspondante à la division 0.

2. *Des graduations spéciales V pour l'angle vertical* de 0^c — 50^c, appliquées toujours sur le disque, et servant à la réduction à l'horizon, se trouvent au-dessus de ladite fenêtre.

3. *L'alidade des distances A* est articulée au centre du segment des graduations verticales. Elle est prévue d'une petite règle divisée en

millimètres pour les échelles habituelles $\left(\frac{1}{1000}, \frac{1}{2000}, \frac{1}{5000}\right)$ la division 0 étant placée exactement au centre de l'articulation.

Sur cette alidade on peut fixer, au besoin, des réglettes à d'autres échelles $\left(\frac{1}{2500}\right)$ etc.

La ligne parfaitement droite de la réglette passe rigoureusement par le centre de l'articulation. Elle doit être aussi parallèle au rayon d'origine 0^c du rapporteur, quand l'alidade repose sur la division 0^c de l'angle vertical.

4. *L'aiguille centrale* c du rapporteur est fixée avec deux vis a côté de ladite fenêtre, de sorte qu'on peut corriger toujours sa position au centre du rapporteur.

5. *L'équerre des distances* e — construit en celluloïde-coulisse sur un rail parfaitement parallèle au rayon d'origine 0^c. Il est prévu d'une aiguille qui parcourt, dans l'espace de ladite fenêtre, exactement la direction de ce rayon.

La ligne de foi verticale *l* de l'équerre (11 cm hauteur) est tellement disposée, qu'elle coupe exactement la division zéro de la règlette quand l'aiguille de l'équerre se trouve au centre du rapporteur.

Deux vis *VV'* servent au réglage de l'angle droit de l'équerre, en même temps avec ladite position de l'aiguille.

6. *Un boîte spéciale* protège le rapporteur après son emploi.

III. LE PRINCIPE DE L'APPAREIL

Le principe de cet appareil est celui de mettre sur la direction azimutale d'un point, la distance réduite directement à l'horizon par *la projection de la distance inclinée* lue sur le terrain, — opération réalisée par l'appareil lui-même.

On fait une réconstitution dans l'appareil *de ce qui se passe sur le terrain* (fig. 3), c'est-à-dire la réconstitution de la distance inclinée, que nous rabattons puis dans le plan du rapporteur avec l'angle α vertical, lu sur le terrain. La distance *oa* projetée par le petit équerre sera précisement celle réduite à l'horizon parce que $d = D\cos\alpha$. C'est le cas des distances mésurées directement sur le terrain.

Mais nous nous sommes proposé spécialement de réduire à l'horizon *les distances lues sur la stadia*, parce que c'est le cas le plus fréquent

Alors on sait que la réduction à l'horizon est faite par la formule $d = D\cos\alpha^2$, — qui prétend une réduction répétée deux fois:

$$D.\cos\alpha \times \cos\alpha.$$

Pour *réduire cette opération à une projection simple*, — réalisable par un seul mouvement de l'équerre, — nous devons faire une graduation tout à fait spéciale, d'après la formule cos $\gamma = \cos^2\alpha$ dans laquelle γ *est l'angle auxiliaire* dont le cos simple est égal dans sa valeur naturelle à celle du $\cos^2\alpha$.

Pratiquement cette opération est faite à l'aide de la table des valeurs naturelles trigonométriques [1]) en prenant les valeurs naturelles de $\cos^2$ à tous les angles, de grade en grade, de 0^c — 50^c, et puis en cherchant dans la même table, — mais dans les valeurs *cos* simples, — qui sont les angles qui ont ces valeurs simples correspondantes aux valeurs de $\cos^2$? Puis nous graduons avec ces angles nouvelles, un arc de cercle, (0—50^c), ayant soin de numéroter les nouvelles divisions obtenues avec le nombre de degrés anciens, c'est-à-dire celles de Cos^2.

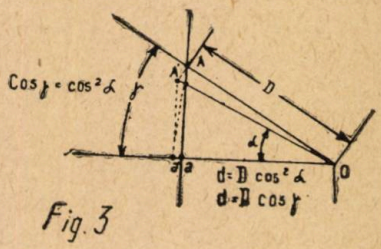


Fig. 3

Mentionnons que ces angles auxiliaires sont plus grands que les angles normaux et que *pour l'angle de* $50^c = 66^c.66'.67''$ *la distance est réduite* à *la moitié de sa valeur*, tandis que le cos simple, pour le même angle de 50^c, fait une réduction seulement de 30%, tout en restant 0,70%.

Donnons ici, un moyen de contrôle de l'appareil: En mettant l'allidade à 50^c, — et l'équerre avec sa ligne de foi à la division 100 mm, lue obliquement,—quand on descend l'allidade à 0^c, on doit lire à la même ligne de foi restée toujours immobile, exactement 50 mm, c'est-à-dire la moitié de 100 mm.

IV. MODE D'EMPLOI

L'instruction d'emploi est imprimée sur le rapporteur même:

1. *On met le rapporteur* avec son aiguille centrale sur le point de départ, pris sur le papier millimétrique ou sur le papier simple mais toujours carroyé (de 8 cm en 8 cm, ou 10 cm en 10 cm).

2. En orientat 0^c du rapporteur dans la *direction du Nord*, — donnée par la linéature du papier millimétrique, ou, dans le cas du papier simple, donnée par la simétrie des divisions du cercle, en rapport à la linéature de son carroyage, — on trace sur le plan *une petite ligne* verticale, tout près de cette division 0^c.

[1]) Tables des valeurs naturelles trigonométriques de 10'' en 10'' par l'Ing. D. CIURILEANU, 1923 tip. L'Imprimerie « Steaua », Bucarest.

Puis nous tournons le rapporteur autour de son centre jusqu'à la position dans la quelle nous avons à cette petite ligne la lecture de l'azimut vers le point suivant.

3. On place, l'allidade réductrice à l'angle vertical qu'on a lu sur le terrain vers ce point.

On glisse l'équerre jusqu'à la position dans laquelle sa ligne de foi donne sur les divisions de la réglette la distance à stadia lue sur le terrain.

Puis on pique le point cherché à l'extrémité de sa distance du premier point, réduite à l'horizon.

Bien compris que pour les distances horizontales l'allidade reste toujours à la division 0^c verticale, c'est-à-dire parallèle au rail de l'équerre.

4. *On verifie de temps en temps la position des aiguilles;*

a) *l'aiguille centrale*, qui doit rester toujours au centre du rapporteur, peut être corrigée par ses deux vis de fixation, en le plaçant préalablement à l'intersection de deux diamètres perpendiculaires qui doivent passer par les divisions $0^c - 200^c$, dans le même temps avec $100^c - 300^c$, et en serrant ces deux vis dans la position qui satisfait cette condition de centrage;

b) *l'aiguille de l'équerre* qui donne les distances, doit marquer sur la reglette des distance mis à 0^c d'inclinaison, la lecture d'une distance de 100 m quand son point aigué est placé sur le plan à une distance rigoureuse exacte de 100 m (à la même échelle) du point central du rapporteur.

Si non, on fixe avec les vis de l'équerre l'aiguille de distance à la position qui satisfait ladite condition.

V. LES CARACTÉRISTIQUES DU RAPPORTEUR AUTO-RÉDUCTEUR

1. *Ce rapporteur peut donner directement les distances réduites à l'horizon*, par une opération tout à fait simple d'après les dates du terrain, sans aucun calcul.

2. *Il est très précis*, en garantant 1/10 mm, dans la position d'un point piqué sur le plan.

3. *Il ne produit aucun détérioration du plan* par sa rotation très fine sur un seul point, même sur les planches métalliques.

4. *Son prix est très réduit*, en comparaison avec les appareils similaires qui sont au moins 5 fois plus chers, sans avoir l'avantage de la réduction à l'horizon.

5. *Il est d'une construction très simple*, qui peut être réalisée même dans les circonstances actuelles.

531.4 MÉCANIQUE

SUR LES SYSTÈMES DE FORCES SOUS L'ACTION DESQUELLES UN MOBILE PARCOURT UNE TRAJECTOIRE DONNÉE

par **A. Stoenescu**

L'auteur se propose de résoudre le problème de déterminer une force $F(X, Y)$ sous l'action de laquelle un mobile $M(x, y)$ parcourt une trajectoire plane donnée, en connaissant une relation entre les variables: $\xi(X, Y, x, y) = 0$, qui exprime une propriété géométrique donnée de la force.

On établit de cette manière une équation différentielle du premier degré qui avec la rélation de condition donnée forme un système qui détermine les inconnues cherchées X, Y.

Nous nous occuperons, dans ce qui suit, de résoudre le problème suivant:

Soit un mobile M, de masse m, qui a comme trajectoire la courbe plane $y = f(x)$. Déterminons une force $F(X, Y)$ qui doit remplir certaines conditions, de telle manière que sous l'action de cette force le mobile parcourre la trajectoire donnée.

En général, nous exprimerons cette condition par une expression de la forme:

$$\xi(X, Y, x, y) = 0 \qquad (1)$$

qui exprimera une propriété du vecteur-force: ce vecteur doit passer par un point fixe, il doit être parallèle à une direction donnée, une de ses composantes est connue en fonction des coordonnées x, y du mobile M, il existe une relation entre ses composantes X, Y etc.

Considérons l'équation de la trajectoire.

$$y = f(x) \qquad (2)$$

et dérivons-la successivement par rapport au temps.

Nous obtenons:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{df}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{4}$$

Mais:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m} \; ; \; \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m}.$$

L'équation (4) devient de cette manière

$$Y - X\frac{df}{dx} = m\frac{d^2f}{dx^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \tag{5}$$

d'où l'on a:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{Y - X\dfrac{df}{dx}}{m\dfrac{d^2f}{dx^2}}. \tag{6}$$

Mais comme les composantes X et Y sont fonctions de x et y et, en vertu de la relation (2), elles sont fonctions *seulement* de la variable x, en dérivant la relation (5) par rapport à t et en simplifiant, nous obtenons:

$$\frac{dY}{dx} - 3X \cdot \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{dX}{dx} \cdot \frac{df}{dx} = m\frac{d^3f}{dx^3} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

en remplaçant le terme $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$ par sa valeur donnée par l'équation (6), nous obtenons la relation fondamentale:

$$\frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{dY}{dx} - \frac{d^3f}{dx^3} \cdot Y = \frac{df}{dx} \cdot \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{dX}{dx} - X\left[\frac{df}{dx} \cdot \frac{d^3f}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)^2\right]. \tag{7}$$

Cette relation avec l'équation de conditions (1), *forme un système de* 2 *équations à* 2 *inconnues, qui une fois résolu, nous donnera les composantes* X, Y *qui déterminent complètement la force résultante cherchée* F

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} \; ; \cos \sphericalangle (F, \, 0x) = \frac{X}{F} \; ; \; \cos \sphericalangle (F, \, 0y) = \frac{Y}{F}.$$

Observation. Dans la solution du système (1), (7) on introduit une constante d'intégration de l'équation différentielle linéaire du premier

degré (7). Cette constante peut se déterminer immédiatement quand sont données *la position et la vitesse initiales* du mobile M, par la relation (6).

Exemple I. Considérons comme trajectoire du mobile M, la parabole

$$x^2 = 2py. \tag{8}$$

a) Nous nous proposons de déterminer *la force $F(X, Y)$ qui passe par le foyer A de la parabole et sous l'action de laquelle le mobile parcourt la parabole.*

Nous avons: $$\frac{Y}{X} = \frac{y - \frac{p}{2}}{x}$$

en tenant compte de (8):

$$Y = X\left(\frac{y}{x} - \frac{p}{2x}\right) = X\,\frac{x^2 - p^2}{2px}. \tag{9}$$

Des équations (8) et (9) l'on trouve:

$$y = \frac{x^2}{2p}; \frac{df}{dx} = \frac{x}{p}; \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{p}; \frac{d^3f}{dx^3} = 0$$

$$\frac{dY}{dx} = X\frac{x^2 + p^2}{2px^2} + \frac{dX}{dx}\cdot\frac{x^2 - p^2}{2px}.$$

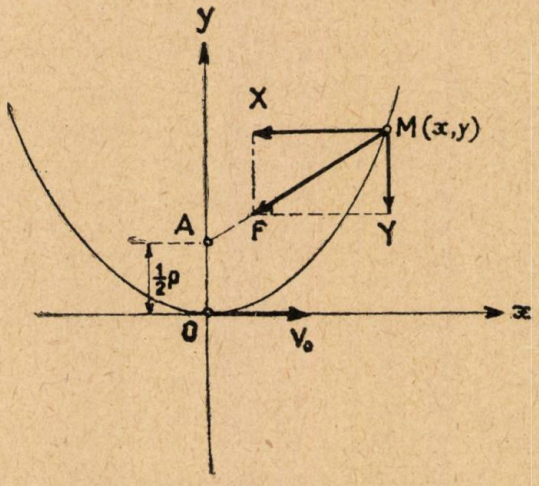


Fig. 1.

En introduisant ces valeurs dans l'équation (7), faisant les simplifications nécessaires et séparant les variables

$$\frac{dX}{X} = \frac{(p^2 - 5x^2)\,dx}{x(x^2 + p^2)} = \frac{p^2 + 3x^2}{x(x^2 + p^2)}\cdot dx - \frac{8x}{x^2 + p^2}\cdot dx$$

En intégrant l'on obtient:

$$\log X = \log x\,(x^2 + p^2) - 4\log(x^2 + p^2) + \log C.$$

C étant une constante.

Il résulte que:

$$X = \frac{Cx}{(x^2 + p^2)^3}$$

et de l'équation (9):

$$Y = \frac{C(x^2 - p^2)}{2p\,(x^2 + p^2)^3}.$$

Donc:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{C}{2p\,(x^2 + p^2)^2} = \frac{C}{8p^3\left(y + \frac{p}{2}\right)^2} = \frac{C}{8p^3 \cdot MA^2}$$

donc *la force est inversement proportionnelle au carré de la distance.* Nous trouvons donc, dans le cas de la parabole *la formule de la force d'attraction de* Newton.

La détermination de la constante C se fait en connaissant les conditions initiales.

Si nous supposons qu'au moment $t = 0$, le mobile se trouve au sommet 0 de la parabole et a la vitesse v_0 dirigée suivant $0x$, en employant la relation (6) nous obtiendrons:

$$C = -2mp^4 v_0^2$$

b) En continuant de considérer la trajectoire parabolique de l'exemple précédent, nous nous proposons de déterminer la force F qui produit le mouvement du mobile sur la trajectoire, dans le cas où sa composante X est donnée par la relation

$$X = -mkx \qquad (10)$$

k étant une constante.

De l'équation (7) on obtient en introduisant les éléments connus

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{4mk}{p}.x$$

d'où l'on déduit:

$$Y = -\frac{2mk}{p}x^2 + C = -4mky + C.$$

En supposant qu'au moment initial le mobile est en 0 avec la vitesse v_0, il résulte de (6)

$$C = \frac{m}{p}v_0^2.$$

Donc

$$Y = -4\ mky + \frac{m}{p}\varphi_0^2. \qquad (11)$$

De (10) et (11), l'on a:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0\ ;\ \frac{d^2y}{dt^2} + 4\,Ky = \frac{\varphi_0^2}{p}.$$

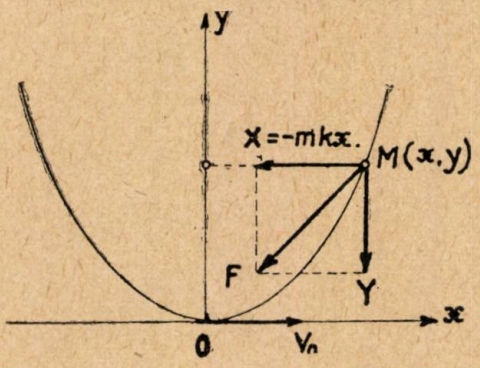


Fig. 2.

En intégrant et tenant compte des conditions initiales:

$$x = \frac{\varphi_0}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k}\ .\ t\ ;\ y = \frac{\varphi_0^2}{4kp}\left[1 - \cos 2\sqrt{k}t\right] = \frac{\varphi_0^2}{2pk} \sin^2 \sqrt{k}t.$$

Exemple II. Considérons comme trajectoire du mobile M la chaînette

$$y = \frac{h}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right). \qquad (12)$$

Nous nous proposons de déterminer la force F qui produit le mouvement du mobile sur la chaînette, en la supposant parallèle à l'axe Oy $(X = 0)$.

De l'équation (12):

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right)\ ;\ \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{2h} \cdot \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)\ ;\ \frac{d^3f}{dx^3} = \frac{1}{2h^2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right).$$

En introduisant ces valeurs dans (7)

$$\frac{dY}{Y} = \frac{e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}}{h\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)}.$$

Il résulte

$$\log Y = \log (e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}) + \log C.$$

C étant une constante.

$$Y = C (e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}) = \frac{2C}{h} y = F$$

c'est-à-dire *une force proportionnelle à la distance du point à l'axe Ox.*

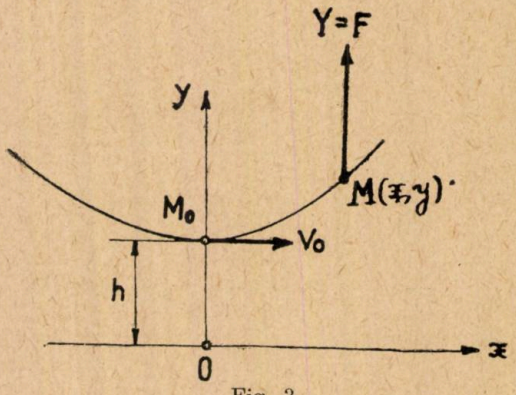


Fig. 3.

La constante C se détermine par les conditions initiales en supposant au moment $t = o$ le mobile situé en $M_0 (o, h)$ et ayant la vitesse v_0, il résulte de (6):

$$c = \frac{m v_0^2}{2h}.$$

Nous pouvons étudier le problème d'une manière absolument analogue, pour le cas général, où les variables y, X, Y ne peuvent pas être exprimées explicitement en fonction de x.

En partant de l'équation de la trajectoire:

$$\varphi (x, y) = 0 \qquad (13)$$

en dérivant par rapport au temps une première fois nous obtenons:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0 \qquad (14)$$

et une seconde fois:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot X + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot Y\right) = 0. \qquad (15)$$

En résolvant le système formé par les équations (14) et (15) par rapport à $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ et en notant:

$$\eta = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}X + \frac{\partial\varphi}{\partial y}Y}{m\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]} \tag{16}$$

nous trouvons:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\eta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\;;\quad \frac{dy}{dt} = \mp\sqrt{\eta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{17}$$

En dérivant de nouveau la relation (15) par rapport au temps, et faisant les simplifications nécessaires, nous obtenons la *relation fondamentale*:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{3}{m}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}X - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}Y\right) +$$

$$+\frac{1}{m}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial X}{\partial y}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right] = 0. \tag{18}$$

Le système d'équations (17), nous permet d'éliminer les expressions $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ de l'équation (18).

De cette manière, les relations (1) et (18) forment un système qui résolu, nous donne les valeurs des composantes X et Y de la force cherchée F.

Pour

$$\varphi(x, y) = y - f(x) = 0$$

et tenant compte que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{df}{dx}\;;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{d^2f}{dx^2}\;;\quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} = -\frac{d^3f}{dx^3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 1 \quad ;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad ;\quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3} = 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{df}{dx} = \frac{dX}{dx}\;;\quad \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{df}{dx} = \frac{dY}{dx}$$

à l'aide de la relation (18), nous retrouvons la relation (7).

Le problème offre d'intéressantes interprétations en employant les coordonnées intrinsèques, et peut être généralisé pour des trajectoires dans l'espace.

532.5 MÉCANIQUE DES FLUIDES

SUR LE MOUVEMENT GÉNÉRAL D'UN FLUIDE PARFAIT

par **I. Cârstoiu**

Comme suite à une étude publiée antérieurement, l'auteur montre comment, en se plaçant à un point de vue unitaire, se généralisent les théorèmes de la circulation et du flux tourbillonnaire, les équations de CAUCHY *et l'équation de* BERNOULLI, *pour le mouvement général d'un fluide parfait.*

1. Dans le volume précédent de ce *Bulletin* [1]), nous avons étudié le mouvement d'un fluide parfait, dans l'hypothèse que les accélérations des divers points du fluide dérivent d'un potentiel.

Nous avons montré, dans ce cas, que les théorèmes de LORD KELVIN, de LAGRANGE, etc., sont des propriétés globales d'une certaine équation différentielle.

C'est surtout le point de vue unitaire, qui donne l'originalité de notre étude.

Ainsi, voulons nous maintenant étendre cette méthode pour le mouvement d'un fluide parfait, dans le cas général.

PAUL APPELL, dans son célèbre *Traité de Mécanique Rationnelle* (Tome 3-ème, troisième édition, 1928, p. 596—605), a étudié la question profondément, mais d'une manière qui diffère de la nôtre.

En plus, nous donnons une généralisation intéressante de l'*équation de* BERNOULLI.

2. Considérons l'équation du mouvement d'un fluide parfait

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \tag{1}$$

[1]) Nouveaux points de vue sur quelques théorèmes fondamentaux de la Mécanique des Fluides, *Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarest*, XIII (1942), no. 1—2.

où $\frac{d\bar{v}}{dt}$ désigne l'accélération de la particule fluide (x, y, z) de densité ρ et sur laquelle actionnent la force extérieure $\bar{g}$ (par unité de masse) et la pression p.

Nous allons supposer que le vecteur de position $\bar{r}(x, y, z)$ est une fonction des coordonnées initiales (a, b, c) et du temps t

$$\bar{r} = \bar{r}(a, b, c, t).$$

Multiplions scalairement, à un moment donné t (t constant), l'équation (1) par $d\bar{r}$. On a

$$\frac{d\bar{v}}{dt} d\bar{r} = \bar{g} d\bar{r} - \frac{1}{\rho} dp$$

que nous allons intégrer dans l'intervalle de temps (t_0, t). On a

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\bar{v}}{dt} d\bar{r} = \int_{t_0}^{t} \bar{g} d\bar{r} dt - \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\rho} dp\, dt.$$

En intégrant par parties le premier membre, on obtient

$$(2) \qquad \bar{v} d\bar{r} - \bar{v}_0 d\bar{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \bar{g} d\bar{r}\, dt - \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\rho} dp\, dt + \int_{t_0}^{t} d\left(\frac{1}{2} V^2\right) dt.$$

Or, t étant supposé comme constant, on a

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial a} da + \frac{\partial \bar{r}}{\partial b} db + \frac{\partial \bar{r}}{\partial c} dc$$

de sorte que l'équation (2) devient

$$(3) \qquad \bar{v} d\bar{r} - \bar{v}_0 d\bar{r}_0 = (\bar{A}_1 + \bar{A}_2)\, d\bar{r}_0 + d \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2} V^2\, dt$$

avec

$$\bar{A}_1 \left(\int_{t_0}^{t} \bar{g} \frac{\partial \bar{r}}{\partial a} dt \;,\; \int_{t_0}^{t} \bar{g} \frac{\partial \bar{r}}{\partial b} dt \;,\; \int_{t_0}^{t} \bar{g} \frac{\partial \bar{r}}{\partial c} dt \right)$$

$$\bar{A}_2 \left(- \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} dt \;,\; - \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} dt \;,\; - \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c} dt \right).$$

3. L'équation (3), qui donne la variation du travail élémentaire de la vitesse pour chaque valeur du temps t, généralise l'équation (4) de notre étude ci-dessus citée et peut être considérée comme le point de départ pour la généralisation des *théorèmes de la circulation, du flux tourbillonnaire, des équations de* CAUCHY et de l'*équation de* BERNOULLI, qui apparaissent ainsi comme des propriétés globales de cette équation.

Remarquons aussi, qu'en remplaçant $d\bar{r}$ par

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial a}\,\partial a + \frac{\partial \bar{r}}{\partial b}\,db + \frac{\partial \bar{r}}{\partial c}\,dc$$

l'équation (3) se décompose en les trois équations equivalentes suivantes

$$(4)\qquad \begin{cases} \bar{\varphi}\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial a} - u_0 = \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left(\bar{g}\frac{\partial \bar{r}}{\partial a} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial a}\right)dt \\ \bar{\varphi}\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial b} - v_0 = \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left(\bar{g}\frac{\partial \bar{r}}{\partial b} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b} + \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial b}\right)dt \\ \bar{\varphi}\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial c} - w_0 = \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left(\bar{g}\frac{\partial \bar{r}}{\partial c} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial c} + \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial c}\right)dt \end{cases}$$

qui généralisent les équations de WEBER, pour le mouvement général.

4. Intégrons, à l'instant t, l'équation (3) le long d'une ligne fluide fermée C. On a

$$(5)\qquad \int_c \bar{\varphi}\,d\bar{r} - \int_{c_0} \bar{\varphi}_0\,d\bar{r}_0 = \int_{c_0} (\bar{A}_1 + \bar{A}_2)\,d\bar{r}_0$$

formule qui donne la variation de la circulation, quand le temps t et la courbe fluide C varient.

5. En appliquant la formule de STOKES à l'équation (5), on a

$$(6)\qquad \iint_S \Omega_n\,d\sigma - \iint_{S_0} \Omega_{0n_0}\,d\sigma_0 = \iint_{S_0} (\Omega_{1n_0} + \Omega_{2n_0})\,d\sigma_0$$

formule qui donne la variation du flux du tourbillon à travers une portion quelconque de surface fluide.

Dans la formule (6) Ω_n et Ω_{0n_0} désignent les composantes normales des tourbillons $\bar{\Omega}(\xi, \eta, \zeta)$ et $\bar{\Omega}_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ aux surfaces S et S_0; Ω_{1n_0} et Ω_{2n_0} sont les composantes normales à la surface S_0 des vecteurs $\bar{\Omega}_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ et $\bar{\Omega}_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$

$$\bar{\Omega}_1 = \frac{1}{2}\,rot\ A_1 \quad ; \quad \bar{\Omega}_2 = \frac{1}{2}\,rot\ A_2\,.$$

6. Pour obtenir les équations qui généralisent celles de CAUCHY, transformons la première intégrale de (6), en passant sur S_0.

L'équation (6) peut s'écrire, tout d'abord

$$\iint_S \bar{\Omega}\bar{n}d\sigma - \iint_{S_0} \bar{\Omega}_0\bar{n}_0 d\sigma_0 = \iint_{S_0} (\bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}_2)\,\bar{n}_0\, d\sigma_0$$

ou encore

$$(7)\quad \iint_S (\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)\, d\sigma = \iint_{S_0} \Big[(\xi_0+\xi_1+\xi_2)\,\alpha_0 + (\eta_0+\eta_1+\eta_2)\,\beta_0 + (\zeta_0+\zeta_1+\zeta_2)\,\gamma_0\Big]\, d\sigma_0$$

en désignant par $\bar{n}$ (α, β, γ) et $\bar{n}_0$ $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ les verseurs des normales aux surfaces S et S_0.

Or, on a (voir p. ex.: GOURSAT: *Analyse*, cinquième édition, 1927, t. I, p. 355).

$$\gamma\, d\sigma = \left[\frac{D(x, y)}{D(b, c)}\alpha_0 + \frac{D(x, y)}{D(c, a)}\beta_0 + \frac{D(x, y)}{D(a, b)}\gamma_0\right] d\sigma, \text{ etc.}$$

La relation (7) devient

$$\iint_{S_0} \Big\{ \Big[\xi\frac{D(y, z)}{D(b, c)} + \eta\frac{D(z, x)}{D(b, c)} + \zeta\frac{D(x, y}{D(b, c)} - (\xi_0 + \xi_1 + \xi_2)\Big]\alpha_0 +$$

$$+ \Big[\xi\frac{D(y, z)}{D(c, a)} + \eta\frac{D(z, x)}{D(c, a)} + \zeta\frac{D(x, y)}{D(c, a)} - (\eta_0 + \eta_1 + \eta_2)\Big]\beta_0 +$$

$$+ \Big[\xi\frac{D(y, z)}{D(a, b)} + \eta\frac{D(z, x)}{D(a, b)} + \zeta\frac{D(x, y)}{D(a, b)} - (\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2)\Big]\gamma_0 \Big\}\, d\sigma_0 = 0$$

qui doit être vraie quelle que soit la surface S_0.

On en tire les trois équations suivantes

$$(8)\quad \begin{cases} \xi\dfrac{D(y, z)}{D(b, c)} + \eta\dfrac{D(z, x)}{D(b, c)} + \zeta\dfrac{D(x, y)}{D(b, c)} = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 \\ \xi\dfrac{D(y, z)}{D(c, a)} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \eta_0 + \eta_1 + \beta_2 \\ \xi\dfrac{D(y, z)}{D(a, b)} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 \end{cases}$$

qui sont les équations qui généralisent celles de CAUCHY.

Avant de passer plus loin, remarquons, que les équations (8) peuvent être écrites, sous la forme vectorielle suivante

$$(8') \qquad \begin{cases} \bar{\Omega}\left(\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial b} \times \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial c}\right) = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 \\ \bar{\Omega}\left(\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial c} \times \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial a}\right) = \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 \\ \bar{\Omega}\left(\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial a} \times \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial b}\right) = \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 \end{cases}$$

ou encore

$$(8'') \qquad \begin{cases} \left(\bar{\Omega}\,, \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial b}, \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial c}\right) = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 \\ \left(\bar{\Omega}\,, \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial c}, \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial a}\right) = \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 \\ \left(\bar{\Omega}\,, \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial a}, \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial b}\right) = \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 \end{cases}$$

où les premiers membres de (8') et (8'') désignent les produits mixtes des vecteurs $\bar{\Omega}$, $\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial b}$, $\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial c}$, etc.

7. On a par définition

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial b}\left(\bar{g}\,\frac{\partial \bar{r}}{\partial c}\right) - \frac{\partial}{\partial c}\left(\bar{g}\,\frac{\partial \bar{r}}{\partial b}\right)\right] dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{D(\bar{g},\,\bar{r})}{D(b,\,c)}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\Sigma\,\frac{D(g_x\,,\,x)}{D(b,\,c)}\,dt, \text{ etc.}$$

$$\xi_2 = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial c}\right) - \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial b}\right)\right] dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\rho^2}\,\frac{D(\rho,\,p)}{D(b,\,c)}\,dt, \text{ etc.}$$

Ainsi, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les théorèmes de Lord Kelvin et du flux tourbillonnaire restent valables pour le mouvement général (et qui expriment que le produit scalaire $(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)$ $d\bar{r}_0$ est, pour chaque valeur de t, une différentielle totale exacte) sont

$$\xi_1 + \xi_2 = 0, \text{ etc.}$$

c'est-à-dire

$$(9)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\frac{D(\bar{g},\bar{r})}{D(b,c)}+\frac{1}{\rho^2}\frac{D(\rho,p)}{D(b,c)}\right]dt=0 \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\frac{D(\bar{g},\bar{r})}{D(c,a)}+\frac{1}{\rho^2}\frac{D(\rho,p)}{D(c,a)}\right]dt=0 \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\frac{D(g,r)}{D(a,b)}+\frac{1}{\rho^2}\frac{D(\rho,p)}{D(a,b)}\right]dt=0. \end{cases}$$

8. Reprenons l'équation (2). Cette équation montre que, généralement, *il n'y a pas des mouvements irrotationnels dans le fluide. Dans tout le fluide, il existe des tourbillons.*

En effet, supposons qu'on ait

$$\bar{\varphi}=\operatorname{grad}\varphi.$$

Alors, l'équation (2) donne

$$(10)\qquad d(\varphi-\varphi_0)=\int_{t_0}^{t}\left(\bar{g}\,d\bar{r}-\frac{1}{\rho}\,dp\right)dt+d\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}\,\overline{\operatorname{grad}}^2\,\varphi\,dt$$

relation qui n'est pas possible tant que la paranthèse sous le signe $\int$ ne se réduit pas à une différentielle totale exacte.

Pour cela, il faut et il suffit qu'on ait

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{D(\bar{g},\bar{r})}{D(b,c)}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{D(\rho,p)}{D(b,c)}=0 \\ \dfrac{D(\bar{g},\bar{r})}{D(c,a)}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{D(\rho,p)}{D(c,a)}=0 \\ \dfrac{D(\bar{g},r)}{D(a,b)}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{D(\rho,p)}{D(a,b)}=0. \end{cases}$$

On peut dire que *les premiers membres des ces équations mesurent l'écart entre un mouvement potentiel ou non.*

Supposons les relations (11) satisfaites dans tout le fluide. Alors, on aura

$$(12)\qquad d(\varphi-\varphi_0)=d\psi+d\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}\,\overline{\operatorname{grad}}^2\varphi\,dt$$

et l'on voit que *l'existence d'un potentiel des vitesses a l'instant* $t=t_0$, *entraîne l'existence d'un potentiel à tout autre instant t.*

Ce que l'on vérifie aussi facilement des équations généralisées de CAUCHY (8), où l'on doit faire $\xi_1 + \xi_2 = 0$, etc.

Remarquons enfin, que les propositions ci-dessus peuvent avoir lieu seulement, dans une certaine région du fluide, que l'on doit alors suivre dans son mouvement.

9. De l'équation (12) on tire

$$(13) \qquad \varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ \int_{a_0}^{a} \left(\bar{g} \frac{\partial \bar{r}}{\partial a} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} \right) da + \right.$$

$$\left. + \int_{b_0}^{b} \left(\bar{g} \frac{\partial \bar{r}}{\partial b} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} \right)_{a=a_0} db + \int_{c_0}^{c} \left(\bar{g} \frac{\partial \bar{r}}{\partial c} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c} \right)_{a=a_0,\ b=b_0} dc + \tfrac{1}{2} \overline{\text{grad}^2 \varphi} \right\} + F(t)$$

(a_0, b_0, c_0) étant un point choisi à volonté et $F(t)$ une fonction arbitraire du temps t, mais qui doit s'annuler pour $t = t_0$: $F(t_0) = 0$.

Prenons les dérivées totales par rapport à t des deux membres de l'équation (13).

En observant que

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \overline{\text{grad}^2 \varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

on obtient l'équation suivante

$$(14) \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int_{a_0}^{a} \left(\bar{g} \frac{\partial \bar{r}}{\partial a} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} \right) da + \int_{b_0}^{b} \left(\bar{g} \frac{\partial \bar{r}}{\partial b} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} \right)_{a=a_0} db$$

$$+ \int_{c_0}^{c} \left(\bar{g} \frac{\partial \bar{r}}{\partial c} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c} \right)_{a=a_0,\ b=b_0} dc - \tfrac{1}{2} \overline{\text{grad}^2 \varphi} = f(t)$$

qui *généralise celle de* BERNOULLI.

Vérifions que l'équation (14) se réduit à *l'équation classique de* BERNOULLI, *dans le cas où il existe un potentiel pour les accélérations.*

On a dans ce cas

$$\bar{g} = \text{grad} U, \qquad \rho = f(p)$$

et l'équation (14) devient

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int_{a_0}^{a} \frac{\partial}{\partial a} \left(U - \int \frac{dp}{\rho} \right) da + \int_{b_0}^{b} \frac{\partial}{\partial b} \left(U - \int \frac{dp}{\rho} \right)_{a=a_0} db +$$

$$+ \int_{c_0}^{c} \frac{\partial}{\partial c} \left(U - \int \frac{dp}{\rho} \right)_{a=a_0,\ b=b_0} dc - \tfrac{1}{2} \overline{\text{grad}^2 \varphi} = f(t)$$

c'est-à-dire

$$(15)\qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2}\,\overline{\text{grad}}^2\,\varphi = f(t) + \\ + \left(U - \int \frac{dp}{\rho}\right)_{a=a_0,\ b=b_0,\ c=c_0} = f_1(t)$$

qui est bien *l'équation classique de* Bernoulli.

10. Nous terminons cette Note en remarquant que pendant que *les mouvements potentiels exigent pour leur existence des conditions locales telles que* (11), *les théorèmes de* Lord Kelvin *et du flux tourbillonnaire prétendent pour leur validité des conditions intégrales telles que* (9).

Il est évident que ces intégrales sont identiquement nulles, si chacun de leurs éléments est nul.

Ainsi, *les théorèmes de* Lord Kelvin *et du flux tourbillonnaire restent toujours valables pour les mouvements irrotationnels d'un fluide, qu'il existe un potentiel pour les accélérations, ou que plus généralement, les relations* (11) *soient satisfaites.*

Novocerkassk (Russie), Novembre 1942.

532.5 MÉCANIQUE DES FLUIDES

AUFTRIEB UND WIDERSTAND FÜR MITTLERE UND KLEINERE REYNOLDSCHE ZAHLEN

von **D. DUMITRESCU**

Es wurden kleine mit Endscheiben versehene Tragflügel für die Reynoldsschen Zahlen 48 390, 18 640 und 111 untersucht.

Die Messungen wurden in der Luft und in Öl durchgeführt. Zu diesem Zwecke wurde eine Zweikomponentenwaage gebaut, die durch eine kardanische Aufhängung selbsttätig und gleichzeitig die Normal- und die Tangentialkraft anzeigte.

Die Ergebnisse wurden mit den Göttinger Messungen verglichen und die auftretenden Abweichungen festgelegt.

EINLEITUNG

Der Bestimmung von Auftrieb und Widerstand an Flugzeugtragflügeln für grosse und sehr grosse Reynoldssche Zahlen wird wegen ihrer grossen technischen Bedeutung, grosses Interesse entgegengebracht. Dagegen liegen für mittlere, kleine und sehr kleine Reynoldssche Zahlen sehr wenige Arbeiten vor. Dieses Gebiet dürfte einigen Wert für den Modellflug sowie für die Konstruktion der Flugzeugruder haben. Versuche für sehr kleine Reynoldssche Zahlen sind auch für den Insektenflug von Interesse.

In der vorliegenden Arbeit ist das Gebiet der Reynoldsschen Zahlen von 110 bis 48.000 behandelt worden [1]).

---

[1]) Für die Anregung sowie für die wertvollen Hinweisungen zu dieser Arbeit bin ich meinem hochverehrten Professor L. PRANDTL, zu grösstem Danke verpflichtet.

Die Versuche sowie der Bau der Waage wurden in der Ärodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen durchgeführt.

VERSUCHSEINRICHTUNG UND MESSGERÄT

Die gesamten Versuche wurden in Öl und in Luft durchgeführt.

Ölkanal. Für die Messungen in Öl wurde folgender Kanal verwendet. Er bestand aus einer Versuchsstrecke von 74 cm Länge, 14,8 cm Breite und 15 cm Höhe der Öloberfläche. Das Öl wurde von einer Kapselpumpe in Bewegung gesetzt.

Zur Vermeidung von Luftblasenbildung lag diese Pumpe vollkommen unter Öl. Der Antrieb der Pumpe geschah durch einen Elektromotor mittels Kette über ein Untersetzungsgetriebe. Die Pumpe konnte auch als Flüssigkeitsmesser mit 0,2% Genauigkeit verwandt werden. Um also die Ölgeschwindigkeit konstant zu halten, genügte es, die Motordrehzahl auf einen bestimmten Wert zu halten. Zu diesem Zwecke war am Motor ein Geber angebracht, der mit einem Voltmeter verbunden war (elektr. Tachometer). Mittels eines Regulierwiderstandes wurde nun die Drehzahl des Motors, die man also indirekt auf dem Voltmeter ablesen konnte, konstant gehalten. Die Geschwindigkeit des Öles wurde mit einem kleinem Glasschwimmer bestimmt. Er bestand aus 2 kleinen Kugeln, deren untere einen kleinen Tropfen Quecksilber enthielt, um dem Schwimmer die senkrechte Lage im Öl zu erhalten. Die Zeit, in der er eine festgelegte Strecke zwischen 2 Punkten durchschwamm, wurde gestoppt. Die Länge der Strecke betrug 40 cm. Mit einer 1/10-Sekunden-Stoppuhr wurde die Geschwindigkeit von 0,2 bis 10 cm/sec., mit einer Genauigkeit von 1% bestimmt. Es wurde eine Eichkurve festgelegt, in der die Geschwindigkeit über der Voltmeterablesung aufgetragen wurde.

Das Untersetzungsgetriebe war eingebaut worden, weil man den Motor dadurch mit höheren Touren laufen lassen konnte und hierdurch eine bessere Regulierbarkeit erreichte.

Das Öl floss aus der Pumpe durch einen Diffusor zu den Umlenkschaufeln; von dort durch einen Gleichrichter in die eigentliche Versuchsstrecke. Aus dieser wurde es durch einen Einlauf wieder zur Pumpe geführt.

Das verwendete Öl hat eine Zähigkeit, deren Verlauf mit der Temperatur in der Zahlentafel 1 angegeben ist (Abbildung 4).

Das Gebläse. Zu den Versuchen in der Luft wurde ein offen ausblasendes zweistufiges Axialgebläse ohne Rückführung verwendet. Der Luftstrom trat hinter dem Gebläse zunächst ein in Rohrstück von Kreisquerschnitt, dann durch eine Übergangsstrecke in das rechteckig gebaute Kanalende.

Zum Ausgleich der Geschwindigkeitsverteilung diente ein Sieb im Rohrstück, ferner am Eingang des rechteckigen Kanales ein Gleichrichter, dahinter wieder drei Siebe.

Mit Hilfe eines Druckreglers (nach SCHRENK) wurden kleine Unregelmässigkeiten im Lauf des Motors ausgeglichen.

Die Luftgeschwindigkeit wurde auch hier wieder mit Hilfe eines, am Motor angebrachten elektrischen Tachometers, geregelt.

Als Antrieb des Gebläses diente ein regelbarer Gleichstrommotor.

Die so erzielte Luftgeschwindigkeit lag in den Grenzen von 1 bis 16 m/sec. Der rechteckige Luftstrahl hatte die Ausmasse: 33 cm × 65 cm.

Modelle. Untersucht wurden 3 Göttinger Profile 410, 411, 389 mit dem Seitenverhältnis 3,4 (5 cm Breite × 17 cm Tiefe).

Das Seitenverhältnis wurde so gewählt, um mit dem Flügel in dem gesunden Kern der Luftströmung zu bleiben. Die Modelle sind aus Aluminium hergestellt und mit Endscheiben versehen, um den induzierten Widerstand zu verkleinern. Sie tragen an der oberen Endscheibe eine Büchse, die zur Befestigung mittels einer Schraube an dem senkrechten Waagebalken dient.

Das symmetrische Profil 411, welches auch für die Bestimmung der Windrichtung benutzt worden ist, wurde mit besonderer Sorgfalt hergestellt.

Der Kern war aus Bondur angefertigt und mit Gips umkleidet, der mit einer Schablone genau profiliert wurde.

DIE ZWEIKOMPONENTENWAAGE

Zur Messung wurde speziell für diese Versuche eine Zweikomponentenwaage gebaut, die selbständig, gleichzeitig die Normal- und Tangentialkraft anzeigt.

Ebenfalls konnte man durch Arretierung (siehe Beschreibung der Waage) eine Kraft ausschalten und so jede Kraft für sich unabhängig von der anderen ablesen.

Ist θ der Winkel zwischen der Profilsehne und der Bewegungsrichtung der Luft, so bekommt man offenbar, durch die bekannten Formeln für Koordinatentransformation für den Auftrieb und den Widerstand die Werte:

$$A = T\cos\theta - N\sin\theta$$

$$W = T\sin\theta + N\cos\theta$$

Das Prinzip der Waage. Wie aus der Schemazeichnung von Abb. 1 zu erkennen ist, sind hier zwei Waagensysteme (W_1, W_2) miteinander vereinigt worden.

Diese senkrechte Stange nimmt die auf dem Körper O wirkende Kraft auf. Durch die Kardanische Aufhängung wird diese Kraft in zwei Komponente zerlegt und damit auf die beiden waagerechten

Balken W_1, W_2 übertragen, so dass man ihre Grösse durch einfache Wägung messen kann. Zu diesem Zweck trägt jeder Balken eine Waagschale G_1, G_2 und ein kontinuierlich verschiebbares Reitergewicht P_1, P_2.

Ausserdem ist für die beiden Waagebalken W_1, W_2 je ein Ausgleichsgewicht A_1, A_2 angebracht, um die Waagen einzustellen. Der senkrechte Waagebalken S besitzt auch ein Gewicht B oberhalb der Schneiden, mit dem man durch Verschieben in vertikaler Richtung den Schwerpunkt der Waage mehr oder weniger an ihren Drehpunkt heranbringen und dadurch die gewünschte Empfindlichkeit einstellen konnte.

Der Anstellwinkel wird in der Weise eingestellt, dass man das ganze System um seine vertikale Achse verdrehte. Vermittels eines angebrachten Nonius war es möglich, den Anstellwinkel bis auf 1/10 Grad genau einzustellen.

Die an den Waagschalen angreifenden Kräfte sind nach dem Hebelgesetz umzurechnen.

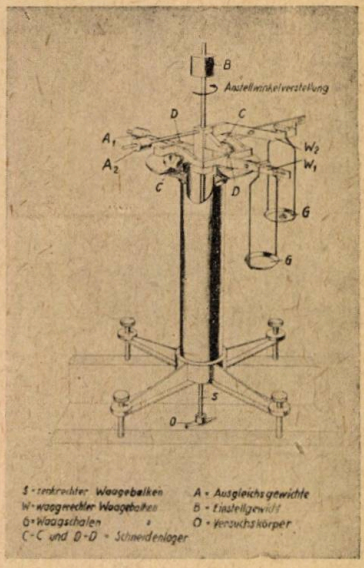


Abb. Nr. 1. — Die senkrechte Stange (S) trägt das zu untersuchende Objekt (O) und ist kardangelankartig in zwei um 90° versetzte Schneidenlager $C — C$, $D — D$ aufgehängt.

Technische Ausführung (vgl. Abb. 2). Auf einem vierarmigen Fuss F mit Verstellschrauben zum Aufsetzen ist ein Rohr R befestigt, das als Säule für die Waage dient. Das obere Ende des Rohres besitzt einen Flansch H, der mit einer Gradeinteilung versehen ist. In diesem Flansch ist ein, um die Vertikalachse drehbarer Ring I eingelassen, auf dem sich die ganze Waage aufbaut.

Er besitzt einen Griff M zum Verstellen, einen Nonius T zum Einstellen des Anstellwinkels und zwei Lagerböcke L_1, L_2 mit den Pfannen $C—C$ für das erste Schneidenlager. Darin ruht ein zweiter Ring N, der einmal den Waagebalken, W_1 mit der Waagsehale G_1 und dem Reitergewicht P_1 trägt, ausserdem aber noch die Pfannen $D—D$ für das um 90° verdrehte Schneidenlager der zweiten Waage aufnimmt. Dieser Ring N ist so gearbeitet, dass die Drehpunkte beider Schneidelager in einer Ebene liegen.

Der im zweiten Lager $D — D$ ruhende Bock R mit den Schneiden des zweiten Waagebalkens trägt ausser dem zweiten angebrachten

Waagebalken W_2 und dem Ausgleichsgewicht A_2 noch die senkrechte, im Bock R in dieser Richtung verschiebbare Stange S mit dem Versuchskörper O am unteren und dem Einstellungsgewicht B am oberen Ende.

Die beiden Schneidenlager $C-C$, $D-D$ sind so konstruiert, dass man die vertikale Achse der Waage genau in den Schnittpunkt der Achse dieser beiden Lager bringen und in dieser Stellung gegen seitliche Verschiebung sichern konnte. Somit wurde erreicht, dass die beiden Waagen W_1, W_2 sich nicht durch Verschieben in den Pfannen gegenseitig beeinflussen konnten.

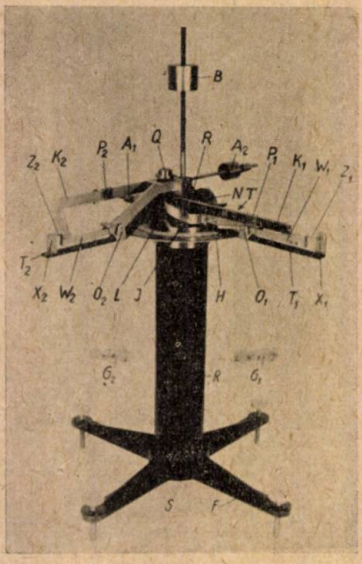


Abb. Nr. 2.

Die Enden der beiden waagerechten Balken sind mit je einer Zunge Z_1, Z_2 versehen, die vor einem Index X_1, X_2 spielten. Mit einer Nockenwelle O_1, O_2 können sie arretiert werden.

Um mit dem Reitergewicht P_1, P_2 soweit zurückgehen zu können, dass es den Wert Null einnimmt, musste man die Schiene K_1, K_2 auf der es verschoben wird, seitlich der jeweiligen Waagebalken anbringen. Diese Schiene wurde als Schneide gearbeitet, damit das Reitergewicht genau parallel zum Balken verschoben wird, widrigenfalls man die andere Waage beeinflusst hätte.

Mit einer Dosenlibelle Q wurde die Waage eingerichtet.

Die Handhabung der Waage. Der zu untersuchende Körper ist am unteren Ende der senkrechten Stange so zu befestigen, dass die Sehne des Profils mit der Richtung der Schneiden eines der waagerechten Balken zusammenfällt.

Zu diesem Zwecke ist auf der unteren Endscheibe der Profile die Tangente bzw. die Achse aufgetragen und im grösstmöglichen Abstand voneinander zwei feine Bohrungen im Laufe dieser Tangente durch die Endscheibe geführt. Durch dünne, in diesen Löchern befestigte, lotrechte Fädchen ist es so möglich, die Tangente des Profiles zu materialisieren. Der Indexhalter T_1, T_2 ermöglicht ebenfalls die Anbringung von zwei weiteren Loten, die durch zwei Bohrungen geführt wurden, deren Richtung genau mit der Richtung der Schneiden eines der beiden waagerechten Balken W_1, W_2 übereinstimmt. Durch Drehen des Profiles in der Befestigungsbüchse ist es nun möglich, eine Visier-

linie durch die Fädchen des Profiles mit dem Fädchen des Indexhalters in Übereinstimmung zu bringen. In diesem Falle ist die Tangente bzw. die Achse des Profiles genau in der Richtung der Schneiden des Waagebalkens W_1, bzw. W_2 ausgerichtet.

Das an diesem Waagebalken abgelesene Gewicht ergibt die Tangentialkraft, wogegen uns der andere senkrecht auf diesem stehende Waagebalken die Normalkraft anzeigt.

Um die Waage in horizontale Lage zu bringen, wird die Dosenlibelle durch Schrauben der Verstellfüsse eingestellt.

Erst jetzt ist mit dem Gewicht am senkrenchten Waagebalken die Empfindlichkeit der Waage einzustellen. Die Waagebalken wurden durch Ausgleichsgewichte ausbalanziert, so dass die Zunge am Ende des Balkens auf Null am Index zeigt.

Windrichtungsbestimmung. Zur Bestimmung der Windrichtung wurde das symmetrische Profil 411 verwendet. Es wird in der angegebenen Weise an dem senkrechten Waagebalken befestigt. Dreht man die Waage um ihre senkrechte Achse derart, dass der Waagebalken, der die Normalkraft angibt, auf Null zeigt, so liegt der zweite Waagebalken in gleicher Richtung mit dem Luftstrom, weil das Profil symmetrisch ist, und wird durch Ablesung an der Gradeinteilung festgelegt.

Zusätzliche Verbesserungen. Nachträglich wurde an der oben beschriebenen Waage die in Abb. 3 ersichtlichen Verbesserungen eingeführt.

Diese sind:

1. Um den Ausschlag der senkrechten Stange, besonders beim Transport zu beseitigen, wurden 4 Arretierschrauben am unteren Teil des Gestelles angebracht. (S_1, S_2, S_3, S_4).

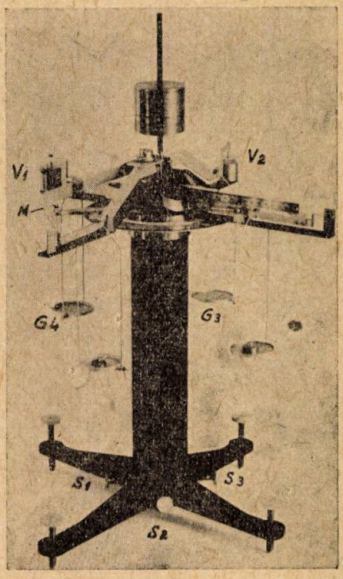


Abb. Nr. 3.

2. Um negative Kräfte messen zu können, wurden zwei zusätzliche Waageschalen an den Waagebalken vorgesehen. (G_3, G_4).

3. Zwecks Begrenzung der Schwingungsausschläge, die im besonderem Masse bei Messungen in der Luft auftreten, wurden zwei Öldämpfer am Ende der beiden Waagebalken angebracht (V_1, V_2).

Allgemeines. Die Waage hat sich als sehr empfindlich erwiesen. Es ist möglich, Kräfte bis 0,1 gr genau zu messen. Sie wird sich besonders

bei Messungen in kleinen Windkanälen, bei Vorführungen und für den theoretischen Unterricht an Technischen Hochschulen bewähren. Die Auswechslung der Modelle ist sehr einfach. Sie eignet sich besonders für die Messung der Kräfte eines in Flüssigkeit getauchten Körpers, bei dem durch die Befestigung des Objektes an dem senkrechten Waagebalken die sonst notwendige Aufhängung durch Drähte vermieden wird.

In diesem Falle dämpft die Flüssigkeit selbst die Schwingungen des Körpers, das bei Messungen in der Luft nicht zutrifft. Für letzteres wäre aber nicht schwer, nachträglich eine Dämpfeinrichtung anzubringen.

VERSUCHSERGEBNISSE

Auftrieb und Widerstand sind wie gewöhnlich in dimensionlosen Grössen Ca und Cw neben den Göttinger Messungen in den Abbildungen 5, 6, 7 aufgetragen.

Die Abweichungen von den Göttinger Messungen sind der endlichen Strahlbreite und den kleinen Reynoldsschen Zahlen zuzuschreiben. Der Einfluss des Ersten macht sich besonders bei den Messungen in Öl bemerkbar.

Da in diesem Falle die Breite der Versuchsstrecke 14,8 cm beträgt, und wegen der Zähigkeit des Öles ($\eta = 0{,}3$, $t = 15{,}8$), so dass man mit Recht behaupten könnte, dass sich der Flügel in einer Grenzschicht befindet, sind diese Resultate mehr qualitativ als quantitativ zu betrachten. Durch den Einfluss der Wände sind offensichtlich die Kräfte grösser als in einer unendlichen weiten Versuchsstrecke. Diese Tatsache wurde bestätigt durch Messungen an Kreiszylindern für die Reynoldssche Zahl 0,1, die mit der OSEEN'schen Formel für Kreiszylinder verglichen wurden (zu diesem Zwecke wurde ein besonders zähes Öl $\eta = 7{,}6 \frac{dyn\ \text{sec.}}{\text{cm}^2}$, $t = 12°$ verwendet). Diese Resultate sind trotz einer Korrektur, die uns freundlicher Weise von Herrn Prof. FAXEN in Stockholm, der z. Z. dieses Problem untersucht, mitgeteilt worden ist, in dieser Arbeit nicht angegeben. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, dass diese Korrektur für unendlich lange Zylinder gültig ist, wobei in unserem Falle der Zylinder eine Tiefe von 13 cm beträgt. Aus demselben Grunde war es nicht möglich, die theoretischen Resultate von MEKSYN, der die Lösung der OSEEN'schen Differenzialgleichung für den Fall eines schrägen elliptischen Zylinders in einer zähen Flüssigkeit angegeben hat, zu bestätigen.

Eine theoretische Korrektur, wobei man den Einfluss der Wände, den Einfluss des Bodens und den Einfluss der kleinen Reynoldsschen

Zahlen für den Tragflügel in Betracht ziehen müsste, bietet grosse Schwierigkeiten dar.

Dagegen konnte man für die Messung in der Luft, wo der rechteckige Luftstrahl die Ausmasse 33 cm × 65 cm besass und 17 cm Tiefe hatte, annehmen, dass in diesem Falle die kleinen Reynoldsschen Zahlen für die Abweichung von den Göttinger Messungen verantwortlich ist.

Drei Profile 410, 411 und 389 wurden untersucht für drei Reynoldssche Zahlen 48.380, 18.640, und 111. Es blieben noch Versuche für das Gebiet zwischen $Re = 18.640$ bis 111 durchzuführen. Die Abweichungen von den Göttinger Messungen sind:

A) *Für* Re = 48.390 *und* 18.640.

1. Die maximalen Werte C_a wurden nicht erreicht.
2. Je kleiner die Reynoldssche Zahl ist, desto kleiner wird C_a.
3. Von der Ablösung kann hier nur mit einer gewissen Unsicherheit die Rede sein und die Lage des Ablösungspunktes ist unbestimmt.

B) *Für* Re = 111.

1. In diesem Falle kann man kaum noch von einer Ablösung sprechen und die Flüssigkeit liegt auch für grosse Anstellwinkel an dem Flügel an.
2. Die Art der Profile spielt mit abnehmender Reynoldsschen Zahl eine immer kleinere Rolle.
3. Die polare verschiebt sich nach rechts und wird einer Kreisform immer ähnlicher. C_a wird ebenfalls immer kleiner.

ZAHLENTAFEL 1
Zähigkeit *n* des Oels

Temp.	dyn sec/cm²
10,6	0,3879
13,4	0,3339
17,0	0,2788
20,0	0,2356
24,0	0,2021
27,5	0,1704
30,4	0,1490
34,2	0,1288
37,9	0,1129

ZAHLENTAFEL 2
Profil 410 *Re* = 48 390

Anstellw.	Ca	Cw
—4	—11,50	3,80
—2	— 5,0	3,63
—1	— 0,17	3,56
+1	+ 0,19	3,57
2	5,21	3,64
4	11,74	3,80
6	37,50	6,04
8	46,77	7,03
10	57,63	8,95
12	68,31	11,28

ZAHLENTAFEL 3
Profil 410 $Re = 18\,640$

Anstellw.	Ca	Cw
—6	25,0	8,60
—4,5	17,7	7,30
—3,0	6,8	6,30
+3,0	6,78	6,25
4,5	17,58	7,30
6,0	25,09	8,95
8,0	31,31	11,03
10,0	34,17	12,76
12,0	34,64	14,18
14,0	35,83	17,78

ZAHLENTAFEL 4
Profil 410 $Re = 111$

Anstellw.	Ca	Cw.
—40	7,6	33,7
—30	6,3	31,9
—20	4,9	31,8
—10	2,6	30,0
0	0	30,2
10	2,5	31,5
20	4,8	32,0
30	6,2	33,7
40	7,8	35,2
45	8,0	36,8
50	7,6	38,1
60	6,0	39,0
70	4,6	39,8
80	2,4	41,0
90	0	—

ZAHLENTAFEL 5
Profil 411 $Re = 48.390$

Anstellw.	Ca	Cw.
—5	36,8	3,65
—4	20,5	3,60
—2	3,18	2,80
0	0	2,654
2	3,21	2,775
4	20,77	3,635
5	36,71	4,456
7,5	44,53	5,535
9	55,33	6,709
11	60,06	7,669
13	65,06	9,791
15	69,25	12,945
16	68,69	16,50

ZAHLENTAFEL 6
Profil 411 $Re = 18.640$

Anstellw.	Ca	Cw.
—6	18,20	6,10
—4,5	10,35	5,16
0	0	4,9
4,5	10,395	5,168
6,0	18,23	6,11
7,5	29,28	7,734
9,0	38,33	9,193
11,0	47,46	11,05
15,0	53,41	19,03

ZAHLENTAFEL 7
Profil 411 $Re = 111$

Anstellw.	Ca	Cw.
—15	4,08	30,2
— 5	1,72	29,7
0	0	29,6
5	1,8	29,8
15	4,1	30,2
25	5,82	30,8
35	8,01	32,0
40	8,92	33,0
45	10,2	34,5
50	9,3	36,2
55	8,12	37,3
65	6,20	38,4
75	4,10	39,4
85	2,0	39,4
90	0,3	39,5

ZAHLENTAFEL 8
Profil 389 $Re = 48.390$

Anstellw.	Ca	Cw.
—9	—20	10,1
—5	—7,9	5,2
—2,5	0	3,73
—1,5	7,17	3,27
0	21,89	3,26
1,5	35,68	4,57
3	47,53	5,93
5	58,91	7,52
7	69,68	9,27
10	87,34	12,38
12,5	96,20	14,30
16	102,01	19,20

ZAHLENTAFEL 9
Profil 389 $Re = 18.640$

Anstellw.	Ca	Cw.
—8	—14,1	11
—5	— 3,6	5,8
—3	0	5
—1,5	7,30	4,27
0	16,30	5,02
1,5	26,00	5,77
3	31,88	7,18
5	42,01	9,22
7	53,30	11,35
10	59,82	14,50
13	66,65	19,10
16	68,08	22,20
18	67,19	25,70

ZAHLENTAFEL 10
Profil 389 $Re = 111$

Anstellw.	Ca	Cw.
—85	1,8	39,8
—70	5,1	39,2
—55	8	37,8
—45	19,1	35,4
—38	8,1	33,2
—25	6,1	31,6
—20	3,9	30,9
—15	2,4	30,4
— 2	0	30,3
+15	3,2	30,6
25	6,8	31,8
35	9,2	33,2
40	10,4	35,3
50	9,2	37,5
65	6,8	38,8
80	2,9	39,6

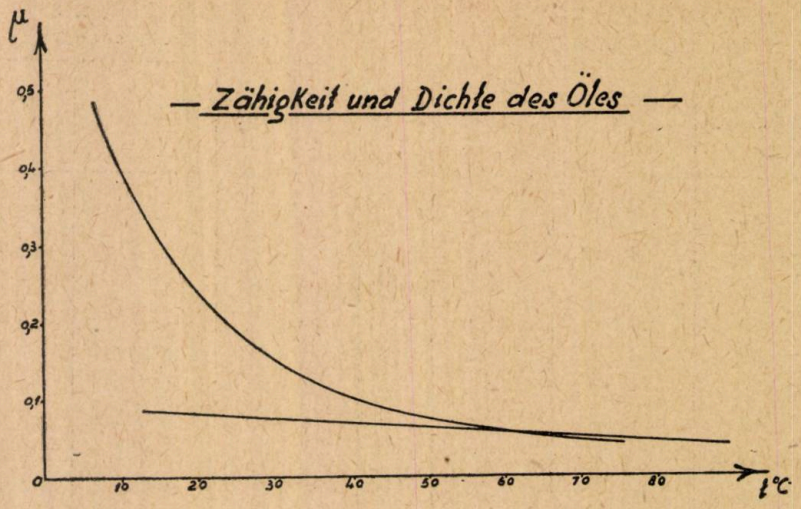


Abbildung 4.

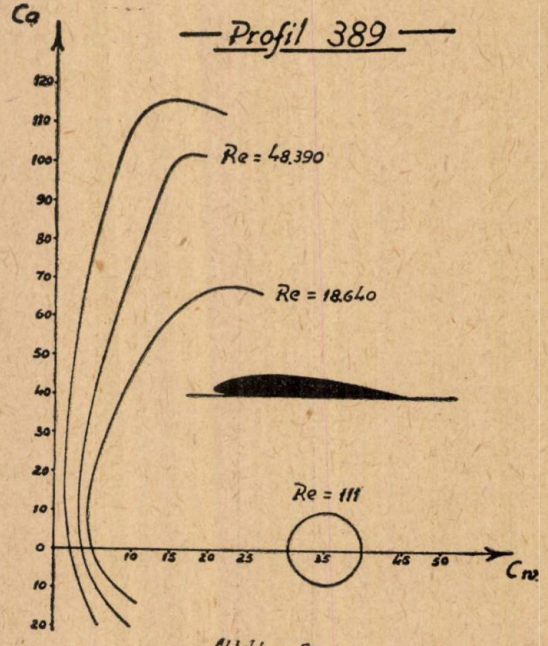


Abbildung 5.

— Profil 410 —

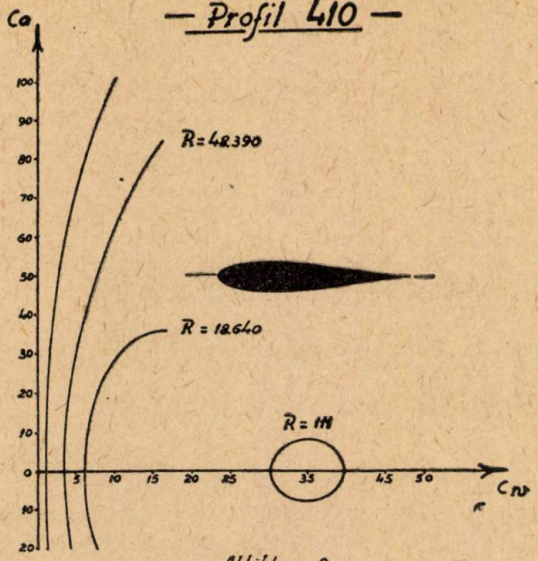


Abbildung 6.

— Profil 411 —

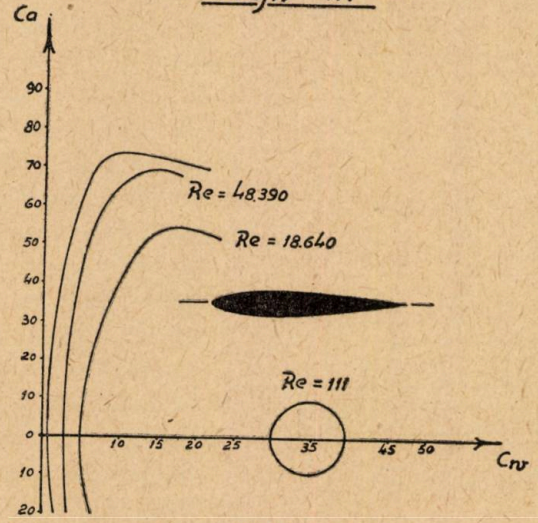


Abbildung 7.

539.4 RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

APPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES À L'ÉTUDE DE QUELQUES CAS DE LA FLEXION DE TIGES

par **G. Sikorski** (Odessa)

En se servant de l'équation différentielle de l'axe neutre déformé, l'auteur considère deux cas de la flexion des tiges d'égale résistance.

En supposant la tige soumise à l'action d'une charge continue qui varie le long de la tige selon la loi parabolique ou celle de la ligne droite l'auteur donne le critérium d'intégrabilité de l'équation differentielle de l'axe neutre déformé, par les fonctions elliptiques.

§ 1. On sait, que la théorie des fonctions elliptiques se rattache à la résolution de toutes sortes de problèmes de géometrie, de mécanique et de physique. Oscillations d'un pendule simple et sphérique, mouvement d'un régulateur de WATT, mouvement d'un solide autour d'un point fixe, forme que prend un fil animé d'un mouvement de rotation, courbe élastique, lignes géodésiques, arc d'ellipse et grand nombre des problèmes les plus intéressants, peut être conduite jusqu'au bout par l'emploi des fonctions elliptiques.

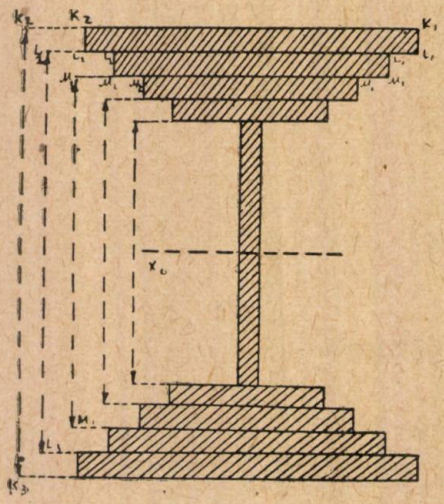


Fig. 1.

Considérons ici quelques cas de la flexion de tiges d'égale résistance.

Supposons qu'une tige d'égale résistance à la flexion, dont la section transversale a la forme représentée par la figure 1, est soumise

à l'action de forces normales à sa direction. Cette section est symétrique par rapport à la droite $\overline{X}_0\,\overline{X}_0$, menée par son centre de gravité.

Soit:

$$K_1 K_2 = B \;;\; L_1 L_1 = L_2 L_2 = \frac{B_1}{2} \;;\; M_1 M_1 = M_2 M_2 = \frac{B_2}{2};\ldots$$

$$K_2 K_3 = H \;;\; L_2 L_3 = H_1 \;;\; M_2 M_3 = H_2;\ldots$$

Le moment d'inertie de la section par rapport à la droite $\overline{X}_0\,\overline{X}_0$.

$$I = \frac{1}{12}[BH^3 - B_1 H_1^3 - \ldots - B_n H_n^3].$$

Soient les bases $BB_1 B_2 \ldots B_n$ constantes et les hauteurs $HH_1 H_2 \ldots H_n$ variables.

Supposons, que

$$H_1 = \alpha_1 H;\; H_2 = \alpha_2 H;\ldots H_n = d_n H,$$

ou $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sont des données.

Il vient donc

$$I = \frac{H^3}{12}(B - B_1 \alpha_1^3 - B_2 \alpha_2^3 - \ldots - B_n \alpha_n^3).$$

Le moment de résistance

$$W = \frac{H^2}{6}(B - B_1 \alpha_1^3 - B_2 \alpha_2^3 - \ldots - B_n \alpha_n^3).$$

Le moment fléchissant relatif à la section considérée

$$M = RW = \frac{RM^2}{6}(B - B_1 \alpha_1^3 - B_2 \alpha_2^3 - \ldots - B_n \alpha_n^3)$$

R désignant une tension constante. Par suite

$$H = \sqrt{\frac{6M}{R}} \cdot \frac{1}{\sqrt{B - B_1 \alpha_1^3 - B_2 \alpha_2^3 - \ldots - B_n \alpha_n^3}}.$$

Si nous supposons, que la loi de distribution de M le long de la tige est connue, cette formule déterminera les dimensions des sections transversales successives.

Nous aurons

$$I = \frac{M}{2R}\sqrt{\frac{6M}{R}} \cdot \frac{1}{\sqrt{B - B_1 \alpha_1^3 - B_2 \alpha_2^3 - \ldots - B_n \alpha_n^3}}.$$

L'équation différentielle de l'axe neutre déformé

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M,$$

on peut la mettre sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A}{\sqrt{M}} \qquad (1)$$

où

$$A = \frac{2R}{E}\sqrt{\frac{R}{6}}\sqrt{B - B_1\alpha_1^3 - B_2\alpha_2^3 - \ldots - B_n\alpha_n^3}.$$

E désigne le coefficient d'élasticité. Nous prenons l'axe neutre avant la déformation pour l'axe des abscisses, et y représente après la déformation l'ordonnée du point de l'axe neutre défini par sa abscisse x.

Dans le cas particulier

$$B_1 = B_2 = \ldots = B_n = 0;$$

et nous avons la section rectangulaire.

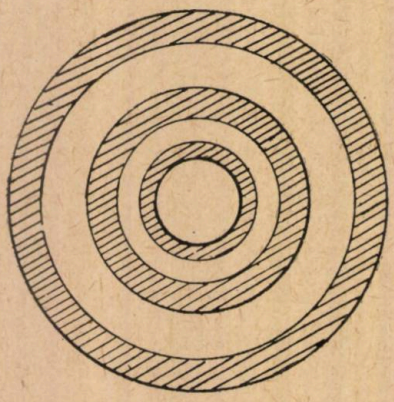


Fig. 2.

L'équation (1) donne

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2R}{E}\sqrt{\frac{BR}{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{M}}. \qquad (2)$$

En supposant, que

$$B_2 = B_3 = \ldots = B_n = 0;\ B_1 \neq 0;$$

nous obtiendrons la section double T.

§ 2. Considérons à présent la section représentée par la fig. 2.

Soient:

$$r\ r_1\ r_2 \ldots\ r_{2n}\ r_{2n+1}$$

les rayons des circonférences successives de la section, de sorte, que

$$r > r_1 > r_2 > \ldots > r_{2n} > r_{2n+1}.$$

Le moment d'inertie de la section

$$I = \frac{\pi}{4}(r^4 - r_1^4 + r_2^4 - \ldots + r_{2n}^4 - r_{2n+1}^4).$$

Supposons, que les rayons $r\ r_1\ r_2 \ldots\ r_{2n+1}$ varient de manière, que

$$r_1 = \alpha_1 r\ ;\ r_2 = \alpha_2 r;\ \ldots\ r_{2n} = \alpha_{2n} r\ ;\ r_{2n+1} = \alpha_{2n+1} r;$$

où $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ \alpha_{2n+1}$ sont des données. Par conséquent

$$I = \frac{\pi r^4}{4}(1 - \alpha_1^4 + \alpha_2^4 - \ldots + \alpha_{2n}^4 - \alpha_{2n+1}^4).$$

Le moment de résistance

$$W = \frac{\pi r^3}{4}(1 - \alpha_1^4 + \alpha_2^4 - \ldots + \alpha_{2n}^4 - \alpha_{2n+1}^4).$$

En remarquant, que $M = RW$, nous aurons

$$r = \sqrt[3]{\frac{4M}{R\pi(1 - \alpha_1^4 + \alpha_2^4 - \ldots + \alpha_{2n}^4 - \alpha_{2n+1}^4)}}.$$

Au moyen de cette formule nous pouvons déterminer les dimensions des sections transversales si la loi de variation de M est connue.

Il est facile de s'assurer, que

$$I = \frac{M}{R}\sqrt{\frac{4M}{R\pi(1 - \alpha_1^4 + \alpha_2^4 - \ldots + \alpha_{2n}^4 - \alpha_{2n+1})}}$$

par conséquent

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A}{\sqrt[3]{M}} \tag{3}$$

où

$$A = \frac{R\sqrt[3]{R\pi(1 - \alpha_1^4 + \alpha_2^4 - \ldots + \alpha_{2n}^4 - \alpha_{2n+1}^4)}}{E\sqrt[3]{4}}.$$

Dans le cas $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{2n+1} = 0$ nous avons la section circulaire et l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{R\sqrt[3]{R\pi}}{E\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{M}}. \tag{4}$$

Si le moment fléchissant s'exprime par un polynome du troisième ou du quatrième degré dans le cas de § 1, ou par un polynome du second ou du troisième degré dans le cas de § 2, la solution complète des équations (1) et (3), en général, exige l'emploi des fonctions elliptiques.

§ 3. Soit Q la charge continue, qui varie le long de la tige selon la loi parabolique

$$z = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0. \tag{5}$$

Designons par q la valeur de la charge rapportée à l'unité de l'aire comprise entre la parabole et l'axe de la tige.

En posant la longueur de la tige égale à l, nous obtiendrons

$$q = \frac{Q}{\frac{a_0 l^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1 l^n}{n} + \ldots + \frac{a_{n-1} l^2}{2} + a_n l}.$$

En supposant, que la tige est posée sur deux appuis, nous désignons la réaction de l'appui par A. Nous aurons

$$A = q\left[\frac{a_0 l^{n+1}}{(n+2)(n+1)} + \frac{a.l^n}{(n+1).n} + \ldots + \frac{a_{n-1} l^2}{3.2} + \frac{a_n l}{2.1}\right].$$

Le moment fléchissant

$$M = Ax - q\left[\frac{a_0 x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \frac{a_1 x^{n+1}}{(n+1).n} + \ldots + \frac{a_{n-1} x^3}{3.2} + \frac{a_n x^2}{2.1}\right].$$

On vérifie sans peine, que

$$-\frac{d^2 M}{dx^2} = qz$$

on peut en déduire la conséquence suivante: Si la parabole (5), qui borne «la charge», est une courbe d'ordre n, le moment fléchissant s'exprime par un polynome du degré $n+2$.

A present nous pouvons faire connaître une remarque suivante: Si la ligne, qui borne «la charge», est une droite inclinée sur l'axe x ou est une parabole du second ordre, la question de la forme de la fibre moyenne déformée, dans le cas de § 1, est résoluble par les fonctions elliptiques. Dans la cas de § 2 la question se resout de la même manière à condition, que la ligne, qui borne «la charge», soit une droite quelconque.

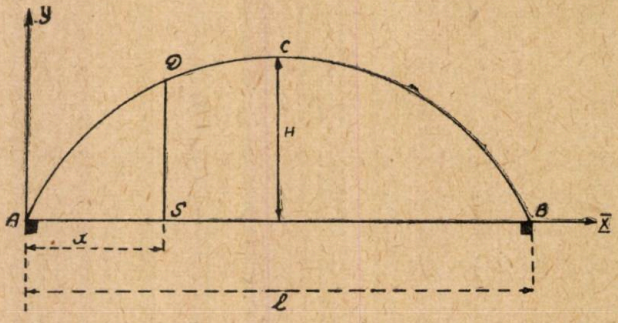


Fig. 3.

Tel est le critérium d'intégrabilité par les fonctions elliptiques de l'équation differentielle de l'axe neutre deformé.

§ 4. Supposons qu'une tige posée sur deux appuis de niveau, dont les sections transversales sont des rectangles, est soumise à l'action de la charge, qui varie selon la loi parabolique.

L'équation de la parabole

$$y = \frac{4H}{l^2}(lx - x^2).$$

Soit q la valeur de la charge rapportée à l'unité de l'aire ACB. La charge totale

$$Q = \frac{2}{3} Hlq,$$

où H est l'hauteur de la figure ACB; l — la longueur de la tige.

Les réactions exercées par les appuis

$$A = B = \frac{1}{2} Q.$$

Désignons par P l'aire ASD et par z le bras de levier de la charge ASD par rapport à la section S. Nous aurons

$$P = \frac{2H}{3l^2}(3lx^2 - 2x^3) \quad ; \quad z = \frac{2lx - x^2}{2(3l - 2x)}.$$

Le moment fléchissant relatif à la section S

$$M = \frac{Hq}{3l^2}(x^4 - 2lx^2 + l^2x).$$

L'équation (2) donne

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A}{\sqrt{x^4 - 2lx^3 + l^3x}}, \tag{6}$$

où

$$A = \frac{2Rl}{E}\sqrt{\frac{Rb}{2Hq}}.$$

Soit $x = \frac{l}{2}(1 + \xi)$. L'équation (6) devient

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} = \frac{A}{\sqrt{5(1 - \xi^2)(1 - \frac{1}{5}\xi^2)}}.$$

Par suite

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{A}{\sqrt{5}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \frac{1}{5}\xi^2)}} + C. \tag{7}$$

C désigne une constante d'intégration.

Il reste determiner u par l'intégrale

$$u = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(l - \frac{1}{5}\xi^2)}},$$

dont l'angle modulaire on peut obtenir à l'aide de l'équation $K^2 = \sin^2\theta = \frac{1}{5}$; d'où $\theta = 26° 34'$.

Maintenant nous avons

$$\xi = snu \quad ; \quad \sqrt{1-\xi^2} = cnu \quad ; \quad \sqrt{1-\tfrac{1}{5}\xi^2} = dnu.$$

Il est facile de s'assurer à l'aide de (7), que $dy = \frac{Au}{\sqrt{5}}\, dsnu + Cdsnu.$

Donc

$$y = \frac{A}{\sqrt{5}}(usnu - \int snu.du) + Csnu + C_1.$$

Prenant en considération, que

$$\int snu.\, du = -\frac{1}{k}\, ln\,(dnu + k.cnu)$$

nous trouverons

$$y = \frac{Au\,.\,snu}{\sqrt{5}} + Aln\,(dnu + K.cnu) + Csnu + C_1.$$

Les constantes C et C_1 se détermineront en considérant que pour $x = 0$ et $x = l$ l'ordonnée $y = 0$. On peut remarquer, que pour $x = 0$; $\xi = -1$ et $u = -\overline{K}$, ou $\overline{K}$ désigne l'intégrale complète de première espèce, dont la module est égal à $\frac{1}{\sqrt{5}}$, prenant en considération que

$$sn\,(-\overline{K}) = -1 \quad ; \quad cn\overline{K} = 0 \quad ; \quad dn\overline{K} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

nous trouverons

$$C = 0; \quad C_1 = -\frac{A\overline{K}}{\sqrt{5}} - Aln\,\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

La courbe cherchée a donc pour équations paramétriques

$$y = A\left(\frac{usnu - \overline{K}}{\sqrt{5}} + ln\,\frac{\sqrt{5}\,.\,dnu + cnu}{2}\right)$$

et

$$x = \frac{l}{2}\,(1 + snu).$$

Il ne reste, qu'à calculer la flèche f.

Remarquons pour cela, que pour $x = \frac{l}{2}$ nous avons $\xi = 0$ et $u = 0$.

ar conséquent

$$f = A\left(ln\,\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\overline{K}}{\sqrt{5}}\right)$$

où $f = -0{,}261\ A.$

Si, par exemple, $l = 200$ cm; $H = 50$ cm;

$$R = 200\,\frac{klg}{cm^2} \quad ; \quad q = 2\,\frac{klg}{cm^2} \quad ; \quad b = 20 \text{ cm} \quad ; \quad E = 100000\,\frac{kg}{cm^2}$$

nous aurons

$$f = -0{,}93 \text{ cm}.$$

§ 5. Considérons une tige d'égale résistance encastrée à une extrémité, libre à l'autre, uniformément chargée de poids et soumise à l'action d'un couple, dont la moment est égal à M_0 et qui est appliqué à libre extrémité de la tige (fig. 4).

Soit l la longueur de la tige et q le poids, qu'elle porte par l'unité de longueur. Le moment fléchissant relatif à la section S

$$M = M_0 - \frac{qx^2}{2}.$$

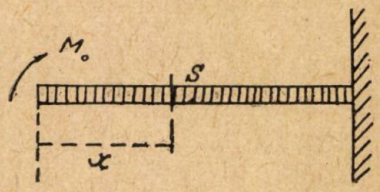


Fig. 4.

En supposant, que la section transversale de la tige est un cercle, selon l'équation (3) nous aurons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{A}{\sqrt[3]{x^2 - a^2}}$$

où

$$a^2 = \frac{2M_0}{q} \quad ; \quad A = \frac{R}{E}\sqrt{\frac{R\pi}{2q}}.$$

D'où résulte, en intégrant

$$\frac{dy}{dx} = -A\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - a^2}} + C.$$

Faisant $\sqrt[3]{x^2 - a^2} = a^{2/3}.z$ nous obtiendrons, que $x = a\sqrt{z^3 + 1}$ et

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - a^2}} = 3a^{1/3}\int \frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3 + 4}}.$$

Déterminons l'argument u par l'intégrale

$$u = \int_z^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 + 4}}.$$

Nous trouverons, que $z = p\ (u,\ 0, -4)$.

Par conséquent

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - a^2}} = -3a^{1/3} \int pu.du = 3a^{1/3}.\zeta u.$$

A présent nous avons: $dx = -3ap^2 u.du$;

$$dy = 9Aa^{4/3}.\zeta u.p^2 udu - 3Cap^2 u.du;$$

$$y = 9Aa^{4/3} \int p^2 u.\zeta u.du - 3Ca \int p^2 u.du.$$

Dans notre cas $(p' u)^2 = 4p^3 u + 4$, d'où $p'' u = 6p^2 u$, par suite

$$\int p^2 u.du = \frac{1}{6} p' u.$$

L'intégration par parties donne

$$\int p^2 u.\zeta u.du = \frac{1}{6}\left(p' u.\zeta u + \frac{1}{2} p^2 u\right).$$

Par conséquent

$$y = \frac{3}{2} Aa^{4/3}\left[\zeta u.p' u + \frac{1}{2} p^2 u\right] - \frac{1}{2} Cap' u + C_1. \qquad (8)$$

Les constantes arbitraires C et C_1 se détermineront en considérant, que pour $x = l$ l'ordonnée $y = 0$ et la dérivée $\frac{dy}{dx} = 0$. Nous trouverons sans peine

$$C = 3Aa^{1/3} \zeta u_0 \quad ; \quad C_1 = -\frac{3}{4} A.a^{4/3} p^2 u_0;$$

où u_0 est la valeur de u correspondante $x = l$. Cette valeur se détermine par l'équation

$$pu_0 = \sqrt[3]{\frac{l^2 - a^2}{a^2}}.$$

Les valeurs de C et C_1 portées dans (8).

La valeur de y se présente ainsi

$$y = \frac{3}{2} Aa^{4/3}\left[(\zeta u - \zeta u_0) p' u + \frac{1}{2}(p^2 u - p^2 u_0)\right].$$

Et d'autre part

$$x = a\sqrt{I + p^3 u}.$$

Ce sont les équations paramétriques de la courbe cherchée.

Pour avoir la plus grande flèche f prise par la tige, posons:

$$x = 0 \quad \text{ou bien} \quad z = -1 \; ; \quad pu = -1 ;$$

$$p'u = 4\sqrt{p^3 u = 4} = 0.$$

Nous obtiendrons

$$f = -\frac{3}{4} A . a^{4/3} (1 + p^2 u_0),$$

ou

$$f = -\frac{3}{4} A . a^{4/3} \left[1 + \frac{1}{a} \sqrt[3]{\frac{(e^2 - a^2)^2}{a}} \right].$$

Si, par exemple, $l = 200$ cm; $M_0 = 4$ kg. cm;

$$q = 2 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \; ; E = 2000000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \; ; \; R = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \; ;$$

nous aurons $a = 2$ cm;

$$A = \frac{1}{400} \sqrt[3]{2\pi};$$

$$f = -4{,}055 \text{ cm}.$$

541.1 CHIMIE PHYSIQUE

DIE AKTIVITÄTSKOEFFIZIENTEN DER GASE

von **Em. A. Bratu**

Zusammenfassung. *Für das Studium der Gase bei Hochdrücken die mehr und mehr in der modernen chemischen Technik verlangt werden, ist es notwendig die Aktivitätskoeffizienten der Gase einzuführen.*

In der vorgelegten Arbeit haben wir zwei Gleichungen gefunden, wodurch die Aktivitätskoeffizienten als Funktion der kritischen Temperatur und des kritischen Druckes berechnet werden können.

Mit diesen Gleichungen haben wir die Aktivitätskoeffizienten für 167 Fälle und für 24 verschiedene Gase ermittelt.

Die mittlere Differenz gegenüber der aus den Beobachtungen errechneten Werte ist 2,18% für die Aktivitätskoeffizienten die grösser als 0,75 und 9,87% für die, die kleiner als 0,75 sind.

Die hohen Drücke, die immer mehr in der chemischen Industrie angewendet werden, stellen Probleme dar, die nicht befriedigend gelöst werden können mittels der einfachen thermodynamischen Gleichungen und Begriffe, die nur für ideale Gase passen.

So z. B. muss man für die Berechnung von Gleichgewichten, auf die sich die meisten dieser Probleme zurückführen lassen, den Begriff der Flüchtigkeit einführen.

Die *Flüchtigkeit* oder *Fugazität* (f) ist ein Mass der *Entweichungstendenz* (aus einer Phase in eine andere) und wird, infolgedessen, gleich Null, wenn das System sich im Gleichgewicht befindet. Aus diesem Grunde ist die Flüchtigkeit, wie auch die freie Energie, ein Kriterium des Gleichgewichtes.

Mit Hilfe der Flüchtigkeit kann man die einfachen Beziehungen, welche für das Gleichgewicht der idealen Gase gelten, für die reelen, unvollkommenen Gase umwandeln, indem der Druck (P) durch die

Flüchtigkeit (f) ersetzt wird, oder — was dasselbe ist — indem der Druck mit dem *Aktivitätskoeffizienten* (γ), definiert durch:

$$\gamma = f/P$$

multipliziert wird.

Sowohl die Flüchtigkeit als auch der Aktivitätskoeffizient sind von der Art des Gases wie auch von seinem Druck und seiner Temperatur abhängig.

TABELLE 1

Kritische Zustandsgrössen

GAS	Von Newton und uns angewandt		Nach Landold-Bornstein-Tabellen	
	Kritische Temp. T_k °K	Kritischer Druck P_k Atm	Kritische Temp. T_k °K	Kritischer Druck P_k Atm
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Argon	151	48,0	150,8	48,0
Sauerstoff	154,4	49,7	154,4	49,7
Methan	190,6	45,8	190,7	45,7
Kohlensäure	304,1	73,0	304,2	72,9
Äthylen	282,8	50,9	283,1	50,7
Stickstoff	126	33,5	126,1	33,5
Ammoniak	405,5	111,5	405,6	112
Kohlenoxyd	134,1	35,0	134,5	34,6
Dichlorodifluoromethan	384,8	39,5	384,7	39,6
Methylchlorid	415,9	61,0	416,3	65,9
Schwefeldioxyd	430,5	77,7	430,7	77,8
Wasserdampf	647	217,7	647,3	218,5
n-Hexan	507,9	29,5	508,0	29,6
Acetylen	309	62	309,1	61,6
Äthyläther	466,9	35,5	467,2	36,4
Stickoxyd	179	65	180	71
Krypton	210	54	210,7	54,3
Isopentan	460,9	32,9	461,0	32,9
Zyklohexan	554,1	40,6	554,2	40,6
Methanol	513	78,7	513	99
Äthanol	516,2	63,1	516,3	63,0
Helium	5,2	2,26	5,3	2,26
Neon	44,4	25,9	44,8	27,2
Wasserstoff	33,2	12,8	33,3	12,8

Auf Grund der experimentell erzielten Daten und durch Anwendung der Methode von LEWIS und RANDHALL [1]), hat NEWTON [2]) eine Anzahl von Aktivitätskoeffizienten berechnet, und hat bewiesen, dass mit genügender Genauigkeit sie dem Theorem der übereinstimmenden Zustände folgen, d. h. sie sind gleich bei gleichen reduzierten Zustandsgrössen.

Man versteht unter reduzierten Zustandsgrössen, die Zustandsgrössen dividiert durch die entsprechenden kritischen Konstanten. So:

$$T_r = T/T_k \quad ; \quad P_r = P/P_k$$

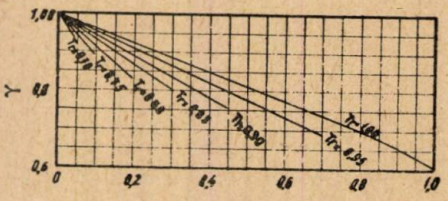
mit: T = absolute Temperatur
T_k = absolute kritische Temperatur
T_r = reduzierte Temperatur
P = Druck
P_k = kritischer Druck
P_r = reduzierter Druck.

In der Tabelle 1 geben wir die kritischen Konstanten an für die Gase die in dieser Abhandlung vorkommen.

Für einige Gase (He, Ne, H_2) mit niederen kritischen Grössen, hat Newton bessere Resultate erzielt dadurch, dass er, statt der obigen reduzierten Zustandsgrössen (T_r, P_r), die folgenden (T_n, P_n) angewandt hat:

$$T_n = \frac{T}{T_k + 8} \quad ; \quad P_n = \frac{P}{P_k + 8}.$$

Mit den so berechneten Aktivitätskoeffizienten hat Newton die Diagramme 1, 2 und 3 erarbeitet. Sie stellen die Aktivitätskoeffizienten als Funktion der reduzierten Drücke und der reduzierten Temperatur dar.



P_r

Diagramm 1.

[1]) LEWIS G. H. und RANDHALL M., übersetzt von REDLICH O., Thermodynamik und die freie Energie chemischer Substanzen. 163 (1927) Verlag: J. Springer-Wien.

[2]) NEWTON H., Activity Coefficients of Gases. *Ind. Eng. Chem.* *27*, 302 (1935).

Die Zusammenstimmung der aus den NEWTON'schen Diagrammen entnommenen Werte (γ_N) mit denjenigen der aus experimentellen Beobachtungen errechneten (γ_{beob}), ist sehr gut, wie aus den Tabellen 2 und 3 ersichtlich ist.

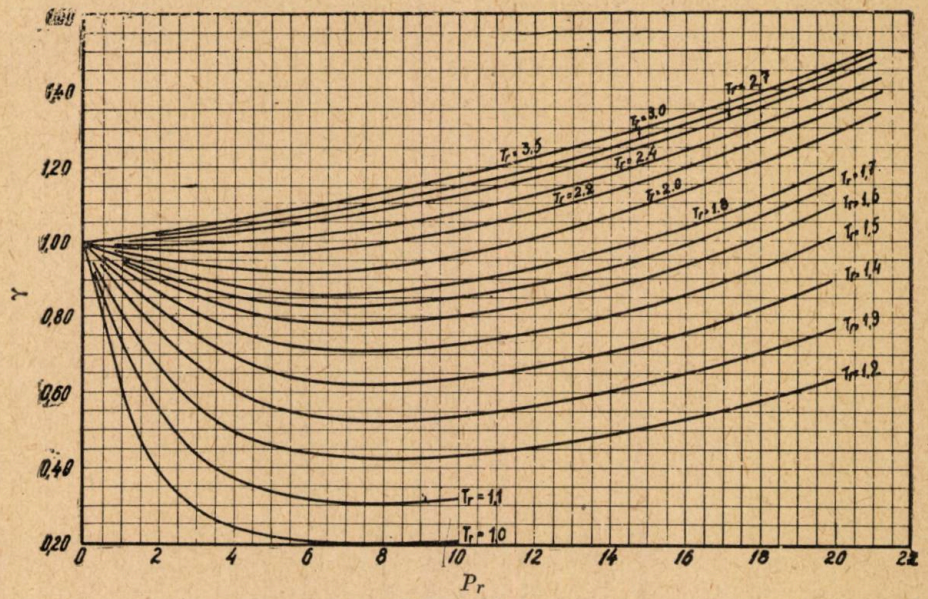


Diagramm 2.

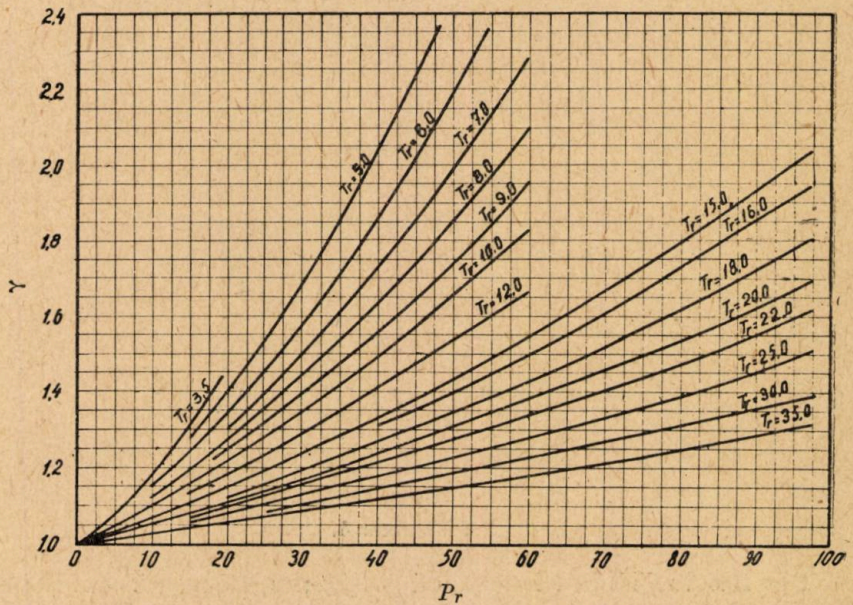


Diagramm 3.

Auf Grund dieser Diagramme, haben wir zwei Gleichungen gefunden, womit man leicht und mit für technische Zwecke ausreichender Genauigkeit, die Aktivitätskoeffizienten der Gase berechnen kann.

Unsere ursprüngliche Absicht war, die drei NEWTON'schen Diagramme in einem einzigen, logarithmischen Diagramm — mit den Koordinaten lg T_r und lg P_r — zu vereinigen.

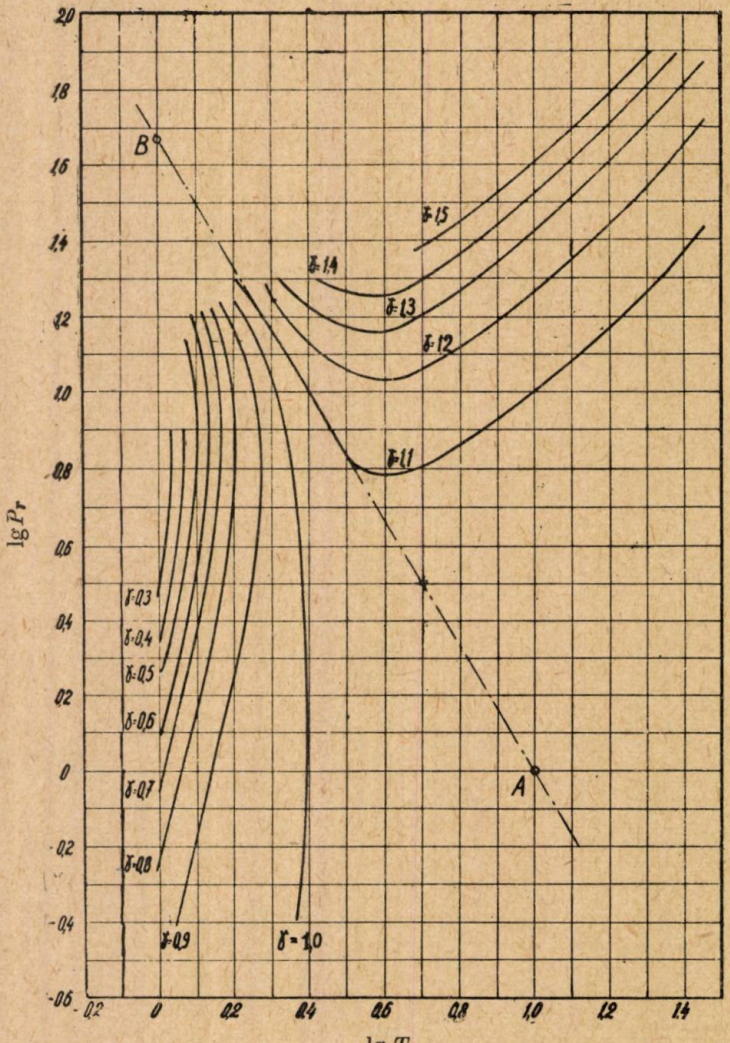


Diagramm 4.

Das Resultat ist in Diagramm 4 gezeigt; es bilden sich zwei Kurvenbündel mit verschiedenen Richtungen: ein Bündel für $\gamma = 1{,}0$ und ein

anderes für $\gamma = 1{,}1$. Für $1{,}0 < f < 1{,}1$ sind die Kurven schlecht bestimmt. Diese beiden Bündel sind getrennt durch die gerade Linie die durch die Punkte A und B durchläuft deren Koordinaten sind:

$$\text{für } A\text{: } \lg T_r = 1{,}0 \;\; ; \;\; \lg P_r = 0$$

$$\text{für } B\text{: } \lg T_r = 0 \;\; ; \;\; \lg P_r = 1{,}67$$

Die nähere Betrachtung des Diagramms 4 führt zur Annahme des Bestehens einer möglichen Symetrie dieser zwei Kurvenbündel beiderseits der Linie AB, wenn man entsprechend den Massstab der Koordinaten wechselt.

Zu diesem Zweck haben wir den relativen Massstab der Koordinaten so geändert, dass die Neigung der Linie AB 45° sein wird, durch Multiplikation der Ordinaten mit $1/1{,}67 = 0{,}60$.

Das so erhaltene Diagramm 5 zeigt, — wie angenommen — die Existenz einer ungefähren Symetrie.

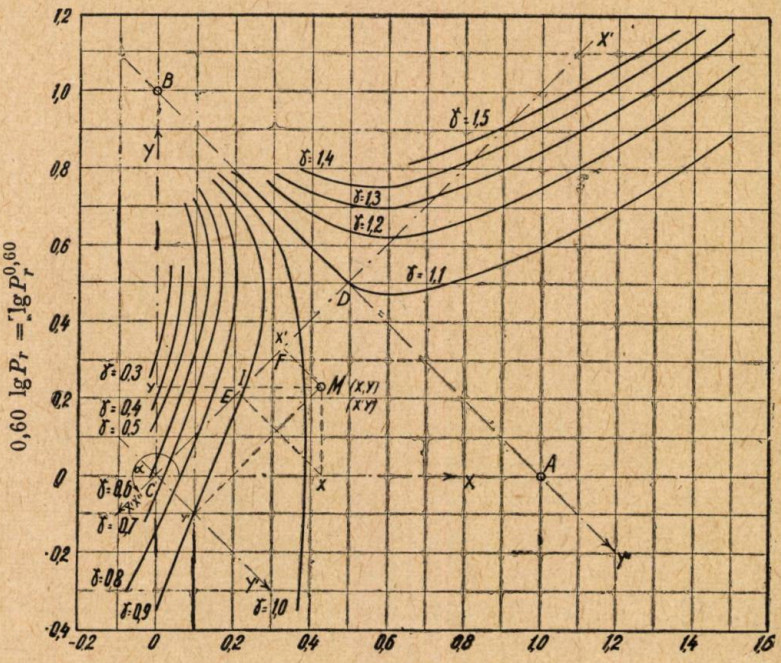


Diagramm 5.

Das Diagramm 6 entsteht aus dem vorhergehenden, durch Drehung der Koordinatenachsen mit einem Winkel $\alpha = 225°$ und der Verschiebung des Koordinatenanfangspunktes in D; $(CD = 1/\sqrt{2})$.

Die neuen Koordinaten lassen sich folgenderweise ermitteln:

a) Im Koordinatensystem $x\,C\,y$:

$$x = \lg T_r$$

$$y = \lg P_r^{0,60}.$$

b) Im Koordinatensystem $x'\,C\,y'$

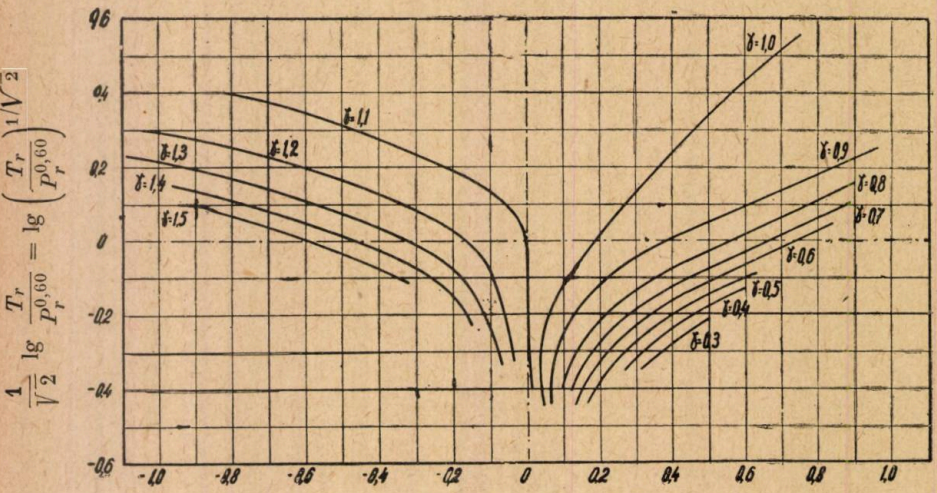
$$x' = -CF = -(CE + EF) = -\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lg T_r\, P_r^{0,60}$$

$$y' = FM = \frac{IM}{\sqrt{2}} = \frac{x - y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lg \frac{T_r}{P_r^{0,60}}.$$

c) Im Koordinatensystem $x''\,D\,y''$:

$$x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \lg T_r P_r^{0,60}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lg \frac{10}{T_r P_r^{0,60}}$$

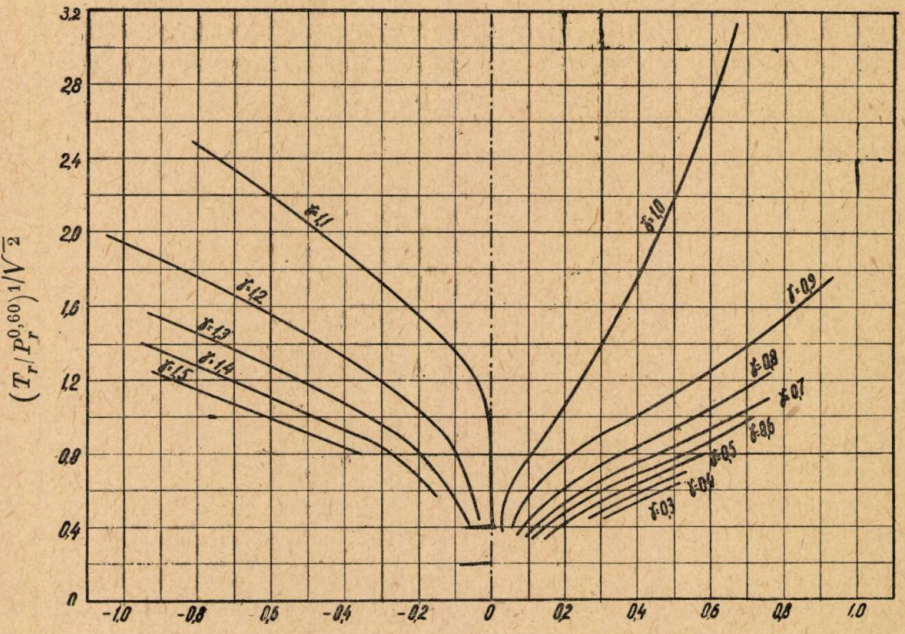
$$y'' = y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \lg \frac{T_r}{P_r^{0,60}}.$$



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \lg \frac{10}{T_r P_r^{0,60}}.$$

Diagramm 6.

Um die Kurven des Diagramms 6 nach Möglichkeit in gerade Linien umzuwandeln, haben wir mehrere Versuche gemacht, wovon der beste in den Diagrammen 7 und 8 gezeigt ist:



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \lg \frac{10}{T_r P_r^{0,60}}.$$

Diagramm 7.

Die zum Schluss erzielten Resultate rechtfertigen die Annahme, dass die Linien des Diagramms 8 Geraden sind, welche durch den Anfangspunkt der Koordinatenachsen durchgehen. Es folgt daraus, dass für einen bestimmten γ das Verhältnis der Koordinaten eine Konstante ist.

Wenn man im Diagramm 9 die Punkte, die solche Konstanten für verschiedene γ darstellen, als Funktion von lg γ einträgt, ergibt sich, dass

$$\text{für } \lg \gamma > -0{,}125 \quad \text{also} \quad \gamma > 0{,}75$$

die so erhaltenen Punkte in unmittelbarer Nähe der geraden Linie MM' liegen und dass

$$\text{für } \lg \gamma < -0{,}125 \quad \text{also} \quad \gamma < 0{,}75$$

obwohl die Abweichungen grösser sind, nähern sich die Punkte der gestrichelten Linie NN'.

Diese Linien sind durch folgende Gleichungen analytisch dargestellt:

a) Linie MM' für $\gamma > 0{,}75$

$$\lg \underset{>0{,}75}{\gamma} = -0{,}240 \frac{1}{\sqrt{2}} \lg \frac{10}{T_r P_r^{0,60}} \Big/ \left(\frac{T_r}{P_r^{0,60}}\right)^{1,50} + 0{,}035$$

oder

$$\lg \underset{>0{,}75}{\gamma} = 0{,}170 \left(\frac{P_r^{0,60}}{T_r}\right)^{1,50} \lg \frac{T_r P_r^{0,60}}{10} + 0{,}035 \qquad (1)$$

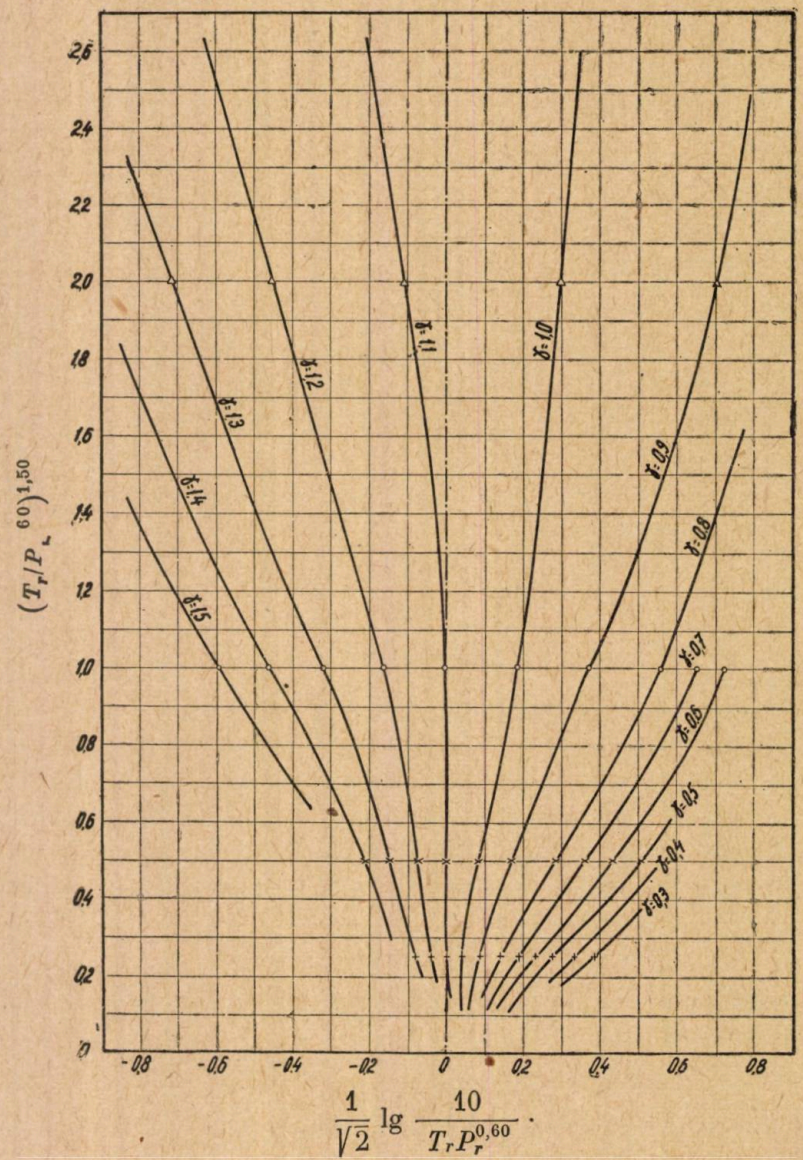


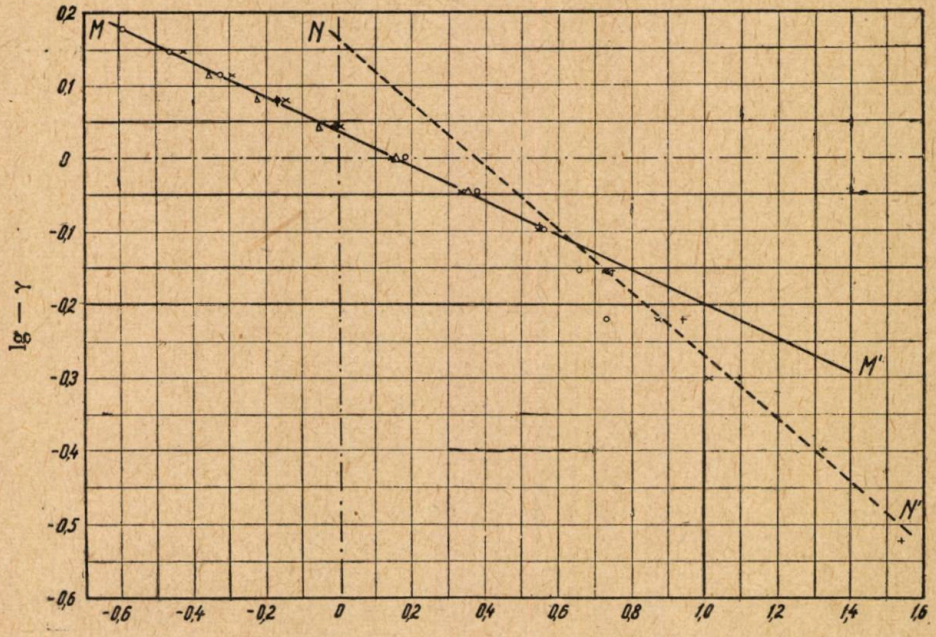
Diagramm 8.

b) Linie NN' für $\gamma < 0{,}75$

$$\lg \underset{<0{,}75}{\gamma} = -0{,}435 \frac{1}{\sqrt{2}} \lg \frac{10}{T_r P_r^{0{,}60}} \Big/ \left(\frac{T_r}{P_r^{0{,}60}}\right)^{1{,}50} + 0{,}160$$

oder

$$\lg \underset{<0{,}75}{\gamma} = \quad 0{,}308 \left(\frac{P_r^{0{,}60}}{T_r}\right)^{1{,}50} \lg \frac{T_r P_r^{0{,}60}}{10} + 0{,}160 \qquad (2)$$



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \lg \frac{10}{T_r P_r^{0{,}60}} \Big/ \left(\frac{T_r}{P_r^{0{,}60}}\right)^{1{,}50}$$

Diagramm 9.

Mit den Gleichungen (1) und (2) haben wir die Aktivitätskoeffizienten von der Arbeit NEWTON's berechnet. Die Resultate ($\gamma_{(1)}$ *bzw.* $\gamma_{(2)}$) sind in den Tabellen 2 und 3 angegeben.

TABELLE 2

Vergleich zwischen beobachteten und berechneten Aktivitätskoeffizienten

Nr.	G A S	T_r	P_r	$\gamma_{(beob)}$	$\gamma_{(N)}$	$\gamma_{(1)}$	$\gamma_{(2)}$	$\gamma_{(3)}$	$\gamma_{(4)}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	Argon	1,145	1,0	0,79	0,78	0 80		0,80	
2	»	1,145	2,0	0,60	0,60		0,64		0,62
3	»	1,478	1,0	0,91	0,915	0,90		0,90	
4	»	1,478	3,0	0,79	0,795	0,79		0,79	
5	Sauerstoff	1,76	1,0	0,955	0,955	0,955		0,955	
6	»	1,76	10,0	0,86	0,87	0,88		0,89	
7	»	1,76	20,0	1,13	1,14	1,16		1,16	
8	»	2,41	3,0	1,00	1,00	0,99		0,99	
9	»	2,41	12,0	1,135	1,135	1,116		1,120	
10	»	2,41	21,0	1,43	1,43	1,44		1,45	
11	»	3,06	3,0	1,04	1,04	1,04		1,04	
12	»	3,06	12,0	1,20	1,20	1,19		1,20	
13	»	3,06	21,0	1,485	1,48	1,487		1,493	
14	Methan	1,43	1,0	0,91	0,91	0,89		0,89	
15	»	1,43	10,0	0,62	0,67		0,65		0,72
16	»	1,43	20,0	0,85	0,93	0,87		0,88	
17	»	1,17	1,0	0,80	0,80	0,81		0,81	
18	»	1,17	10,0	0,395	0,39		0,332		0,368
19	»	1,17	20,0	0,59	0,59		0,41		0,47
20	»	1,96	1,0	0,985	0,975	0,980		0,980	
21	»	1,96	10,0	0,93	0,95	0,96		0,96	
22	»	1,96	20,0	1,21	1,23	1,26		1,27	
23	»	2,48	3,0	1,005	1,005	0,994		0,997	
24	»	2,48	12,0	1,10	1,145	1,13		1,13	
25	»	2,48	21,0	1,37	1,44	1,45		1,46	
26	Kohlensäure	0,997	2,0	0,38	0,385		0,49		0,47
27	»	0,997	5,0	0,23	0,23		0,25		0,27
28	»	0,997	10,0	0,21	0,205		0,15		0,17
29	»	1,227	1,0	0,84	0,835	0,83		0,83	
30	»	1,227	5,0	0,49	0,495		0,49		0,52
31	»	1,227	10,0	0,47	0,47		0,40		0,44
32	»	1,55	1,0	0,93	0,93	0,92		0,92	
33	»	1,55	5,0	0,785	0,775	0,774		0,777	
34	»	1,55	10,0	0,785	0,775	0,773		0,776	

TABELLE 2

(Fortsetzung)

Nr.	GAS	T_r	P_r	$\Upsilon_{(beob)}$	$\Upsilon_{(N)}$	$\Upsilon_{(1)}$	$\Upsilon_{(2)}$	$\Upsilon_{(3)}$	$\Upsilon_{(4)}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
35	Äthylen	1,32	1,0	0,87	0,875	0,86		0,86	
36	»	1,32	10,0	0,56	0,565		0,51		0,57
37	»	1,32	20,0	0,80	0,795		0,73	0,79	
38	»	1,45	1,0	0,91	0,91	0,90		0,90	
39	»	1,45	10,0	0,675	0,68		0,672		0,745
40	»	1,45	20,0	0,95	0,955	0,89		0,90	
41	»	1,67	1,0	0,95	0,945	0,94		0,94	
42	»	1,67	10,0	0,845	0,845	0,840		0,843	
43	»	1,67	20,0	1,14	1,13	1,09		1,10	
44	Stickstoff	1,14	1,0	0,78	0,77	0,80		0,80	
45	»	1,14	2,0	0,59	0,59		0,63		0,62
46	»	1,77	1,0	0,955	0,955	0,957		0,957	
47	»	1,77	10,0	0,86	0,88	0,89		0,89	
48	»	1,77	20,0	1,16	1,16	1,16		1,17	
49	»	2,56	3,0	1,01	1,01	1,00		1,00	
50	»	2,56	15,0	1,24	1,24	1,23		1,23	
51	»	2,56	21,0	1,455	1,455	1,461		1,467	
52	»	4,55	3,0	1,05	1,05	1,08		1,08	
53	»	4,55	12,0	1,23	1,23	1,22		1,22	
54	»	4,55	21,0	1,45	1,455	1,44		1,44	
55	»	6,93	21,0	1,32	1,33	1,34		1,34	
56	Ammoniak	0,796	0,02	0,979	0,979	1,047		0,970	
57	»	0,796	0,05	0,952	0,952	1,010		0,957	
58	»	0,796	0,15	0,868	0,868	0,924		0,904	
59	»	0,990	0,15	0,940	0,939	0,973		0,951	
60	»	0,99	10,0	0,185	0,180		0,144		0,159
61	»	1,166	1,0	0,79	0,79	0,81		0,81	
62	»	1,166	5,0	0,405	0,415		0,424		0,452
63	»	1,166	10,0	0,32	0,385		0,33		0,36
64	Kohlenoxyd	1,51	5,0	0,735	0,74		0,748	0,759	
65	»	1,51	10,0	0,73	0,73	0,76		0,75	
66	»	1,51	20,0	1,02	1,02	0,96		0,96	
67	»	2,09	3,0	0,955	0,955	0,945		0,948	
68	»	2,09	12,0	1,035	1,035	1,042		1,047	
69	»	2,09	21,0	1,355	1,35	1,36		1,368	
70	»	3,16	3,0	1,04	1,04	1,04		1,04	
71	»	3,16	12,0	1,22	1,22	1,19		1,20	
72	»	3,16	21,0	1,505	1,50	1,487		1,494	
73	»	5,03	12,0	1,24	1,22	1,21		1,22	
74	»	5,03	21,0	1,46	1,43	1,41		1,42	
75	Dichlorodifluoromethan	0,778	0,02	0,980	0,976	1,046		0,969	
76	»	0,778	0,10	0,920	0,910	0,959		0,927	
77	»	0,807	0,05	0,968	0,959	1,013		0,959	
78	»	0,807	0,15	0,910	0,880	0,928		0,907	
79	»	0,852	0,02	0,984	0,980	1,051		0,974	
80	»	0,852	0,30	0,820	0,815	0,858		0,850	

TABELLE 2

(Fortsetzung)

Nr.	GAS	T_r	P_r	$\Upsilon_{(beob)}$	$\Upsilon_{(N)}$	$\Upsilon_{(1)}$	$\Upsilon_{(2)}$	$\Upsilon_{(3)}$	$\Upsilon_{(4)}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
81	Methylchlorid	0,825	0,02	0,980	0,980	1,049		0,972	
82	»	0,825	0,15	0,886	0,884	0,934		0,912	
83	»	0,861	0,05	0,966	0,964	1,020		0,966	
84	»	0,861	0,30	0,820	0,810	0,862		0,854	
85	»	0,898	0,02	0,982	0,984	1,054		0,977	
86	»	0,898	0,10	0,942	0,941	0,985		0,953	
87	»	0,898	0,30	0,840	0,833	0,877		0,868	
88	Schwefeldioxyd	0,714	0,05	0,938	0,935	0,996		0,944	
89	»	0,778	1,10	0,902	0,909	0,959		0,927	
90	Wasserdampf	0,652	0,02	0,962	0,960	1,032		0,957	
91	»	0,737	0,02	0,971	0,971	1,042		0,966	
92	»	0,737	0,05	0,940	0,940	1,001		0,948	
93	»	0,823	0,10	0,919	0,921	0,970		0,938	
94	»	0,909	0,30	0,840	0,840	0,881		0,872	
95	»	1,080	1,0	0,68	0,70	0,77		0,77	
96	n-Hexan	0,873	0,02	0,985	0,982	1,052		0,975	
97	»	0,873	0,30	0,831	0,829	0,868		0,859	
98	»	0,932	0,05	0,971	0,973	1,028		0,974	
99	»	0,932	0,50	0,760	0,761	0,817		0,813	
100	Acetylen	0,883	0,02	0,984	0,984	1,053		0,976	
101	»	0,883	0,15	0,921	0,910	0,950		0,928	
102	Äthyläther	0,901	0,02	0,985	0,985	1,054		0,977	
103	»	0,901	0,10	0,950	0,943	0,986		0,954	
104	»	0,901	0,30	0,855	0,839	0,878		0,869	
105	»	0,971	0,05	0,980	0,978	1,031		0,977	
106	»	0,971	0,15	0,942	0,937	0,969		0,947	
107	»	0,971	0,50	0,820	0,794	0,834		0,830	
108	»	1,12	1,0	0,78	0,76	0,79		0,79	
109	»	1,12	3,0	0,455	0,45		0,498		0,509
110	»	1,282	2,0	0,76	0,74	0,76		0,76	
111	»	1,282	6,0	0,55	0,54		0,52		0,56
112	Stickoxyd	1,082	1,0	0,79	0,71	0,77		0,77	
113	»	1,082	2,0	0,57	0,53		0,58		0,56
114	»	1,302	1,0	0,87	0,87	0,86		0,86	
115	»	1,302	2,0	0,75	0,75	0,77		0,77	
116	»	1,575	1,0	0,92	0,94	0,92		0,92	
117	»	1,575	2,0	0,85	0,88	0,86		0,86	

TABELLE 2

(Fortsetzung)

Nr.	G A S	T_r	P_r	$\gamma_{(beob)}$	$\gamma_{(N)}$	$\gamma_{(1)}$	$\gamma_{(2)}$	$\gamma_{(3)}$	$\gamma_{(4)}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
118	Krypton	1,35	1,0	0,93	0,89	0,87		0,87	
119	»	1,35	2,0	0,84	0,79	0,79		0,79	
120	»	2,44	1,0	0,995	1,00	1,018		1,017	
121	»	2,44	2,0	0,995	1,00	0,998		1,000	
122	Isopentan	0,658	0,02	0,962	0,960	1,022		0,958	
123	»	0,81	0,02	0,981	0,981	1,048		0,971	
124	»	0,81	0,15	0,87	0,880	0,93		0,93	
125	»	1,025	1,00	0,66	0,64		0,74		0,64
126	»	1,025	2,0	0,42	0,43		0,52		0,50
127	»	1,20	1,0	0,81	0,815	0,82		0,82	
128	»	1,20	2,0	0,66	0,66		0,69		0,67
129	Zyklohexan	0,855	0,30	0,83	0,815	0,86		0,85	
130	»	0,983	0,20	0,93	0,93	0,95		0,93	
131	»	0,983	0,70	0,74	0,72	0,79		0,78	
132	»	1,035	1,0	0,71	0,67	0,75		0,75	
133	»	1,035	2,0	0,43	0,44		0,53		0,51
134	Methanol	0,847	0,05	0,961	0,961	1,018		0,964	
135	»	0,847	0,15	0,892	0,896	0,940		0,919	
136	»	0,923	0,10	0,953	0,958	0,991		0,959	
137	»	0,923	0,30	0,846	0,850	0,889		0,880	
138	»	1,00	0,50	0,89	0,825	0,85		0,84	
139	»	1,00	1,0	0,69	0,61		0,71		0,62
140	Äthanol	0,918	0,05	0,980	0,972	1,027		0,972	
141	»	0,918	0,30	0,880	0,846	0,884		0,875	
142	»	0,986	0,05	0,990	0,980	1,033		0,979	
143	»	0,986	0,30	0,948	0,881	0,907		0,897	
144	»	0,986	0,30	0,890	0,806	0,841		0,832	

Wie zu erwarten war, sind diese Differenzen gross für kleine reduzierte Drücke. Es ist leicht ersichtbar, dass die Grenze von $\lg\gamma$ aus den Gleichungen (1) und (2) für $P_r = 0$ die Werte 0,035 bzw. 0,160 haben, anstatt Null wie es sein müsste, weil bei kleinen Drücken die Eigenschaften der reellen Gase sich denen der idealen Gase nähern, für welche $\gamma = 1$ also $\lg \gamma = 0$ ist.

TABELLE 3

Vergleich zwischen beobachteten und berechneten Aktivitätskoeffizienten von Gasen mit sehr niederen kritischen Grössen

Nr.	G A S	T_n	P_n	$\gamma_{(beob)}$	$\gamma_{(N)}$	$\gamma_{(1)}$	$\gamma_{(2)}$	$\gamma_{(3)}$	$\gamma_{(4)}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
145	Helium	1,54	1,0	0,91	0,93	0,92		0,92	
146	»	6,81	9,0	1,135	1,13	1,156		1,116	
147	»	9,32	9,0	1,10	1,10	1,14		1,15	
148	»	15,4	9,0	1,07	1,07	1,12		1,13	
149	»	15,4	30,0	1,24	1,24	1,26		1,26	
150	»	15,4	100,0	2,03	2,03	1,91		1,92	
151	»	28,3	9,0	1,03	1,03	1,10		1,11	
152	»	28,3	75,0	1,32	1,32	1,32		1,33	
153	»	35,9	15,0	1,04	1,04	1,11		1,12	
154	»	35,9	100,0	1,33	1,33	1,33		1,33	
155	Neon.	1,73	2,0	0,94	0,92	0,90		0,90	
156	»	1,73	3,0	0,92	0,89	0,87		0,87	
157	»	3,31	3,0	1,05	1,05	1,05		1,05	
158	»	8,95	3,0	1,03	1,03	1,09		1,10	
159	Wasserstoff	1,42	2,0	0,835	0,83	0,809		0,811	
160	»	2,19	2,0	0,98	0,985	0,97		0,98	
161	»	2,19	4,0	0,975	0,985	0,956		0,959	
162	»	6,65	9,0	1,13	1,13	1,16		1,16	
163	»	6,65	50,0	2,05	2,05	2,08		2,08	
164	»	14,2	9,0	1,07	1,07	1,13		1,13	
165	»	14,2	50,0	1,455	1,455	1,448		1,455	
166	»	18,8	9,0	1,05	1,05	1,12		1,12	
167	»	18,8	50,0	1,33	1,33	1,34		1,34	

Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen, haben wir eine Korrektion zum letzten Glied der Gleichungen (1) und (2) eingeführt, welche dann folgende endgültige Formen annehmen:

$$\lg \underset{>0,75}{\gamma} = 0{,}170 \left(\frac{P_r^{0,60}}{T_r} \right)^{1,50} \lg \frac{T_r P_r^{0,60}}{10} + 0{,}037 \cdot 1{,}06^{-1/P_r} \qquad (3)$$

$$\lg \underset{<0,75}{\gamma} = 0{,}308 \left(\frac{P_r^{0,60}}{T_r} \right)^{1,50} \lg \frac{T_r P_r^{0,60}}{10} + \frac{1}{10} \cdot 2{,}24^{\frac{P_r - 1}{P_r}}. \qquad (4)$$

Die mit diesen Gleichungen berechneten Aktivitätskoffizienten $\gamma_{(3)}$ und $\gamma_{(4)}$ sind ebenso in den Tabellen 2 und 3 angegeben.

Für die Berechnung wird zunächst Gleichung (3) genommen; ist der erhaltene γ kleiner als 0,75, so wird Gleichung (4) benutzt. In dem Fall (z. B. Nr. 37), wo $\gamma_{(3)} < 0{,}75$ und $\gamma_{(4)} > 0{,}75$ ist, nimmt man den arithmetischen Mittelwert.

Die Zusammenstimmung zwischen den berechneten Werten von γ und $\gamma_{(beob)}$ wird in der Tabelle 4 zusammenfassend gezeigt.

TABELLE 4

Zusammenfassung der Ergebnisse

Abweichung in %	Anzahl von berechneten Fälle				
	$\gamma_{(x)}=\gamma_{(N)}$	$\gamma_{(x)}=\gamma_{(1)}$	$\gamma_{(x)}=\gamma_{(2)}$	$\gamma_{(x)}=\gamma_{(3)}$	$\gamma_{(x)}=\gamma_{(4)}$
0 bis 2	132	58	4	88	5
2 bis 5	23	40	5	36	2
5 bis 10	9	43	7	19	4
über 10	3	1	9	1	12
Summe	167	142	25	144	23
	167	167		167	
Mittlere Abweichung	1,33%	3,32%	11,10%	2,18%	9,87%

Diese Tabelle gibt die Anzahl der berechneten Fälle, welche Abweichungen zwischen 0 bis $\pm$ 2% usw. haben, sowie auch die mittlere Abweichung aller berechneten Fälle.

$$\text{Abweichung } \% = \frac{\gamma_{(x)} - \gamma_{(beob)}}{\gamma_{(beob)}} 100$$

wo $\gamma_{(x)}$ die vom NEWTON graphisch interpolierte bzw. nach Gleichungen (1), (2), (3), (4) berechneten Aktivitätskoeffizienten darstellt.

541.1 CHIMIE PHSIQUE

ERKLÄRUNG EINER BEIM KATIONENUMTAUSCH AUFTRETENDEN GESETZMÄSSIGKEIT

von N. Cernescu

G. PAVLOVSCHI *stellte fest, dass in der graphischen Darstellung des Kationenumtausches, wenn die Gleichgewichtskonzentration der Lösung an eintauschenden Kationen als Funktion der Anfangskonzentration wiedergegeben wird, an Stelle einer kontinuierlichen Kurve eine geknickte Linie erhalten wird, was im Widerspruch zu den Ergebnissen älterer Forschungen zu stehen scheint. Dieser scheinbare Widerspruch wird durch eine kritische Diskussion der theoretischen Grundlagen des Umtauschgleichgewichtes sowie durch die Interpretation der experimentellen Ergebnisse erklärt.*

PROBLEMSTELLUNG

Die Reaktion zwischen der Lösung eines Salzes, welches das monovalente Kation M_2 enthält und einer mit einem austauschfähigen monovalenten Kation (Permutit, Zeolith, Ton) M_1 gesättigten Substanz, kann durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$(M_1) + M_2 \rightleftarrows (M_2) + M_1$$

Die Gleichgewichtsbedingung wird gegeben durch die Gleichung:

$$(1) \qquad \frac{a_{(M_1)} \cdot a_{M_2}}{a_{(M_2)} \cdot a_{M_1}} = k_1 \quad \text{oder} \quad \frac{a_{(M_1)}}{a_{(M_2)}} = k_1 \frac{a_{M_1}}{a_{M_2}}$$

in welcher a_M die Aktivitäten der in Reaktion tretenden Kationen, die sich entweder im Bodenkörper [$a_{(M_1)}$ und $a_{(M_2)}$] oder in Lösung befinden [a_{M_1} und a_{M_2}] darstellen. Durch Ersetzung der Aktivitäten durch die analytischen Konzentrationen c_M multipliziert mit den entsprechenden Aktivitätskoeffizienten f_M, erhält die Gleichung (1) die Form:

$$(2) \qquad \frac{c_{(M_1)} \cdot f_{(M_1)}}{c_{(M_2)} \cdot f_{(M_2)}} = k_1 \frac{c_{M_1} \cdot f_{M_1}}{c_{M_2} \cdot f_{M_2}} .$$

Nach J. MÖLLER (1) können die Aktivitätskoeffizienten als das Produkt zweier Faktoren angesehen werden:

$$f = f_i . f_u . \tag{3}$$

Darin bedeutet f_i die Änderung der Aktivität als Folge der interionischen Wirkung, während mit f_u die sogenannte aussalzende Wirkung bezeichnet wird.

Jeder dieser beiden Hauptfaktoren ist komplexer Natur und zerfällt in eine Reihe anderer Faktoren, die verschiedene Formen interionischer Wirkungen darstellen. Mit Hilfe des Prinzips der spezifischen interionischen Wirkung BRÖNSTED's zeigt J. MÖLLER, dass die Wirkung der in Lösung befindlichen Kationen und Anionen auf die Kationen und Anionen (M_1) und (M_2) des festen Körpers mit grosser Annäherung dieselbe ist, sodass der überwiegende Einfluss des Anionenkomplexes auf den Aktivitätskoeffizienten der an diesen gebundenen Ionen den Wert des Verhältnisses $f_{(M_1)}$: $f_{(M_2)}$ bestimmt.

Das Verhältnis zwischen den Aktivitätskoeffizienten $f_{(M_1)}$: $f_{(M_2)}$ wird auf diese Weise gleich dem Verhältnis zwischen den Faktoren, welche die Wirkung des Anionenkomplexes auf die gebundenen Kationen darstellen [$f_{(M_1)\,P}$: $f_{(M_2)\,P}$] und welches als konstant angesehen werden kann. Wenn wir schreiben:

$$\frac{f_{(M_1)}}{f_{(M_2)}} = \frac{f_{(M_1)\,P}}{f_{(M_2)\,P}} = k_2 \tag{4}$$

so erhalten wir aus (2):

$$\frac{c_{(M_1)}}{c_{(M_2)}} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{c_{M_1} \cdot f_{M_1}}{c_{M_2} \cdot f_{M_2}} \qquad \frac{k_1}{k_2} = K. \tag{5}$$

Wie man sieht, gelangt MÖLLER zum Schluss, dass in der Berechnung der Austauschgleichgewichtskonstante für die adsorbierten Kationen die analytischen Konzentrationen, für die Anionen der Lösung hingegen die entsprechenden Aktivitäten, und nur im Falle grosser Verdünnungen die analytischen Konzentrationen eingesetzt werden müssen.

Es ist interessant zu erwähnen, dass vor J. MÖLLER, A. P. VANSELOV (4) durch einen anderen Gedankengang zu einer ähnlichen Feststellung gelangt ist.

Bezeichnet man mit A den Anionen-Komplex des adsorbierenden Substratums, das mit dem Kation Na^+ gesättigt ist, und welches sich mit dem Kation K^+ des in Lösung befindlichen Salzes austauscht und

nimmt man an, dass $K-A$ und $Na-A$ als zwei unabhängige Phasen wirken, so muss die Gleichgewichtsgleichung lauten:

$$\frac{a_{Na}}{a_K} = k. \tag{6}$$

a_{Na} und a_K stellen die entsprechenden Aktivitäten der Na- und K-Kationen in der Lösung dar.

Da jedoch diese Gleichung für kein einziges beim Kationenaustausch studiertes System nachgewiesen werden konnte, nimmt A. P. VANSELOV (4) an, dass die beiden Substanzen $Na-A$ und $K-A$ eine kontinuierliche Reihe von Mischkristallen bilden, und dass infolgedessen ihre Aktivitäten gleich sind den Molarfraktionen mit denen sie an der Bildung des Mischkristalles teilnehmen. Die Aktivitäten der Kationen im Bodenkörper werden also sein:

$$a\,(Na-A) = \frac{NaA}{NaA + KA} \quad \text{und} \quad a\,(K-A) = \frac{KA}{NaA + KA}. \tag{7}$$

Es ist leicht zu sehen, dass das Verhältnis zwischen den so ausgedrückten Aktivitäten gleich wird dem Verhältnis der analytischen Konzentrationen der beiden Kationen im adsorbierenden Substrat, also:

$$\frac{KA}{NaA} = k\,\frac{a_K}{a_{Na}}. \tag{8}$$

Für den Fall des Austausches eines monovalenten Kations (M_1) mit einem anderen, bivalenten (M_2), wird die Gleichgewichtsgleichung:

$$2\,(M_1) + M_2 \rightleftarrows 2M_1 + (M_2)$$

und die Anwendung des Massenwirkungsgesetzes führt zur Gleichung:

$$\frac{c_{M_2} \cdot f_{M_2} \cdot c^2_{(M_1)} \cdot f^2_{(M_1)}}{c_{(M_2)} \cdot f_{(M_2)} \cdot c^2_{M_1} \cdot f^2_{M_1}} = k. \tag{9}$$

Sowohl MÖLLER (1), als auch A. P. VANSELOV (4) haben mit Hilfe der erwähnten Gleichungen eine gute Konstanz für k erhalten. Die Konstanz des Wertes k wurde für Zeolithe, Permutite, und selbst Tone, erreicht.

G. PAVLOVSCHI (2) gelangt bei den Kationenaustauschversuchen mit Permutit und Böden zu einigen Ergebnissen, welche jenen von MÖLLER und VANSELOV zu widersprechen scheinen.

Behandelt man eine bestimmte Menge eines hydratisierten Aluminiumsilikates (Permutit, Ton, Boden), das mit einem bestimmten Kation (z. B. Na) gesättigt ist, mit gleichen Volumen einer Salzlösung (z. B. KCl), welche verschiedene Mengen der eintauschenden Substanz

enthält, und bezeichnet man mit y die Menge des eingetauschten Kations und mit b die Anfangskonzentration des eintauschenden Kations, so entspricht, beim Gleichgewicht, der Gehalt der Lösung an eintauschenden Kationen $c = (b - y)$.

Die Ergebnisse können graphisch dargestellt werden, indem wir auf die Abszisse die Anfangskonzentration b des eintauschenden Kations, auf die Ordinate hingegen die Gleichgewichtskonzentration c des eintauschenden Kations auftragen. Da der Versuch bei konstantem Volumen gemacht wird, können diese Konzentrationen durch den Gehalt der Kationen der Lösung in Milliäquivalenten dargestellt werden. Bei dieser Darstellung der Ergebnisse erhält man eine gebrochene Linie, die aus 2 Geraden mit verschiedenen Winkelkoeffizienten besteht; nach G. Pavlovschi (2) entsprechen diese Geraden Kationengruppen mit verschiedenen Dissoziationsmöglichkeiten (verschiedene Haftfestigkeiten).

Doch für dieselben Konzentrationen des eintauschenden Kations erhalten sowohl J. Möller als auch A. P. Vanselov für den Wert k eine gute Konstanz; auf keinen Fall erscheint ein plötzlicher Wechsel dieser Konstante beim Überschreiten einer bestimmten Konzentration. Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Nichtübereinstimmung der von den erwähnten Autoren gezogenen Schlussfolgerungen zu erklären.

EIGENE ERGEBNISSE

Da die Mehrzahl der Versuche G. Pavlovschi's an Böden durchgeführt wurde, so haben wir es vorgezogen, dasselbe Material zu verwenden. 10—20 g Boden wurden in Zentrifugengläser mit je 60 ccm Lösung, die zunehmende Mengen von $NH_4\,Cl$ enthielt, behandelt. Das Gemisch wurde 15—20 Minuten mit Hilfe eines Rührwerkes gerührt. Darauf wurde bis zur Klärung zentrifugiert, und ein aliquoter Teil (20—30 ccm, je nach der Konzentration der Lösung) abpipettiert. Die im Boden eingetauschte Ammonium-Menge, die den ausgetauschten Basen äquivalent ist, wurde nach der Umrechnung auf 60 ccm durch Differenz ermittelt. Für die Bestimmung des Ammoniums wurde die Formol-Methode (Kolthoff) angewendet. Das Ammonium wird in Hexametylentetramin übergeführt, wobei die freiwerdende HCl mit einer $n/50$ $Na\,OH$-Lösung, die aus einer Mikrobürette zugegossen wird, titriert wird. Diese zum ersten Mal von P. Vageler für die Bestimmung der austauschbaren Basen des Bodens eingeführte Methode wurde auch von G. Pavlovschi bei seinen eigenen Bestimmungen angewandt. Die experimentellen Ergebnisse finden sich in den Tabellen 1, 2, 3 und 4.

TABELLE 1

Umtauschversuche mit dem Podsolboden von Văcăreşti.
20 g Boden + 60 ccm NH_4Cl — Lösung; $S = 15{,}16$ Milliäquiv. pro 100 g; $T = 20{,}16$ Milliäquiv.

$$\frac{[NH_4]}{[S]-[NH_4]} = 0{,}279\left(\frac{NH_4}{S_b}-0{,}25\right).$$

Anfangskonz. Milliäquiv. b	Gleichgew. konz. Milliäquiv. c	Eingetauschte $[NH_4]$—Menge bzw. Ausgetausch. S_b—Menge $b-c$	$S-[NH_4]$ in Boden Millläquiv.	$\frac{[NH_4]}{[S]-[NH_4]}$ in Boden	$\frac{[NH_4]}{S_b}$ in Lösung	k'
0,302	0,102	0,200	2,83	0,071	0,510	0,273
0,403	0,146	0,257	2,78	0,093	0,568	0,292
0,503	0,198	0,305	2,73	0,112	0,650	0,280
0,603	0,253	0,350	2,68	0,131	0,723	0,299
0,704	0,308	0,396	2,64	0,150	0,778	0,284
0,805	0,374	0,431	2,60	0,166	0,862	0,271
0,907	0,435	0,472	2,56	0,184	0,922	0,273
1,006	0,499	0,507	2,53	0,200	0,984	0,272
1,108	0,564	0,544	2,49	0,218	1,037	0,277
1,208	0,631	0,577	2,46	0,235	1,094	0,278
1,309	0,705	0,604	2,43	0,249	1,167	0,271
1,407	0,771	0,636	2,39	0,266	1,212	0,276
1,510	0,845	0,665	2,37	0,281	1,271	0,275
1,610	0,918	0,692	2,34	0,296	1,326	0,275
1,713	0,994	0,719	2,31	0,311	1,382	0,275
1,812	1,065	0,747	2,29	0,326	1,425	0,277
1,913	1,134	0,779	2,25	0,346	1,460	0,286
2,013	1,212	0,801	2,23	0,359	1,513	0,285
2,215	1,366	0,849	2,18	0,390	1,601	0,288

Die Ergebnisse wurden graphisch dargestellt, indem auf die Abszisse die zu Beginn des Experimentes in Lösung befindliche Ammoniummenge in Milliäquivalenten aufgetragen wurde; während die Ordinate entweder die am Schluss des Experimentes in Lösung befindliche Ammoniummenge (Gleichgewichtskonzentration) in Milliäquivalenten (punktierte Linie) zeigt, oder die Differenz zwischen dem Anfangs- und Endgehalt (volle Linie), welcher die adsorbierte Ammoniummenge, beziehungsweise die ausgetauschten Basen, darstellt (Diagramme der Figur 1). Besonders für die Änderung des Endgehaltes im Verhältnis zum Anfangsgehalt (punktierte Linie) bestätigt sich die Beobachtung G. Pavlovschi's. In dem in Betracht gezogenen Intervall kann der Ablauf des Austauschprozesses durch eine gebrochene Linie dargestellt werden, die aus zwei Geraden besteht. Eine aufmerksamere Prüfung der in einem entsprechenden Massstab graphisch dargestellten Ergebnisse scheint dennoch eine flache Krümmung im ersten Abschnitt zu ergeben, sodass eine Linie, die diesen Werten genau folgt, durch den O - Punkt

TABELLE 2

Umtauschversuche mit dem Podsolboden von Snagov; 20 g Boden + 60 ccm $NH_4\,Cl$—Lösung. $S = 12{,}05$ Milliäquiv. pro 100; $T = 17{,}98$ Milliäquiv.

$$\frac{[NH_4]}{[S]-[NH_4]} = 0{,}228\left(\frac{NH_4}{S_b}-0{,}48\right).$$

Anfangskonz. Milliäquiv. b	Gleichgew. konz. Milliäquiv. c	Eingetauschte $[NH_4]$—Menge bzw. Ausgetausch. S_b—Menge $b-c$	$S-[NH_4]$ in Boden Milliäquiv.	$\frac{[NH_4]}{[S]-[NH_4]}$ in Boden	$\frac{[NH_4]}{S_b}$ in Lösung	k'
0,302	0,134	0,168	2,24	0,075	0,800	0,234
0,504	0,250	0,254	2,16	0,117	0,984	0,233
0,706	0,375	0,331	2,08	0,159	1,133	0,243
0,907	0,508	0,399	2,01	0,198	1,273	0,249
1,109	0,666	0,443	1,97	0,224	1,503	0,220
1,310	0,819	0,491	1,92	0,256	1,670	0,215
1,512	0,973	0,539	1,87	0,288	1,805	0,217
1,714	1,134	0,580	1,83	0,317	1,955	0,214
1,915	1,286	0,629	1,78	0,354	2,044	0,226

TABELLE 3

Umtauschversuche mit der Braunerde von Moara Domnească (60—80 cm). 10 g Boden + 60 ccm $NH_4\,Cl$-Lösung. $S = 24{,}65$ Milliäquiv. pro 100 g; $T = 28{,}3$ Milliäquiv.

$$\frac{[NH_4]}{[S]-[NH_4]} = 0{,}453\left(\frac{NH_4}{S_b}-0{,}10\right).$$

Anfangskonz. Milliäquiv. b	Gleichgew. konz. Milliäquiv. c	Eingetauschte $[NH_4]$—Menge bzw. Ausgetausch. S_b—Menge $b-c$	$S-[NH_4]$ in Boden Milliäquiv.	$\frac{[NH_4]}{[S]-[NH_4]}$ in Boden	$\frac{[NH_4]}{S_b}$ in Lösung	k'
0,302	0,074	0,228	2,23	0,102	0,324	0,455
0,403	0,113	0,290	2,17	0,134	0,389	0,463
0,504	0,160	0,344	2,12	0,162	0,465	0,443
0,605	0,211	0,394	2,07	0,190	0,536	0,435
0,705	0,263	0,442	2,02	0,219	0,595	0,440
0,806	0,318	0,488	1,97	0,248	0,651	0,450
0,907	0,385	0,522	1,94	0,269	0,738	0,422
1,008	0,437	0,571	1,89	0,302	0,765	0,454
1,109	0,504	0,605	1,85	0,327	0,833	0,446
1,202	0,563	0,639	1,82	0,351	0,881	0,450
1,411	0,705	0,706	1,76	0,402	0,999	0,446
1,512	0,778	0,734	1,73	0,425	1,060	0,441
1,613	0,838	0,775	1,69	0,458	1,082	0,466
1,714	0,912	0,802	1,66	0,483	1,137	0,467
1,814	0,985	0,829	1,63	0,508	1,187	0,468
1,915	1,065	0,850	1,61	0,528	1,253	0,457
2,016	1,134	0,882	1,58	0,558	1,285	0,470

TABELLE 4

Umtauschversuche mit dem Podsolboden von Moara Domnească;
20 g Boden + 60 ccm NH_4Cl-Lösung. $S = 8{,}92$ Milliäquiv; $T = 14{,}5$ Milliäquiv.

$$\frac{[NH_4]}{[S]-[NH_4]} = 0{,}328\left(\frac{NH_4}{S_b}-0{,}35\right).$$

Anfangskonz. Milliäquiv. b	Gleichgew. konz. Milliäquiv. c	Eingetauschte $[NH_4]$—Menge bzw. Ausgetausch. S_b—Menge $b-c$	$S-[NH_4]$ in Boden Milliäquiv.	$\frac{[NH_4]}{[S]-[NH_4]}$ in Boden	$\frac{[NH_4]}{S_b}$ in Lösung	k'
0,202	0,074	0,128	1,65	0,078	0,578	0,342
0,302	0,125	0,177	1,60	0,111	0,706	0,312
0,403	0,171	0,232	1,55	0,150	0,737	0,387
0,504	0,236	0,268	1,51	0,177	0,880	0,333
0,605	0,302	0,304	1,48	0,205	0,993	0,318
0,504	0,236	0,268	1,51	0,171	0,880	0,322
0,806	0,435	0,371	1,41	0,263	1,172	0,319
1,008	0,578	0,430	1,35	0,318	1,344	0,320
1,201	0,723	0,478	1,30	0,367	1,512	0,316
1,411	0,881	0,530	1,25	0,424	1,662	0,323
1,613	1,039	0,574	1,21	0,474	1,810	0,325
1,814	1,200	0,610	1,17	0,521	1,967	0,322
2,016	1,370	0,646	1,13	0,571	2,120	0,322
2,218	1,534	0,684	1,10	0,622	2,242	0,328

des Koordonatensystems geht, so wie es die physikalische Wirklichkeit verlangt. Es bleibt jedoch eine gut erwiesene Tatsache: Es besteht ein Knickpunkt, jenseits dessen die Kurve die Gestalt einer Geraden annimmt; selbst unterhalb dieses Punktes ist die Krümmung sehr klein, sodass die betreffende Strecke praktisch als eine Gerade angesehen werden kann, die einen von der ersten Linie abweichenden Neigungswinkel aufweist.

Wir wollen nun die Werte betrachten, welche die Änderungen der adsorbierten NH_4—Mengen, im Verhältnis zum Anfangsgehalt der Lösung an NH_4 darstellen. In diesem Fall beschreiben die Werte eine noch mehr gekrümmte Linie als im vorigen Fall, welche durch den Nullpunkt geht; sie nimmt dann die Gestalt einer Geraden an, wobei auch hier ein Knickpunkt besteht. In einigen Fällen (siehe Podsol von Moara Domnească) scheint es, als ob der Vorgang durch drei aufeinander folgende Gerade dargestellt werden könnte.

Nachdem diese experimentellen Tatsachen festgestellt sind, erhebt sich nun das Problem, die physikalisch-chemischen Ursachen, die die erwähnte Knickung bedingen, festzustellen. Die graphische Darstellung des Kationenumtausches wurde von anderen Forschern in einer anderen, als der von G. Pavlovschi und zuerst von P. Vageler ange-

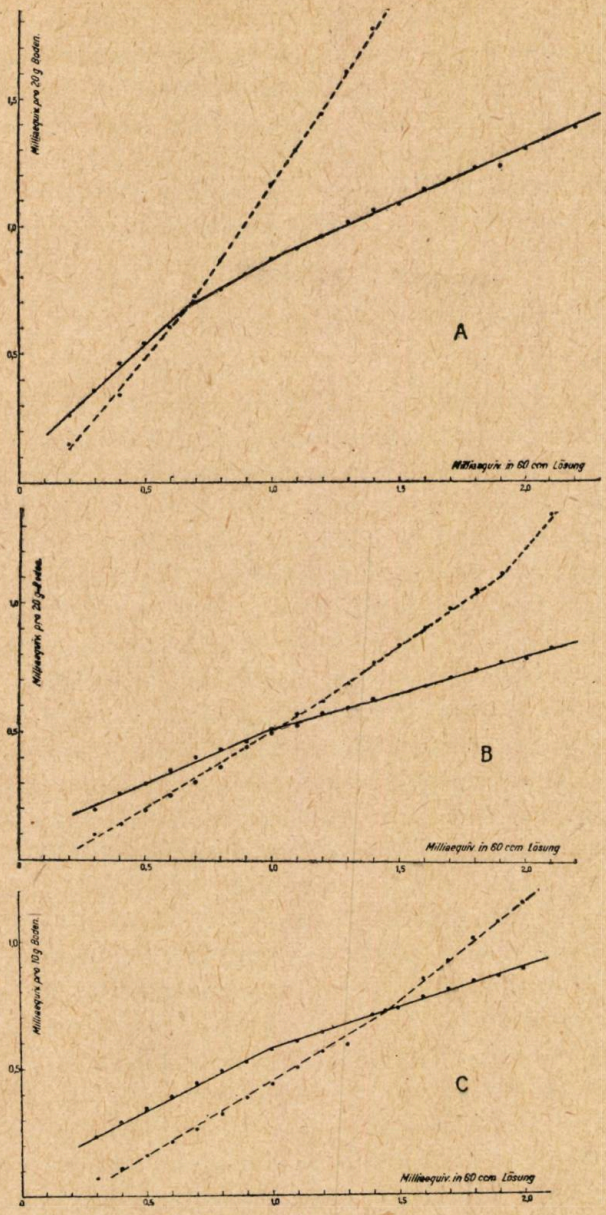


Abb. 1. — Graphische Darstellung der Umtauschversuche mit verschiedenen Böden und NH_4Cl-Lösungen:

A) Podsol von Moara Domnească (s. Tabelle 4);

B) Podsol von Văcărești (s. Tabelle 1);

C) Braunerde von Moara Domnească (s. Tabelle 3).

----NH_4-Gleichgewichtskonzentration der Lösungen (Ordinate) in Zusammenhang mit der Anfangskonzentration der NH_4Cl-Lösung (Abszisse).

—— Adsorbierte NH_4-Menge in Milliäquiv. (Ordinate) in Zusammenhang mit der Anfangskonzentration der NH_4Cl-Lösungen (Abszisse).

wendeten Weise durchgeführt. Bei konstantem Volumen wird auf die Abszisse der Gehalt der Lösung an eintauschendem Kation aufgetragen, während die Ordinate die eingetauschten Mengen, bezogen auf die gleiche Menge umtauschfähigen Bodenkörper zeigt. In diesem Fall wurden kontinuierliche Kurven erhalten, die den bekannten Gang der Absorbtionsisotherme von FREUNDLICH zeigten. Dieses veranlasste G. WIEGNER, zu ihrer mathematischen Beschreibung die gut bekannte Exponentialfunktion:

$$(10) \qquad y = kc^{1/p} \quad \text{bzw.} \quad \log y = \log k + {}^1/_p \log c$$

zu verwenden.

Die graphische Darstellung der adsorbierten NH_4-Mengen als Funktion der Gleichgewichtskonzentration des eintauschenden Kations zeigt, dass in dem in Betracht gezogenen Bereich die Werte kontinuierlich aufeinander folgen und entlang einer Kurve liegen, die mit Hilfe der erwähnten Exponentialfunktion beschrieben werden kann. Aus Figur 2 kann ersehen werden, dass die Werte $\log y$ eine lineare Funktion der Werte $\log c$ darstellen, so wie es die Gleichung (10) verlangt. Die Punkte neigen nur im Falle extremer Verdünnung, und vor allem für entbaste Böden (Podsol) von der Geraden abzuweichen. Es ist ja bekannt, dass bei starken Verdünnungen wie auch bei grösseren Konzentrationen die Adsorbtion nicht mehr der Exponentialfunktion folgt. Der Knick der Linie erscheint nicht mehr im Gebiet der in Frage kommenden Konzentrationen. Die erwähnte Diskontinuität erscheint also als Folge einer bei der graphischen Darstellung unvollständigen Berücksichtigung der das Austauschgleichgewicht bestimmenden Faktoren.

Wir müssten strengstens alle physikalisch-chemischen Elemente gemäss den Überlegungen MÖLLER's und VANSELOV's berücksichtigen. Für gewöhnlich nehmen an der Austauschkapazität der natürlichen Böden die verschiedenen Kationen in folgenden prozentuellen Verhältnissen teil: 80% *Ca*, 15% *Mg*, 2,5% *K* und 2,5% *Na*. Die Berücksichtigung der Wertigkeiten und Aktivitäten aller im Kationenaustauschprozess mitwirkenden Kationen ist praktisch unmöglich. Wir haben versucht festzustellen, ob in dem untersuchten Bereich, der durch die extreme Verdünnung der Lösungen charakterisiert wird, nicht eine vereinfachte Berechnung des Gleichgewichts möglich sei, aus welcher wenigstens qualitativ die Kontinuität des Prozesses ersehen werden könnte.

Zu diesem Zweck bezeichneten wir mit $[NH_4]$ die eingetauschte NH_4-Menge, die der Summe *Sb* der aus dem Boden ausgetauschten Kationen, nach Erreichung des Untauschgleichgewichtes, äquivalent

ist. Bei bekannter Gesamtsumme $[S]$ der im nicht behandelten Boden befindlichen austauschfähigen Basen, wird man, bei Gleichgewicht, im Boden finden: $[S] - [NH_4]$.

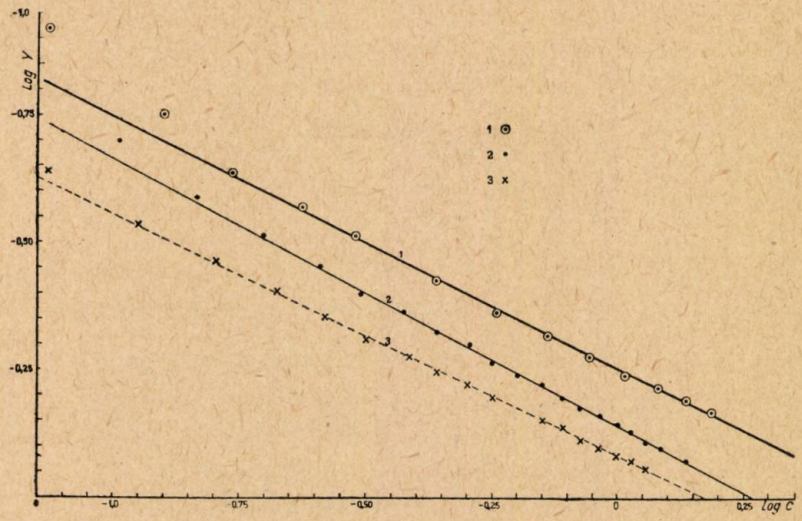


Abb. 2. — Prüfung der Umtauschisotherme (WIEGNER-FREUNDLICH):

$$y = kc^{1/p} \text{ bzw. } \log y = \log k + 1/p \log c$$

1. Podsol Moara Domnească (Tabelle 4).
2. Podsol Văcărești (Tabelle 1).
3. Braunerde Moara Domnească (Tabelle 3).

MÖLLER selbst hat gezeigt, dass im Falle des Austausches von *Ca* aus dem Permutit gegen NH_4 eine gute Konstanz für k erhalten werden kann, ohne die Konzentrationen der monovalenten Kationen zum Quadrat zu erheben, VANSELOV vernachlässigt, indem er mit verdünnten Lösungen arbeitet, die Aktivitätskoeffizienten und verwendet bei der Rechnung die analytischen Konzentrationen. Im Gleichgewicht müsste das Verhältnis zwischen den Konzentrationen der im Boden befindlichen Kationen $[NH_4] : [S] - [NH_4]$ nach dem oben gesagten, proportional dem Verhältnis zwischen den Konzentrationen derselben Kationen in Lösung NH_4: S_b sein.

Die Diagramme (Abb. 3) zeigen, dass für den untersuchten Bereich diese Bedingung vollständig erfüllt ist. Die erhaltenen Geraden gehen jedoch nicht durch den Nullpunkt des Koordinatensystems, wie das der Fall hätte sein müssen, wenn alle im Gleichgewicht mitspielenden Faktoren streng berücksichtigt worden wären. Sie werden in zufrie-

denstellender Weise durch folgende Gleichgewichtsgleichung beschrieben:

$$(11) \qquad \frac{[NH_4]}{[S]-[NH_4]} = k'\left(\frac{NH_4}{S_b} - \alpha\right).$$

Boden *Lösung*

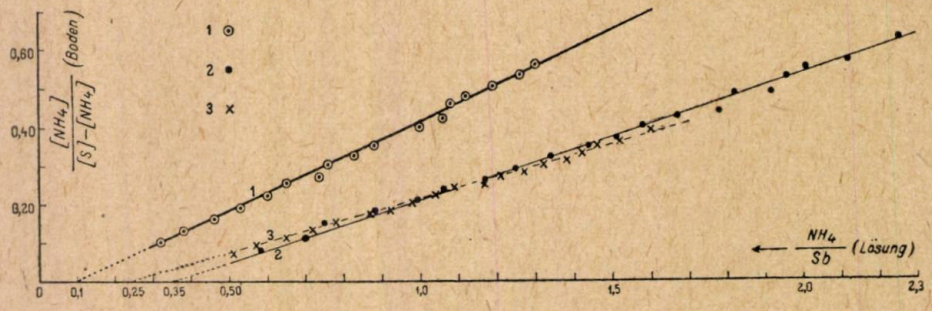


Abb. 3. — Prüfung der Umtauschgleichung:

$$\frac{[NH_4]}{[S]-[NH_4]} = k'\left(\frac{NH_4}{S_b} - \alpha\right).$$

1. Braunerde Moara Domnească (Tabelle 3).
2. Podsol Moara Domnească (Tabelle 4).
3. Podsol Văcărești (Tabelle 1).

Vorläufig können wir die exakte physikalisch-chemische Bedeutung des Korrektionsgliedes α aus der Gleichung (11) nicht präzisieren, da die Versuchsergebnisse ungenügend sind. Wir bemerken nur, dass bei den untersuchten Böden eine bestimmte Regelmässigkeit beobachtet wird. Das Produkt $k'\alpha$ wächst mit dem wachsenden Grad der Entbasung des Bodens:

Boden	$k'\alpha$	$V\%$
Rotbrauner Boden Moara Domnească . . .	0,045	80%
Podsol Văcărești	0,070	75%
Podsol Moara Domnească	0,111	62%

Es ist eine experimentell festgestellte Tatsache, dass die im Boden befindlichen Kationen zwei grossen Gruppen angehören: Das *Ca* und das *Na* haben die Tendenz, sehr rasch in die Austauschsphäre des Komplexes überzugehen, da die Gitter der betreffenden Silikate rasch verwittern und diese Elemente nicht Bildungselemente im Gitter der sich bildenden hydratisierten sekundären Aluminiumsilikate darstellen. Das *Mg* und *K* kann an der Bildung der Gitter der sekundären sich bildenden Silikate teilnehmen, und sie tauschen infolgedessen nur jene Fraktionen um, die sich an der Peripherie des Netzes befinden; aus diesem Grund erscheinen *K* und *Mg* als viel stärker an den adsorbierenden Komplex gebunden. Bei den von uns in den Versuchen angewandten starken Verdünnungen ist es wahrscheinlich, dass *Ca* und *Na* im Umtausch die grösste Rolle spielen, während *Mg* und *K* nur in vernachlässigbaren Mengen daran teilnehmen. In diesem Fall ist der Wert *S*, der

in die Gleichung (11) eingeführt werden muss, in Wirklichkeit kleiner als der durch die Verdrängung sämtlicher Basen gefundene Wert. Das Glied $k'\alpha$ erscheint so als eine Korrektion des Verhältnisses $[NH_4] : [S] - [NH_4]$, dessen Wert in Wirklichkeit etwas grösser als der angenommene ist.

Die Entbasung des Bodens bewirkt, dass das Verhältnis zwischen der Summe der leicht austauschbaren Kationen $Ca + Na$ und der Kationen $Mg + K$ kleiner wird, denn gerade die weniger festgebundenen Kationen werden stärker ausgewaschen. Das Produkt $k'\alpha$ wächst im selben Sinn, und diese Tatsache kann als ein erster Hinweis für die Richtigkeit der aufgestellten Hypothese gelten, die durch weitere Kreuzversuche bestätigt werden muss.

Aus den Tabellen 1, 2, 3 und 4 geht hervor, dass die mit Hilfe der Gleichung (11) für k' berechneten Werte eine zufriedenstellende Konstanz aufweisen. Auf alle Fälle lässt sich kein systematischer Gang feststellen, der das Eingreifen verschiedener Gleichgewichtskonstanten in dem berücksichtigten Bereich anzeigen könnte.

Die Gegenüberstellung der Werte des Verhältnisses NH_4 mit den nach G. Pavlovschi entworfenen Diagrammen (Abb. 1) lässt eine Tatsache hervortreten. Der Knickpunkt der durch Auftragung der Anfangskonzentrationen auf die Abszisse erhaltenen Linie entspricht den Werten des Verhältnisses $\frac{NH_4}{S_b} = 1$. In übereinstimmender Weise ist diese Tatsache für alle vorliegenden Untersuchungsreihen gültig und sie wurde auch an anderen Reihen bestätigt, die wir, um Raum zu sparen, in dieser Arbeit nicht wiedergeben. Übrigens bestätigt sich diese Tatsache auch bei den von G. Pavlovschi und G. Wiegner mit Permutit als Untersuchungsmaterial erhaltenen Werten.

Es ergibt sich also, dass der von G. Pavlovschi beobachtete Knickpunkt demjenigen Gleichgewichtszustand entspricht, in welchem die Menge der in Lösung befindlichen eintauschenden Kationen äquivalent der Summe der aus dem Sedimentkörper ausgetauschten Kationen ist. Oberhalb dieses Punktes überwiegen in der Lösung die eintauschenden, unterhalb dieses Punktes jedoch die ausgetauschten Kationen (Siehe die Diagramme der Abb. 1).

Die Menge des bei Erfüllung der obigen Gleichgewichtsbedingung eingetauschten Ammoniums wird durch die Gleichung (11) gegeben, welche durch Ersetzung des Verhältnisses $NH_4 : S_b$ durch den Wert Eins folgende Form annimmt:

$$(12) \qquad \frac{[NH_4]_e}{[S] - [NH_4]_e} = k'(1-\alpha) \text{ bzw. } \frac{[NH_4]_e}{[S]} = \frac{k'(1-\alpha)}{1+k'(1-\alpha)} = k''.$$

Aus (12) geht hervor dass die im Äquivalenzpunkt eingetauschte Ammoniummenge $[NH_4]_e$ proportional dem Wert $[S]$, also mit der

Summe der sich in diesem System befindlichen austauschfähigen Basen ist. Da sich die Konstante k'' sehr leicht direkt aus den Experimentalwerten berechnen lässt, kann sie für die Charakterisierung des Verhaltens des Bodens gegenüber verdünnten Elektrolyt-Lösungen verwendet werden, da sie bis zu einem gewissen Grad das Festlegungsvermögen der Kationen darstellt. Der Wert dieser Konstante ist für die untersuchten Böden folgender:

Depressionspodsol Snagov	$k'' = 0{,}11$	$k' = 0{,}22$
» Moara-Domnească	$k'' = 0{,}25$	$k' = 0{,}28$
Sekundärer Podsol Văcărești . . .	$k'' = 0{,}19$	$k' = 0{,}32$
Braunerde Moara Domnească . . .	$k'' = 0{,}32$	$k' = 0{,}45$

Aus diesen Daten geht hervor, dass die Werte für k' bei den ausgewaschenen Böden kleiner sind als bei jenen, die einen gesättigteren Komplex besitzen. Die Werte werden in ihrer obigen Definition sowohl durch die Natur des Materials (Dissoziationsmöglichkeiten des Bodenacidoids, die Natur und die Konzentration der die Austauschkapazität des Bodens bildenden Kationen), sowie durch die Gleichgewichtsbedingungen des Systems bestimmt.

Der Parallelismus zwischen den Werten k'' und k' kann nicht vollkommen sein, da, wie die Gleichung (12) zeigt, in der Berechnung die Korrektionskonstante α vorkommt.

ZUSAMMENFASSUNG

Die experimentellen Beobachtungen von G. Pavlovschi über das Bestehen einer Diskontinuität in dem Eintauschen des Ammoniumkations im Boden aus einer NH_4Cl-Lösung werden bestätigt. Die Ursache dieser Diskontinuität liegt in den physikalisch-chemischen Gleichgewichtbedingungen des Systems Boden-Lösung. Für den Knickpunkt sind die aus dem Boden ausgetauschten Mengen den in der Lösung noch befindlichen eintauschenden Ammonium-Mengen äquivalent. Die von G. Pavlovschi aus dem Verlauf dieses Vorganges gezogenen praktischen Schlussfolgerungen bleiben jedoch gültig. Oberhalb des Äquivalenzpunktes im Sinne unserer Definition, ist die Festlegung des eintauschenden Kations weniger intensiv als unterhalb dieses Punktes; in der Lösung überwiegen die eintauschenden Kationen über die aus dem Boden ausgetauschten Kationen. Unterhalb dieses Punktes hingegen ist die Intensität der Festlegung grösser; in der Lösung herrschen die ausgetauschten Kationen vor (die dem eingetauschten Ammonium äquivalent sind).

Wir versuchten eine Vereinfachung der Beschreibung des Austauschgleichgewichtes nach MÖLLER-VANSELOV, indem wir zeigten, dass in dem in Betracht gezogenen Bereich der Verdünnung eine Proportionalität zwischen dem Verhältnis $[NH_4] : [S] - [NH_4]$ im Boden und $NH_4 : S_b$ in der Lösung, wovon eine Korrektionskonstante α abgezogen wird, besteht. Für den Ausdruck des Festlegungsvermögens der Boden-Kationen schlagen wir die Konstante $k'' = \frac{[NH_4]_e}{[S]}$, wo $[NH_4]_e$ die dem Knickpunkt entsprechende eingetauschte Ammoniummenge darstellt. Dieses Verhältniss lässt sich aus den Versuchsdaten direkt berechnen.

BIBLIOGRAPHIE

1. MÖLLER, JÖRGEN, 1937, Studien über den Ionenaustauschprozess. *Kolloid Beihefte*, Bd. 46, 1—112.
2. PAVLOVSCHI GH., 1936, Études des formules proposées pour la description du phenomène d'adsorption et d'échange, *Annales de l'Institut de recherches Agronomiques de Roumanie*. Vol. VIII.
3. VAGELER, P., 1932, Kationen und Wasserhaushalt des Mineralbodens. Springer-Berlin.
4. VANSELOW, ALBERT P., 1932, Equilibria of base Exchange reactions. *Soil Science*. Vol. XXXIII. 95—113.
5. WIEGNER G., 1912, *Journal für Landwirtschaft*.

541.18 CHIMIE COLLOÏDALE

SUR LE MÉCANISME DE LA PRÉCIPITATION DES SUBSTANCES COLLOÏDALES

par **Er. Toporescu**

L'auteur cherche à expliquer le phénomène de coagulation des solutions colloïdales par les sels en tenant compte de la structure du solvant dans lequel on fait les solutions.

Bien que les résultats obtenus dans la précipitation d'une solution colloïdale d'acide stannique par une solution de chlorure de sodium ne m'aient pas encore donné la possibilité de vérifier un problème que je poursuis depuis quelque temps, je crois cependant nécessaire de publier les observations que j'ai pu noter durant cette étude.

J'ai réalisé une méthode permettant de préparer la solution colloïdale d'acide stannique dans un temps ne dépassant pas deux à trois heures au lieu d'au moins un jour [1]).

Cette méthode consiste à chauffer une solution de 2 gr de $SnCl_2$, $2H_2O$ dans 200 cm³ d'eau distillée à laquelle on ajoute 5 cm³ de perhydrol chimiquement pur, pendant 15 minutes, dans un verre, au bain-marie, en agitant continuellement. Pendant cette opération, il se forme un précipité floconneux d'acide stannique qui se dépose facilement. On sépare la précipité obtenu en absorbant le liquide qui surnage à l'aide d'un tube en verre relié à une trompe à eau en fonction. On lave le précipité resté dans le verre à l'eau chaude, on laisse reposer 10 à 15 minutes pour que le précipité ait le temps de se déposer, puis on enlève de nouveau le liquide par le même procédé que précédemment.

---

[1]) W. OSTWALD, Manipulations de Chimie colloïdale. Gauthier-Villars, ed. 1924.

On lave de cette manière le précipité, plusieurs fois de suite, jusqu'à disparition complète de la réaction de l'ion chlore dans l'eau de lavage. La peptisation de l'acide stannique se fait facilement. Après avoir ajouté au précipité 10 gouttes d'une solution concentrée d'ammoniaque, on chauffe au bain-marie jusqu'à ce que le précipité soit dissout, peptisé et l'excès d'ammoniaque chassé. La solution ainsi obtenue et ayant pris la température du laboratoire est filtrée. On y ajoute alors de l'eau distillée pour l'amener à un volume de 400 cm³. La solution colloïdale est très stable et se prête parfaitement aux études de la précipitation par les solutions de chlorure de sodium.

Le dispositif employé pour l'étude de la vitesse de précipitation de la solution colloïdale par une solution de chlorure de sodium est représentée schématiquement par la figure 1. Elle comporte comme source lumineuse une lampe pour épidiascope de 500 watts et comme cellule photoélectrique un luxmètre Dr. B. Lange. L'éprouvette dans laquelle on fait la précipitation de la solution colloïdale est un tube pour colorimétrie que l'on place dans un autre tube en métal qui fait partie d'un thermostat. Ce dispositif a l'avantage d'être très sensible et les diagrammes obtenus sont parfaitement tracés (figure 2).

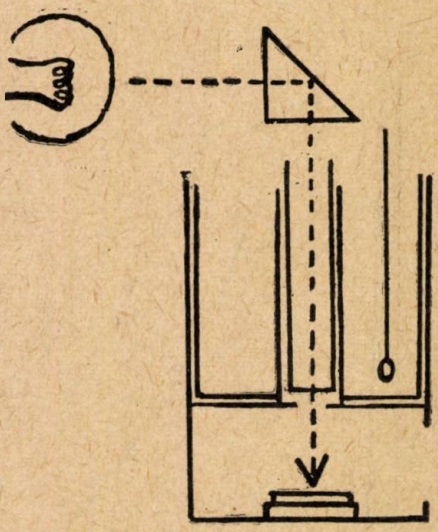


Fig. 1.

Je n'insiterai par sur les opérations préliminaires pour déterminer quelle est la concentration de la solution de chlorure de sodium pour que 10 cm³ de cette solution commence à précipiter 10 cm³ de la solution colloïdale d'acide stannique après 15 minutes à la température du laboratoire ; mais, je dois attirer l'attention sur le fait qu'à la moindre variation dans la concentration des solutions nous obtenons des diagrammes qui ne sont plus identiques, bien que les conditions expérimentales soient restées les mêmes. En conséquence, les solutions doivent être conservées dans des flacons en verre difficilement soluble dans l'eau comme par exemple en verre pyrex, et à l'obscurité. De même, je dois encore mentionner que le tube colorimétrique dans lequel on fait la précipitation doit être, après chaque expérience, bien lavé avec une

solution concentrée d'acide chlorhydrique car le précipité d'acide stannique, adhérant à la paroi intérieure du tube, risquerait dans une nouvelle expérience de fausser les résultats (voir les courbes *a*, *a'* et *a''* de la figure 2).

La température des solutions joue aussi un rôle principal dans ce phénomène de coagulation car, si nous précipitons la solution colloïdale d'acide stannique à la temperature de +1°, on obtient la courbe *b* de la figure 2, ce qui prouve que la précipitation se fait dans un temps très court. Si la température des solutions est supérieure à celle du laboratoire, la précipitation de la substance colloïdale, se fait encore assez vite.

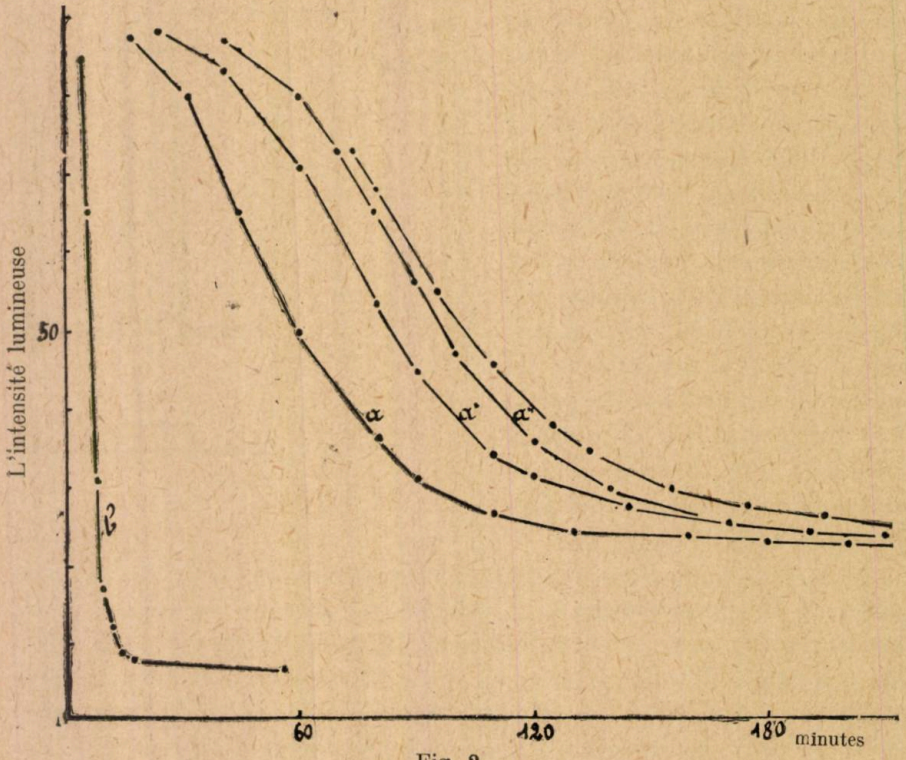


Fig. 2.

Quant au problème que je désire éclaircir et auquel j'ai fait allusion au début de cette communication, il consiste à voir si le solvant ne joue pas de rôle dans le phénomène de coagulation des substances colloïdales.

En effet, dans tous les traités classiques sur les substances colloïdales [1]), ainsi que dans les très nombreux travaux publiés, on trouve, après les théories émises par HARDY, SCHULZE, JEAN PERRIN, FREUNDLICH sur le mécanisme de la précipitation des solutions colloïdales, un exposé critique de ces théories. Sans insister sur ces travaux, la conclusion nette malgré toutes ces études est qu'il n'y a pas encore d'explication satisfaisante de ce problème. Je crois que cette lacune dans l'explication du phénomène est due au fait qu'on ne tient pas compte, dans la précipitation des substances colloïdales, du milieu dans lequel on fait la solution. Seul, FREUNDLICH pense que la variation de la constante diélectrique de l'eau, avec laquelle on fait couramment les solutions colloïdales, est le facteur essentiel de la précipitation. Comme la variation de la constante diélectrique ne peut pas nous donner une image du mécanisme de la précipitation des substances colloïdales, je crois qu'on peut la remplacer, avec plus de succès, par le degré de polimérisation du solvant.

Prenant comme base cette hypothèse, on peut expliquer la coagulation des substances colloïdales de la manière suivante:

La solution colloïdale à laquelle on ajoute un réactif pour la précipiter, peut être comparée à un vase dans lequel se trouve un mélange presqu'uniforme de billes blanches et noires, toutes ces billes ayant, à peu près, la même grandeur et la même densité. Les billes blanches représentent la structure moléculaire du solvant et les billes noires les micelles. Si, par un mécanisme quelconque, nous pouvons réduire à moitié le rayon des billes blanches, c'est-à-dire si nous diminuons le degré de polimérisation du solvant, et si l'on agite le vase, on voit les billes noires se déposer au fond suivant la loi de la gravitation; nous avons la précipitation de la substance colloïdale.

Pour compléter cette explication succinte, il reste à indiquer les moyens de dépolimériser les liquides et nous avons ainsi un aperçu, général de ce problème.

Or, on sait que le facteur température a une influence sur toutes les constantes physiques d'un liquide. La variation de ces constantes s'explique par une variation de la structure moléculaire, c'est-à-dire qu'une augmentation de température produit une dépolimérisation et, au contraire, un abaissement de température produit une polimérisation moléculaire. Outre ce facteur, les substances liquides dans les capillaires et les substances qui, en solution ont un *pH* inférieur à 7, donnent

[1]) H. FREUNDICH, Kapillarchemie, Leipzig 1930. P. BARY, Les colloïdes, Paris 1921. H. KRUYT, Bull. Soc. de Chimie de France, 1937, p. 1925. R. BOGUE, Traité de chimie colloïdale, Paris, 1928. W. LEWIS, Traité de chimie physique, Paris, 1920.

d'après mes travaux dont un ensemble a été publié dans le dernier numéro de cette revue, une dépolimérisation plus ou moins avancée.

Pour des raisons, sur lesquelles je reviendrai plus tard, je puis affirmer que les substances qui, en solution ont un *pH* plus grand que 7, ont une action contraire, ils polimérisent la structure intime des liquides.

Un exposé quantitatif de cette hypothèse avec laquelle nous avons cherché d'expliquer la précipitation des substances colloïdales, nous paraît actuellement prématuré puisque nous ne connaissons pas encore les degrés de polimérisation des liquides.

545 CHIMIE ANALYTIQUE

SUR LE DOSAGE DU PHÉNOL (VI-ème NOTE)

par **C. Belcot**

Résumé. *Nous avons fait l'étude comparative de plusieurs méthodes analytiques. Il en résulte que pour les laboratoires industriels les méthodes les meilleures sont la méthode* KOPPESCHAAR *et la méthode* WILKIE.

Comme suite à nos travaux [1]) nous exposerons les résultats en ce qui concerne le dosage du phénol.

C'est d'abord pendant nos études sur la « Tensions superficielle à la surface de deux liquides non miscibles » que nous nous sommes occupé avec cette question, car nous avons eu besoin d'en préparer du phénate de soude [2]); ensuite nous avons élargi nos recherches.

Pour le dosage du phénol, tant pur que brut, on trouve dans la littérature pas mal de méthodes [3]).

On dose d'habitude le phénol ordinaire, les trois crésols et rarément les xylénols, le thymol et le carvacrol par les méthodes suivantes:

A) GRAVIMÉTRIQUEMENT

Les phénols sont pesés sous forme de dérivés bromés obtenus par précipitation à l'eau de brome en excès. Ainsi le phénol et le métacrésol donnent un dérivé tétrabromé, l'ortho-et le para-des dérivés dibromés.

---

[1]) C. BELCOT, V-ème note. *Bull. Polit. Bucarest*, (2) (No. 3), 1941.

[2]) C. BELCOT, III-ème note. *Bull. Soc. Roum. Phys.*, *35*, 119, 1933; *Ann. Chem. Abs. 28*, 251, 1934.

[3]) On trouve des indications bibliographiques dans: *a)* Thèse de N. ZAHARIA (Nancy, 1928); *b)* DIETZ Z., *Z. anal. Chem. 73*, 186, 1929; *c)* DIETZ et CEDIVOLA, *Z. anal. Chem.*, *12*, 873, 897, 1899.

B) VOLUMÉTRIQUEMENT

1. *Par le Brome.* KOPPESCHAAR [4]) emploie une solution de brome titrée en excès et titre l'iode mis en liberté, ou bien un mélange de sels préparés de trois molécules de bromure de sodium et une molécule de bromate de sodium.

SEUBERT [5]) et BECKURTS [6]) modifient cette méthode en remplaçant le bromate de sodium par le bromate de potassium plus facile à purifier. Pour reconnaître plus facilement la fin de la réaction, MOERK [7]) ajoute du chloroforme vers la fin du titrage; de même MUNDO [8]).

II. *Par l'Iode.* On traite les phénols par de l'iode soit en présence d'hydroxyde de sodium, soit en présence de bicarbonate de sodium, soit enfin, en présence d'acétate de sodium.

C) MÉTHODES PHYSIQUES

Il existe plusieurs méthodes physiques. Par exemple FOX et BARKER [9]) basent leurs recherches sur le fait suivant: le mélange de phénol et d'orthocrésol qui contient plus de 80% de phénol a la courbe du point de fusion d'une forme simple. Si la fraction contienne moins de 80% de phénol, on en ajoute une quantité de phénol pur.

On peut citer ensuite les méthodes de: WEISS et DOWNS [10]), KNIGHT, LINCOLN, etc. [11]), SKIRRON [12]), DAWSON et MOUNTFORD [13]) et PETRIE [14]).

* * *

On a cherché d'appliquer la méthode bromométrique au dosage des produits qui contient de phénols. La difficulté consiste dans le fait que ces produits sont constitués aussi par des substances comme les hidrocarbures, acides gras, des isomers et des homologues supérieurs

---

[4]) KOPPESCHAAR, *Z. anal. Chem. 15*, 233, 1876; voyez aussi: *J. für prakt. Chem.*, [2], *17*, 390.

[5]) SEUBERT, *Arch. d. Pharm. 218*, 326.

[6]) BECKURTS, *id. 224*, 570. Voyez aussi: TREADWELL, Manuel de chimie analytique, éd. fr. 1920, II, 633 et VILLAVECCHIA, Traité de chimie analytique appliqué, éd., fr. I, 374.

[7]) MOERK, *Ann. J. phys., 76*, 475, 1904.

[8]) SALVADOR DEL MUNDO, *Philippine J. of Science, 33*, 363, 1927. *C.* 98, *11*, 2772, 1927.

[9]) FOX et BARKER, *J. chem. Ind., 36*, 842, 1917; *37*, 265, 1918.

[10]) WEISS et DOWNS, *J. Ind. Eng. Chem., 9*, 569, 1917.

[11]) KNIGHT, LINCOLN, etc., *J. Ind. Eng. Chem., 10*, 9, 1918.

[12]) SKIRRON, *J. Ind. Eng. Chem., 9*, 1102, 1917.

[13]) DAWSON et MOUNTFORD, *Chem. Soc. Trans., 113*, 923, 1918.

[14]) PETRIE, *Journ. Chem., Ind., 38*, 132 T, 1919.

(Fox et Barker [15]), Oshima et Takahashi [16]), Salva dordel Mundo [17]), etc. etc.).

En ce qui concerne le complèxe du problème industriel, on trouve beaucoup d'indications dans le traité classique de Holde [18]).

En général on peut séparer complètement les composés phénoliques sous forme de phénolats par agitation avec une solution d'hydroxyde de sodium 10%; ensuite on mesure la contraction du volume dans une burette graduée. Pour plus de détails voyez les travaux de Dănăilă et Ionescu [19]), Morgan et Soule [20]) et Greenbaum [21]) (hydroxyde de sodium de 15%).

Nous avons borné nos recherches aux méthodes suivantes: 1) Koppeschaar, modifiée par Seubert et Beckurts; 2) François et Seguin [22]); 3) Wilkie [23]), modifié et 4) Fox et Barker.

Méthode de Koppeschaar. *Principe.* Si on traite une solution aqueuse de phénol par une quantité connue de brome en excès, le phénol se transforme quantitativement en tribromophénol:

$$C_6H_5OH + 3\,Br_2 \rightarrow 3\,BrH + C_6H_2Br_3(OH).$$

On ajoute ensuite de l'iodure de potassium à la solution, on titre l'iode mis en liberté par l'excès de brome et, en retranchant cette quantité totale de brome, on obtient ainsi la quantité de brome employée à la formation du tribromophénol et on peut calculer la masse du phénol.

Mode opératoire. On pèse environ 5 g de phénol dans un pèse-tube, on dissout dans un peu d'eau, on verse dans un ballon d'un litre, on lave, on affleure au trait et on agite énergiquement. Avec une pipette, on prélève 100 cm³ de cette solution et on les verse dans un deuxième ballon d'un litre; on amène au trait avec de l'eau, on mélange et on verse 100 cm³ de cette solution dans un flacon de 250 cm³ environ, bouché à l'émeri, on ajoute 50 cm³ de la solution de bromure et de bromate de potassium. On agite, on verse ensuite 5 cm³ d'acide chlorhydrique concentré ($d = 1{,}189$) en agitant, puis on laisse reposer 15

[15]) Fox et Barker, *J. Soc. Chem. Ind.*, *39*, 169 T. 1919.
[16]) Oshima et Takahashi, *J. chem. Soc. Jap.*, *30*, 163, 1927.
[17]) Salvador del Mundo, *op. cit.*
[18]) Holde, Huiles et graisses, éd. fr., 1929, p. 432, 451, etc.
[19]) Dănăilă et Ionescu, *Bull. Chem. pure et appl.* (Bucarest), *21*, 229, 1928.
[20]) Morgan et Soule, *Chem. Met. Eng.*, *26*, 1025, 1922.
[21]) Greenbaum, *Oesterr. Chem. Ztg.*, *26*, 147.
[22]) François et Seguin, *Bull. Soc. Chem. France* [4], *49*, 1225, 1931.
[23]) Wilkie, *J. Soc. Ind.*, *30*, 338, 1911, et: Redmann, Weith et Brock, *Chem. News*, *110*, 168, 176, 1914.

minutes. On ajoute alors 2 g d'iodure de potassium, on agite et, au bout de 2 minutes, on titre les ions I_3^-, par une solution de 0,1 n. de thyosulfate de sodium et de l'empois d'amidon.

Supposons qu'on ait employé ici t cm³, le titre de phénol sera donc:

$$\frac{(50 - t),\ 0{,}1567}{a}\ a = \text{substance.}$$

Remarque. Il ne faut pas négliger de vérifier le titre de la solution de bromate et de bromure, en effectuant un essai à blanc avant l'essai proprement dit. Cette méthode ne convient que pour l'analyse de phénols purs, mais non de phénols bruts, d'huile de créosote, etc.

2. **Méthode** François **et** Seguin. La prise d'essai doit osciller autour de 0,2 g. Le phénol étant difficile à peser, on a intérêt à en peser une forte quantité, par exemple 2 g dans une fiole jaugée de 100 cm³. On dissout dans l'eau additionnée de quelques gouttes de solution d'hydroxyde de sodium, complète au trait et prélève 10 cm³ de cette solution comme prise d'essai définitive.

À cette prise d'essais placée dans une fiole conique de 250 cm³ on ajoute 5 cm³ de solution d'hydroxyde de sodium pure ($D = 1{,}33$, 30%) et 100 cm³ d'eau. On porte sur le bain-marie bouillant pendant 20 minutes pour permettre au liquide d'atteindre une température voisine de 95°. On ajoute alors par portions de 1 cm³ environ, de la solution concentrée d'iode jusqu'à ce que le liquide ait une coloration brune marquée.

C'est seulement à ce moment que le rouge de Lautemann apparaît, mais le dépôt devient aussitôt très abondant.

Laisser une heure sur le bain-marie bouillant en veillant à ce que l'iode libre soit jusqu'à la fin en excès marqué, ce que l'on apprécie par la coloration brune du liquide.

Après refroidissement on fait disparaître l'iode libre par addition ménagée de sulfite neutre de sodium et recueille le précipité sur un double filtre de 11 cm de diamètre. Il est difficile de procéder à des lavages par décantation en raison du volume considérable du précipité. Pour y suppléer, on ne doit pas faire moins de sept à huit lavages du précipité sur les filtres.

Les filtres sont séchés à 100° et pesés.

Le poids du rouge de Lantemann multiplié par le rapport $\frac{94}{344}$ c'est-à-dire par le coefficient 0,2732 donne le phénol.

Rappelons que la formule brute du rouge de LANTEMANN [24]) est: $C_{12} H_4 I_4 O_2$; c'est un dérivé quinonique; le poids moléculaire est 688; 1 mol. est équivalente à 2 molécules de phénol.

3. **Méthode de WILKIE modifiée.** On dissout de 0,1 à 0,6 g. de phénol dans 100 cm³ d'éther, on prélève de 5 à 10 cm³ de la solution, (ou, dans le cas des phénates on prélève, de la solution *aqueuse*, 10 à 20 cm³); on ajoute ensuite 50 cm³ d'une solution saturée de bicarbonate de sodium et 100 cm³ d'eau. Ensuite on ajoute peu à peu une solution 0,1 n. d'iode dans l'iodure de potasium, qui, le plus souvent se décolore rapidement; on met un excès d'iode et agite à la machine un quart d'heure environ.

On acidule à l'acide sulfurique et on titre l'excès d'iode à l'hyposulfite en présence d'amidon.

4. **Méthode de FOX et BARKER.** Le mélange des acides est séparé de l'huile hydrocarboné par *le froid*, des sol. de hydroxyde de sodium); on extrait avec de l'éther ou du benzène, on met en liberté les acides par de l'acide sulfurique et on deshydrate avec du chlorure de calcium. Les acides sèches sont distillés avec une colonne à quatre boulles et la fraction jusqu'à 210° C. recueillie. On redistille de nouveau et on collecte jusqu'au 195°, où on cherche le phénol, par la détermination du point de solidification, en se rapportant à la courbe construite par les données suivantes. Si la fraction contienne moins de 80% phénol, on en ajoute une quantité de phénol pur ou distillé et ensuite on prend le point de solidification.

TABLEAU I

Phénol dans le melange *) %	100	95	85	90	80
Point de solidification °C	40°2	37°6	34°9	32°2	29°2

Solutions: A) Nous avons préparé des solutions de phénol pur (p. f. 40°) dans de l'eau, de la manière suivante: Nous avons pesé d'abord 9,4052 g de phénol dans un ballon jaugé de 2000 cm³, que nous avons rempli jusqu'au trait avec de l'eau distillée. Cette solution contient donc 0,4703 g de phénol dans 100 cm³ de solution. C'est la solution

[24]) LANTEMANN. *Lieb. Ann. 120*, 309, 1861: voyez BOUGAULT J. *ph. et Chim.* (6), *28*, 145, 1908.

*) Phénol et orthocrésol.

No. 1. Nous avons introduit 100 cm³ de la solution No. 1 dans un ballon jaugé de 1000 cm³; donc cette solution No. 2 contient 0,0470 g de phénol dans 100 cm³.

B) *Solutions pour la méthode de* KOPPESCHAAR. 1. Une solution 0,1 n. de thyosulfate de sodium; 1000 cm³ $= \frac{C_6 H_5 OH}{60} = 1{,}56736$ g. de phénol.

2. Solution 0,1 n. de brome. Comme une solution de brome se conserve mal, on emploie une solution de bromate et de bromure de potassium, car:

$$BrO_3^- + 5Br^- + 6H^- \rightarrow 3Br_2 + 3H_2O$$

ou, si on veut:

$$BrO_3K + 5BrK + 6ClH \rightarrow 6ClK + 3Br_2 + 3H_2O.$$

TABLEAU II

	Nombre de cm³	Calculé Grammes de phénol.	Méthode KOPPESCHAAR Trouvé		Méthode FRANÇOIS Trouvé		Méthode WILKIE Trouvé	
			G de phénol. prise d'essai	Diff. p. 100 g	G de phénol prise d'essai	Diff. p. 100 g	G de phénol. prise d'essai	Diff. p. 100 g
	Solution nr.1							
1	75	0,3526	—	—	0,3510	—0,46	—	—
2	70	0,3290	—	—	0,3275	—0,45	—	—
3	65	0,0355	—	—	0,3069	+0,46	—	—
4	60	0,2820	—	—	0,2832	+0,43	—	—
5	55	0,2585	—	—	0,2574	—0,43	—	—
6	50	0,2351	—	—	0,2342	—0,40	—	—
7	45	0,2115	—	—	0,2106	—0,41	—	—
8	40	0,1880	—	—	0,1872	—0,43	—	—
9	35	0,1645	0,1637	+0,73	0,1654	+0,55	—	—
10	30	0,1410	0,1420	+0,70	0,1420	+0,76	0,1420	—0,70
11	25	0,1175	0,1183	+0,65	0,1185	+0,84	0,1170	—0,42
12	20	0,0940	0,0946	+0,62	0,0949	+0,88	0,0950	+0,42
13	15	0,0705	0,0708	+0,43	0,0711	+0,90	0,0706	+0,14
14	12	0,0564	0,0566	+0,42	0,0569	+0,90	0,0563	+0,21
15	10	0,0470	0,0472	+0,43	0,0476	+0,95	0,0472	+0,42
	Solution nr.2							
16	90	0,0423	0,0420	—0,71	—	—	0,0422	—0,23
17	85	0,0399	0,0396	—0,75	—	—	0,0397	—0,50
18	80	0,0376	0,0373	—0,79	—	—	0,0375	—0,26
19	75	0,0352	0,0353	+0,85	—	—	0,0353	0
20	70	0,0329	0,0326	—0,93	—	—	0,0325	—0,30

N. B. Chaque résultat est la moyenne des plusieurs déterminations.

Par conséquent on dissout exactement 2,7837 g de bromate de potassium pur séché à 110° et environ 10 g. de bromure de potassium (ou plus) dans un litre d'eau.

C) *Solution d'iode pour la méthode de* François. Iode 12,7 g, iodure de potassium 20 g et eau quantité suffisante pour 1000 cm^3.

D) *Solution saturée de bicarbonate de sodium.* 85 g. par litre.

Résultats. 1. On trouve nos résultats dans le tableau 2. On peut les exprimer aussi par « l'indice d'iode » ou « l'indice de brome »; par exemple « l'indice d'iode » du phénol pur est 8,09.

2. En ce qui concerne la méthode de Fox et Barker, nos résultats concordent avec ceux du tableau 1.

3. Nous avons analysé aussi le goudron de Lupeni; nous avons trouvé par la méthode de Wilkie un pourcentage en phénols de 43,4—43,6 dans la fraction qui distille jusqu'à 180° et 45,4 pour la fraction qui distille entre 180—290°. Ces résultats concordent tout à fait avec ceux trouvés par la méthode d'extraction au hydroxyde de sodium.

De nos résultats on peut tirer les conclusions suivantes:

1. Chaque méthode a un interval dans lequel elle est plus exacte: 0,07 g — 0,04 g pour la méthode de Koppeschaar; 0,3 g — 0,18 g pour la méthode de François et 0,07 g — 0,03 g pour la méthode de Wilkie.

2. La méthode François est un peu trop longue; par contre, la méthode Wilkie est assez rapide.

3. De même la méthode physique.

Par conséquent nous croyons utile d'employer dans l'industrie soit la méthode bromométrique de Koppeschaar soit la méthode iodométrique de Wilkie.

(Polytechnique de Bucarest, Laboratoire de Chimie Analytique).

551.7 STRATIGRAPHIE

REMARQUES SUR LES DÉPÔTS ATTRIBUÉS AU SÉNONIEN DANS LA RÉGION DE ZLATNA

par **M. D. Ilie**

Summary. *The senonian deposits recently mentioned in the miocene basins of Zlatna (Roumania), contains really the following stages: Valanginian-Hauterivian (limestone with* Calpionella alpina*), Aptian (unfossiliferous conglomerates, sandstones and shales) and Miocene (marls with* Globigerina bulloides, *limestones with Lithothamnium and Corals, gypsum).*

Deux bassins miocènes se trouvent dans la région de *Zlatna*, ancien centre d'exploitations minières, bassins établis au milieu d'un pays essentiellement mésozoïque. L'un d'entre eux, parcouru suivant sa longueur par la vallée de l'*Ampoiul*, a été appelé le bassin de *Zlatna*, l'autre situé un peu plus au S est connu sous le nom de bassin du *Glod*. Les deux bassins confluent vers le N, en formant la région *Almaşul Mare-Faţa Băii*. Le remplissage de ces bassins est formé par des dépôts néogènes (Aquitanien, Tortonien), reposant sur un soubassement d'âge jurassique et crétacé et de roches éruptives attribuées au Trias. La fragmentation de ce socle, qui a permis l'établissement des bassins miocènes précités, a eu lieu dans une phase pré-aquitanienne.

Nous avons d'ailleurs publié récemment une étude détaillée de la région aurifère de *Zlatna* (1), de sorte qu'il n'est pas utile de donner ici d'autres détails à son sujet.

Il s'agit d'une région qui est de longue date en étude. A citer, parmi les géologues qui s'en sont occupés, Beudant (2), Hauer et Stache (4), Pošepny (3), Pálfy (5), K. Papp (6), St. Ferenczi (7), M. Drăghiceanu (8), auteurs qui nous ont laissé toute une série d'observations très précieuses. La structure géologiques très compliquée de la région de *Zlatna* a pu être déchiffrée surtout grâce à la présence de gisements

métallifères; ceux-ci ont en effet de bonne heure attiré de nombreux chercheurs qui, dans le but de connaître l'extension de ces gisements, ont été obligés de s'occuper de l'âge des sédiments et des roches éruptives, et aussi de préciser les rapports tectoniques entre les différentes formations.

En ce qui concerne la question de l'âge des sédiments, les travaux parus jusqu'il y a peu ne parlent pas de l'existence dans la région du Sénonien. Cette présence a été toutefois affirmée dans un travail récemment paru (9). Il arrive cependant que l'extension de ce Sénonien consignée par les auteurs de ce travail entraîne comme conséquence la modification des idées courantes relatives à l'origine et à l'évolution des bassins miocènes de la région de *Zlatna*. Les dépôts sénoniens, tels qu'ils sont figurés sur la carte annexée au travail mentionné, limitent des trois côtés le bassin de *Glod*; ils formeraient le soubassement des dépôts miocènes, en occupant la moitié de l'étendue de ce bassin. Dans le bassin de Zlatna, le Sénonien en suit le flanc nord et forme en outre en bonne partie le terrain qui sépare les deux bassins.

S'agissant d'une question qui a son importance, je m'occuperai ici de ces dépôts considérés comme sénoniens, me basant autant sur les données bibliographiques existentes, que sur des observations personnelles. J'analyserai donc de près le point suivant: quels sont les dépôts qui ont été rapportés à ce Sénonien?

Dans la description des dépôts néocrétacés donnée par nos auteurs eux-mêmes, les caractères pétrographiques et paléontologiques sur lesquels ils se sont basés dans la détermination du Sénonien de *Zlatna*, ne ressortent pas suffisamment. La présence des quelques *Ammonoïdés* déterminés par E. Jekelius et R. Heinz, n'est valable que pour le Néocrétacé de la région de la Galbina, d'où proviennent ces restes organiques. Ils ne peuvent en aucun cas constituer un argument pour la région de *Zlatna*.

Il résulte de nos propres observations que, dans ce prétendu Sénonien, les auteurs ont englobé des dépôts d'âge très varié. Ainsi, entre les villages d'*Almaşul de Mijloc* et *Almaşul Mare*, il y a des calcaires marneux blancs à *Calpionella alpina* Lorenz, qui se trouvent au milieu de dépôts de Flysch crétacé inférieur.

D'après les connaissances actuelles, *Calpionella alpina* se rencontre dans le Jurassique supérieur-Néocomien inférieur à facies bathyal de la *Téthys*. Étant donné que les calcaires à Calpionelles se trouvent dans la zone formée par le Néocomien inférieur reposant en discordance sur le massif des ophiolites de la région d'*Almaş*, et qu'ils présentent des affinités avec des roches appartenant au complexe des

Couches de *Sinaïa*, nous sommes en droit de les attribuer au *Valanginien-Hauterivien.*

La présence de *Calpionella alpina* précise donc l'âge néocomien des sédiments au N. d'*Almaşul de Mijloc*, et constitue une preuve indubitable de la non existence du Sénonien marqué par nos auteurs dans cette région.

Si nous suivons plus loin ce supposé Sénonien du bassin du Glod, nous constatons, sur la rive gauche de la vallée du même nom, un lambeau de forme triangulaire, également attribué par ces auteurs au grand étage Supracrétacé. C'est encore une observation eronnée. À cet endroit, on trouve du Miocène; le fait est visible déjà sur les cartes publiées il y a trois déccades. La présence de gypse dans ce parages exclue toute possibilité de l'existence de Néocrétacé; en aucun endroit d'ailleurs des Monts Apuseni on n'a jusqu'à présent signalé de gypse dans le complexe sénonien.

À l'E du village de *Glod*, le bassin miocène est figuré — sur la carte en question — comme entièrement occupé par le même Sénonien présumé. Il résulte cependant clairement de nos observations — confirmant sur ce point les études antérieures — que la moitié méridionale du bassin du *Glod* est remplie encore par des dépôts miocènes. Les analyses micrographiques que nous avons faites montrent en effet qu'il s'agit de marnes à Globigérines d'âge miocène, qui occupent toute la portion indiquée du bassin du *Glod*, et qui se développent également dans la région *Almaşul Mare-Faţa Băii.* Ici encore donc nos auteurs ont marqué comme Sénonien des dépôts franchement miocènes, bien que ceux-ci se distinguent facilement de ceux du Néocrétacé.

Si nous passons au bassin de *Zlatna* pr. dit, nous constatons également que, les dépôts interprétés comme sénoniens par nos auteurs, sont en réalité à rapporter à d'autres étages, en particulier au Néocomien et au Miocène. Il est vrai que sur ces points les dépôts ont acquis, du fait de l'altération, un aspect différent; mais ceci ne justifie pas de leur attribuer un autre âge que celui admis jusqu'à présent par tous les chercheurs. Aucun des travaux connus ne cite la présence de dépôts sénoniens dans le bassin de l'*Ampoiul.*

Dans un autre endroit, enfin, à l'extrémité méridionale du bassin de *Zlatna*, on trouve englobé dans le Sénonien de nos auteurs des dépôts franchement tortoniens. Nous les y avons précisés il y a peu de temps: au S de *Valea Ampoiului*, à proximité du village de *Galaţi*, nous avons trouvé des calcaires organogènes (à *Lithothamnium*, *Polypiers*, *Pecten* et des fragments d'*Echinides*) à la place où ces auteurs marquent sur leur carte du Sénonien.

Il résulte de ces faits que l'hypothétique Sénonien de la région de *Zlatna* concerne en réalité des dépôts d'âges variés et, ce qui est plus, en partie connus et décrits antérieurement. Ainsi, la large bande figurée autour des bassins miocènes comprend des sédiments néocomiens et miocènes. Nulle part, non plus, on ne connaît du Sénonien dans le substratum des dépôts miocènes de ces bassins. D'autre part, le texte même du travail qui nous occupe ne consigne aucune donnée pétrographique ou paléontologique, qui prouve l'existence du Sénonien dans quelque endroit, aussi infime comme surface fut-il, de la région minière de Zlatna.

Nous signalons ces erreurs d'ordre stratigraphique, pour prévenir d'éventuelles confusions, qui pourraient amener avec elles les interprétations les plus fausses. La connaissance de la structure de la région aurifère de Zlatna s'est déjà buttée — ainsi que la bibliographie nous l'apprend — à de nombreuses difficultés. Il serait donc très nécessaire que chaque affirmation concernant les problèmes qui s'y posent soit basée sur des faits précis.

BIBLIOGRAPHIE

1. MIRCEA D. ILIE, Structure géologique de la région aurifère de Zlatna (*An. Inst. Geol. Rom.*, Vol. XX, Bucureşti, 1940).
2. BEUDANT F. S., Voyage minéralogique et géologique en Hongrie pendant l'année 1818. Paris 1822.
3. POŠEPNY F., Zur Geologie des siebenbürgischen Erzgebirges. (*Jahrb. d. k. k. geol. R.-A.* XVIII, Wien, 1868).
4. HAUER FR. u. STACHE G., Geologie Siebenbürgens. Wien, 1863.
5. PÁLFY M., Geologische Verhältnisse und Erzgänge des Bergbaues des siebenbürgischen Erzgebirges. (*Mitt. a. d. Jahrb. d. k. ung. geol. R.-A.* Bd. XVIII).
6. PAPP K., Das taube Sedimente von Zalatna (*Jahresber. d. k. ung. geol. R.-A. f. 1914*).
7. FERENCZI ST., Das Tertiärbecken von Zalatna-Nagyalmas. (*Földt. Közl.* Band XLV, Budapesta, 1915).
8. DRĂGHICEANU M., L'Eur-Asie. Bucarest, 1937.
9. GHIŢULESCU T., et SOCOLESCU M., Étude géologique et minière des Monts Métallifères (*An. Inst. Geol.*, Vol. XXI, Bucureşti 1942).

551.7 TECTONIQUE

L'IMPORTANCE DE L'ACCIDENT TECTONIQUE DE COADA MALULUI—SCHITUL (Département de Prahova)

par **M. D. Ilie**

Summary. *The anticline of Coada Malului—N. Fundeni—Schitul, descovered recently by the present author in the Subcarpates of the Prahova district (Roumania) presents a great importance for the tectonical phenomena and stratigraphical studies of the Pliocene.*

Le premier pli que nous recontrons en remontant la vallée du *Teleajen*, depuis la plaine vers la ville de *Vălenii de Munte*, c'est l'anticlinal de *Măgurele—Mălăeşti*, suivi par le synclinal de *Coada Malului—Coţofeneşti*. Le flanc nord de l'anticlinal, comme le remplissage du synclinal, sont formés par des sédiments pliocènes; le Miocène affleure seulement dans l'axe de l'anticlinal. Quant au flanc sud de cet anticlinal, il échappe à l'observation; toutefois nous pouvons nous rendre compte de son aspect, en tenant compte des données toujours plus nombreuses offertes par les sondages en vue de l'exploitation du pétrole.

Nous attirons dans cette note l'attention sur les déformations tectoniques que nous avons eu l'occasion d'observer au sein des dépôts pliocènes. Dans la zone néogène des Subcarpathes, le levé des plis a été fait habituellement en suivant dans leur longueur les limites géologiques entre les différents horizons, en négligeant cependant de noter les complications structurales à l'intérieur d'un même horizon. En étudiant avec soin la région néogène de *Coada Malului—Fundeni—Mălăeşti*, nous avons eu la possibilité de trouver des complications structurales non encore signalées, dont nous tenons à montrer ici l'intérêt.

Nous décrivons dans les pages qui suivent le nouvel élément tectonique dont nous avons précisé l'existence, à savoir l'anticlinal *Coada*

Malului—Fundeni—Podurile—Schitul. Nous en montrerons l'intérêt en ce qui concerne l'interprétation de la tectonique de la zone néogène des Subcarpathes, comme aussi les nouvelles possibilités qui en découlent par rapport à l'exploitation des gisements de pétrole.

Le premier affleurement qui m'a conduit à la découverte de cet élément tectonique affectant le Pliocène de la partie nord de l'anticlinal *Măgurele—Mălăești*, se trouve dans *Valea Bughile*, près de son confluent avec le *Teleajen*. Tandis que les dépôts pliocènes à la droite du village de *Scăioși* accusent des plongements vers le N, marquant ainsi le flanc nord de l'anticlinal *Măgurele—Mălăești*, les dépôts méotiens qui se trouvent dans le soubassement de la terrasse de la vallée de *Bughile* vers *Fundeni* montrent des inclinaisons vers le S. Ce qui est important c'est que ce faible affleurement marque l'axe même d'un anticlinal; les argiles schisteuses du voisinage du banc à *Congeria novorossica* indiquent des plongements vers le N. Le même changement dans le sens de plongement du Méotien, nous est montré aussi par les ravi de l'entrée nord du village *Fundeni*. Comme ces derniers affleurements ont pu être visités aussi par d'autres chercheurs, il nous semble jusqu'à un certain point curieux que cet intéressant changement de position à l'intérieur du complexe méotien n'a point été signalé en vue d'une explication du phénomène.

Ce phénomène structural pourrait cependant être interprêté, à première vue, comme représentant un dérangement local de faible importance; il est donc nécessaire de suivre le comportement de cette déformation dans le sens de l'allongement des plis.

Voici ce qu'on est à même d'y observer: à l'W du village *Scăioși*, les premiers affleurements méotiens se rencontrent dans la vallée *Podurile*. On y remarque des sables et des grès méotiens, qui deviennent fossilifères aux approches du contact avec le Pontien, tous ces sédiments montrant des plongements vers le N. Près du confluent de Poduri avec la vallée du *Verbilău*, on trouve à nouveau des sédiments méotiens, mais dont l'inclinaison est vers le S. Il résulte de ces observations sur le terrain que, dans *Valea Podurile*, le Méotien présente le même changement dans le sens du plongement des couches que dans l'E, fait qui plaide pour l'existence d'une voûte anticlinale.

A l'W de *Valea Verbilăului*, cet anticlinal peut être poursuivi dans *Dealul Schitul*, où les nombreux bancs calcaires à *Dosinia exoleta* montrent également une variation dans le sens du plongement. À partir d'ici vers l'W, l'anticlinal en question s'efface, se ressorbe, ainsi qu'il arrive pour d'autres déformations tectoniques, du fait qu'on se trouve dans une zone d'ennoyage des plis.

En essayant de préciser le comportement de l'accident en question vers l'E, j'ai eu la possibilité de constater, dans les ravins de *Coada Malului*, souvent étudiés par les géologues, des inclinaisons vers le S, ce qui prouve le prolongement de notre anticlinal à l'E de *Valea Telea-jenului*. La terminaison périclinale du synclinal de *Coada Malului*, telle qu'elle figure sur les cartes actuelles, marque une tendance à la division, ce qui peut être mis au compte d'une influence de l'anticlinal que nous venons de signaler. Dans la région de *Gornetul-Cuib*, le Miocène offre des directions W-E, et présente des plongements dans les deux sens. Ceci permet de croire que l'accident tectonique dont nous nous occupons ici a un retentissement dans le substratum miocène.

La présence de l'anticlinal *Coada Malului—Fundeni—Valea Podurile—Schitul* offre un particulier intérêt, en premier lieu parce-qu'il attire l'attention sur les déformations tectoniques subies par les sédiments d'une seule subidivision du Pliocène, et ensuite du fait qu'elle soulève des questions essentielles en vue de déchiffrer la stratigraphie de l'étage géologique en question. Ainsi, l'établissement des facies et des horizons pliocènes ne peut se faire avec précision que dans le cas ou l'on connaît parfaitement les déformations qui affectent les dépôts. Le calcul de l'épaisseur réelle des couches, qui a tant d'importance dans les travaux de forages, rencontre des difficultés justement du fait de l'intervention de ces accidents tectoniques, négligés jusqu'à présent.

La découverte de l'anticlinal *Coada Malului—Schitul* a été pour nous le point de départ d'une nouvelle hypothèse sur l'établissement de la structure des Subcarpathes roumaines.

D'une manière générale, les dépôts pliocènes de nos Subcarpathes ont été affectés par plusieurs catégories de phénomènes tectoniques, à savoir, par des plissements disharmoniques, par des deversements de plis et, enfin par des lignes de flexure. Selon nous, ces déformations tectoniques sont causés par un déplacement, vers l'extérieur de la Chaîne Carpathique, de masses de sédiments inhomogènes pétrographiquement, et à des vitesses inégales, sur un soubassement rigide et compartimenté par des failles.

J'ai montré à une autre occasion quelle peut être l'image de l'édifice tectonique des Subcarpathes, et essayé d'expliquer la mécanique des accidents tectoniques déjà signalés. L'hypothèse du diapirisme ne saurait à elle seule donner une interprétation suffisante de phénomènes aussi compliqués que ceux qui se manifestent dans le zone néogène des Subcarpathes.

En admettant un écoulement des masses sédimentaires sur un substratum rigide et fracturé, compartimenté, on peut interprêter aussi

d'autres phénomènes tectoniques, en particulier les contacts hésitants, considérés parfois comme des arguments en faveur de l'existence d'unités tectoniques du degré des nappes de charriages.

Je dois insister aussi sur le côté pratique de la question. En déchiffrant et précisant ces complications tectoniques, le fait permet de trouver une solution de bien de problèmes économiques, en connexion avec les nouvelles possibilités d'exploitation du pétrole. Cela surtout dans les régions dans lesquelles la considération du diapirisme ne conduit pas à des résultats satisfaisants.

VERZEICHNIS DER BISHER AUS EURASIEN BEKANNT GEWORDENEN CARPINUS-ARTEN

von **P. Cretzoiu**

Zusammenfassung. *Aus Eurasien sind bisher 34 Carpinus-Arten mit 15 Varietäten bekannt; deren Liste mit Synonyma und Literaturzitate wird hier mitgeteilt.*

Seit WINKLERS Monographie der Betulaceen in ENGLER, Das Pflanzenreich, 1904, ist die Zahl der Carpinus-Arten durch die Beschreibung neuer Arten seitens verschiedener Verfasser, wie HANDEL-MAZZETTI, RADDE-FOMIN, H. H. HU und REHDER, sehr gestiegen.

Die vorliegende Liste enthält eine Aufzählung sämtlicher bisher aus Europa und Asien bekannt gewordenen Carpinus-Arten samt Literatur- und Verbreitungsangaben; ich hoffe, dass diese Aufzählung für unsere Dendrologie von Nutzen sein wird, da bei uns in der letzten Zeit gerade viele asiatische Baum- und Straucharten in Kultur genommen werden.

Sect. I. Distegocarpus (Sieb. et Zucc.) Sarg.

1. *Carpinus japonica Bl.*, Mus. Bot. Lugd. Bat. I, 1849—1851, p. 308.

Mittel- und Süd-Japan; Ins. Hondo; Ins. Kiushiu.

var. cordifolia H. Winkl., in ENGLER, Das Pflanzenreich IV/61, 1904, p. 26.

Mittel-Japan.

2. *Carpinus cordata Bl.*, l. c., p. 309.

Nördl.-Japan, Ins. Jeso; Ins. Hondo; Mandschurien; Korea; China.

var. chinensis Franch., in Journ. de Bot., XIII, 1899, p. 202. China.

var. Winkleri Radde-Fomin, Beitr. Syst. Gatt. Carpinus i. d. U.S.S.R., 1929, p. 70.
Mandschurien.

3. *Carpinus Fangiana Hu*, in Journ. Arn. Arb. X, 1929, p. 154.
Syn.: Carpinus Wilsoniana Hu, l. c., p. 155.
China.

4. *Carpinus mollis Rehder*, in Journ. Arn. Arbor. XI, 1930, p. 154.
China.

Sect. II. Eucarpinus Sarg.

5. *Carpinus austrosinensis Hu*, in Sinensia II, 1931, p. 87.
Süd-China.

6. *Carpinus betulus L.*, Spec. pl., 1753, p. 998.
var. typica Koehne, Deutsche Dendrol., 1893, p. 116.
Europa, Kleinasien, Persien, Transkaukasien.
var. angustifolia Radde-Fomin, Beitr. Syst. Gatt. Carpinus i. d. U.S.S.R., 1929, p. 80.
Kaukasus.
var. parva Radde-Fomin, l. c., p. 80.
Dagestan.

7. *Carpinus Chowii Hu*, in Journ. Arn. Arbor. XIII, 1932, p. 334.
China.

8. *Carpinus Chuniana Hu*, l. c., p. 334.
China.

9. *Carpinus faginea Lindl.*, in Wall., Pl. Asiat. rar., II, 1831, p. 5.
Östliches Himalaya.

10. *Carpinus Fargesiana H. Winkl.*, in Engl. Bot. Jahrb., L, Suppl., 1914, p. 506.
China.

11. *Carpinus geokczaica Radde-Fomin*, Beitr. Syst. Gatt. Carpinus i. d. U.S.S.R., 1929, p. 89.
Transkaukasien.

12. *Carpinus grosseserrata H. Winkl.*, in Engler, Das Pflanzenreich, IV/61, 1904, p. 40.
Persien, Transkaukasien.

13. *Carpinus Handelii Rehder*, in Journ. Arn. Arbor., I, 1919, p. 59.
China.

14. *Carpinus hupeana Hu*, in Sunyatsenia I, 1933, p. 118.
China.

15. *Carpinus hybrida H. Winkl.*, in Engler, Das Pflanzenreich, IV/61, 1904, p. 40.
Transkaukasien.

16. *Carpinus kweichowensis Hu*, in Sinensia II, 1932, p. 79.
China.

17. *Carpinus kweitingensis Hu*, l. c., 1932, p. 83.
China.

18. *Carpinus lanceolata Hand.-Mazz.*, in Österr. Bot. Zeitschr. 1931, p. 22. Syn.: Carpinus laxiflora var. macrostachya Merrill, in Lingnan Sc. Journ., V, 1927, p. 60, non Oliver.
China.

19. *Carpinus laxiflora (Sieb. et Zucc.) Bl.*, Mus. Bot. Lugd. — Bat. I, 1849—51, p. 309. Syn.: Distegocarpus laxiflora Sieb. et Zucc. Fl. jap. fam. nat. 1846, p. 799.
Japan; Kyu-syu; Korea; Ryu-kyu.
var. macrostachya Oliv., in Hook., Icon. pl. 1891, t. 1989.
China.
var. tientaiensis Hu, in Sunyatsenia, I, 1933, p. 112.
China.
var. Davidii Franch., in Journ. de Bot. XIII, 1899, p. 203. Syn.: Carpinus laxiflora Franch., Pl. David. I, 1884, p. 279.
China.
var. Fargesii (Franch.) Burkill, in Journ. Linn. Soc. Bot., XXVI, 1899, p. 501. Syn.: Carpinus Fargesii Franch., in Journ. de Bot. XII, 1899, p. 202.
China.

20. *Carpinus Londoniana H. Winkl.*, in Engler, Das Pflanzenreich, IV/61, 1904, p. 32.
China.

21. *Carpinus macrocarpa (Willk.) H. Winkl.*, in Engler, l. c. 1904, p. 38. Syn.: Carpinus orientalis var. macrocarpa Willk., Forst. Fl., 1887, p. 368.
Persien; Turkomanien.

22. *Carpinus Monbeigiana Hand.-Mazz.*, in Sitzungsanz. Akad. Wiss. Wien, 1924, p. 162.
China.

23. *Carpinus orientalis Mill.*, Gard. dict., ed. 7, 1759, nr. 3.
Südost-Europa; Kleinasien; Armenien; Georgien, Transkaukasien, Imeretien; Abchasien.

24. *Carpinus oxycarpa H. Winkl.*, in Engler, Das Pflanzenreich, IV/61, 1904, p. 31.
Transkaukasien.
var. betuloides H. Winkl., l. c. 1904, p. 32.
Transkaukasien.

25. *Carpinus polyneura Franch.*, in Journ. de Bot. XIII, 1899, p. 202. Syn.: Carpinus Turczaninowii Hance var. polyneura H. Winkl., l. c. 1904, p. 38.
China.
var. Wilsoniana H. Winkl., in Engl. Bot. Jahrb. L. Suppl., 1914, p. 506.
China.
26. *Carpinus pubescens Burkill*, in Journ. Linn. Soc., XXVI, 1899, p. 502.
China.
27. *Carpinus schuschaensis H. Winkl.*, in Engler, Das Pflanzenreich, IV/61, 1904, p. 32.
Transkaukasien.
28. *Carpinus Seemeniana Diels*, in Englers Bot. Jahrb. XXIX, 1901, p. 279.
China.
29. *Carpinus stipulata H. Winkl.*, in Engler, Das Pflanzenreich, IV/61, 1904, p. 35.
Central-China.
30. *Carpinus Tschonoskii Maxim.*, in Bull. Acad. St. Petersb., XXVII, 1881, p. 534. Syn.: Carpinus yedoensis Maxim., l. c., p. 535.
Japan, China.
var. Henryana H. Winkl., in Engler, Das Pflanzenreich, IV/61, 1904, p. 36.
China.
31. *Carpinus Tsingiana Hu*, in Sinensia, II, 1931, p. 90.
China.
32. *Carpinus Tungtzeensis Hu*, l. c. 1931, p. 85.
China.
33. *Carpinus Turczaninowii Hance*, in Journ. Linn. Soc. X, 1869, p. 203. Syn.: Carpinus Paxii H. Winkl., in Engler, Das Pflanzenreich IV/61, 1904, p. 35.
China.
var. ovalifolia H. Winkl., in Englers Bot. Jahrb. L. Suppl., 1914, p. 505.
China.
var. firmifolia H. Winkl., l. c. 1914, p. 505.
China.
var. oblongifolia Hu, in Sunyatsenia I, 1933, p. 115.
China.
34. *Carpinus viminea Lindl.*, in Wall., Pl. asiat. rar. II, 1831, p. 4, t. 106.
China; Nördl. Vorderindien; Nepal; Bengalen.

DIE FUNDORTE DER BISHER AUS RUMÄNIEN BEKANNTGEWORDENEN ARTEN DER GATTUNG *USNEA* WIGG.

von **P. Cretzoiu**

Zusammenfassung. *Die 34 Arten der Gattung Usnea (Lichenes, fam. Usneaceae), welche bisher aus der Flora Rumäniens bekannt geworden sind, werden weiter unten samt Literaturzitate und geographische Verbreitung aufgezählt.*

Die Gattung *Usnea* ist in Rumänien, soweit bis jetzt bekannt, durch 34 Arten vertreten. Auf diese Zahl ist Verfasser durch eigene Sammeltätigkeit, sowie durch Benutzung verschiedener Herbarien und der Literaturangaben gelangt.

Die Systematik dieser Flechtengattung wurde in der letzteren Zeit, insbesondere durch zwei Flechtenforscher, die Herren Dr. V. RÄSÄNEN (Kurkijoki, Suomi) und Dr. J. MOTYKA (Łwow) erheblich geändert, indem ganz andere Merkmale zur Unterscheidung der Arten benutzt wurden als in den älteren Flechtenfloren; Dr. J. MOTYKA veröffentlichte die « Lichenum generis Usnea studium monographicum, Leopoli 1936 », welche die Beschreibungen sämtlicher bisher aus der ganzen Welt bekannt gewordenen Arten enthält. Dass die Anzahl der Arten eine weit grössere ist als früher angenommen, ist selbstverständlich.

Es war also unbedingt notwendig, auch das rumänische Usneen-Material dem neuen Standpunkt der Wissenschaft anzupassen. Verfasser benutzte zu diesem Zweck seine eigene Sammlung, das Herbarium des Botanischen Laboratoriums der Forstlichen Fakultät in Bukarest sowie das Herbarium des Botanischen Museums der Universität Cluj. Das gesamte Usneenmaterial dieser Sammlungen lag zwecks Bestimmung und Revision, teils Herrn Dr. V. RÄSÄNEN, teils Herrn Dr. J.

Motyka vor und Verfasser erfüllt hier die angenehme Pflicht, nochmals beiden Herren für ihre Mühe zu danken.

Literaturangaben habe ich nur etlichen wenigen Arbeiten entnommen, insbesondere der Monographie Motykas; diese Werke sind aus dem Text zu ersehen. Sonst wurden für vorliegende Zusammenstellung nur Herbarbelege benutzt.

Usnea Wigg.

1. *Usnea Arnoldii Mot.*, Lich. gen. Usnea monogr. I, 1936, p. 288.

Distr. Maramureș: SO-Abhang des Berges Suligul, auf Fagus silvatica, 1370 m (Mot., l. c., p. 289).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, am Fusse des Berges Vârful-cu-Dor, auf Larix, 900—1000 m (leg. P. Cretzoiu).

2. *Usnea articulata (L.) Hoffm.*, Deutschl. Fl., 2, 1796, p. 133. Lichen articulatus L., Sp. plant. 1753, p. 1156.

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, in Poiana-Coștilei, auf Fagus silvatica, 1200 m (P. Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 27).

3. *Usnea barbata (L.) Wigg.*, Primit. Fl. Holsat., 1780, p. 91. Lichen barbatus L., Sp. plant, 1753, p. 1155.

Distr. Bistrița-Năsăud: im Walde Dornișoara auf Fichtenäste (leg. P. Cretzoiu).

Distr. Câmpulung: im Walde Tesna-Impuțită, auf Pinus silvestris (leg. P. Cretzoiu).

var. graciosa (Mot.) Cretz., in *Verh. u. Mitteil. Siebenbürg. Ver. f. Naturwiss.* 1940, p. 245. Usnea barbata subsp. graciosa Mot. in *Wydawn. Muz. Slask. w Katowic.* III, 1930, p. 24.

Distr. Câmpulung: im Walde Poiana-Stampei, auf Pinus silvestris-Äste (leg. P. Cretzoiu).

Distr. Brașov: Piatra-Mare, auf Abies alba (leg. J. Wolff).

Distr. Neamț: Ceahlău-Gebirge, auf Larix polonica, 1500 m (leg. E. J. Nyárady in Fl. Rom. Exsicc. sub. U. barbata v. florida, Nr. 307).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, am « Brâul-Mare al Jepilor-Mici » auf Pinus cembra, 1750 m (leg. P. Cretzoiu).

4. *Usnea carpathica Mot.*, in *Wydawn. Muz. Slask. w Katowic*, III, 1930, p. 25.

Distr. Hunedoara: Retezat-Gebirge, in Fichtenwälder (leg. H. Zschacke in Herb. Cluj; P. Cretzoiu in *Bul. Grăd. Bot. Muz. Bot. Cluj*, XX, 1940, p. 109).

5. *Usnea caucasica Wain.*, in *Termész. Füzt.* XXII, 1899, p. 275.

Distr. Bistrița-Năsăud: Dornișoara, auf. Picea excelsa (P. Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.*, X, 1937, p. 27).

Distr. Hunedoara: Grădiște (MOTYKA, Usnea Monogr. I, 1936, p. 213).

Distr. Brașov: Bucegi-Gebirge, auf dem Wege Guțan-Simon, auf dünne Fichtenäste (P. CRETZOIU, l. c. 1937, p. 27).

Distr. Neamț: Ceahlău-Gebirge, auf Larix polonica, 1500 m (MOTYKA, *l. c.* 1936, p. 213).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, am Fusse des Berges Vârful-cu-Dor bei Sinaia, 900 m, auf Larix (P. CRETZOIU, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 27).

6. *Usnea cavernosa Tuck.*, apud. AGASS., Lake Super., 1850, p. 171.

Distr. Câmpulung: Borgopas zwischen Bistrița und Vatra-Dornei auf Picea excelsa (MOTYKA, Usn. monogr. 1936, p. 79).

Distr. Bistrița-Năsăud: im Picea excelsa Wald bei Dornișoara (P. CRETZOIU, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 27).

Distr. Făgăraș: Făgăraș-Gebirge auf dem Arpaș und Negoi (MOTYKA, *l. c.*, p. 79—80) und Cârțișoara auf Abies (leg. M. FUSS, in Herb. Cluj; P. CRETZOIU in *Bul. Grăd. Bot. Muz. Bot. Cluj* XX, 1940, p. 109).

Distr. Sibiu: bei Foltea auf Nadelholz (P. CRETZOIU, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 27) und auf dem Vârfu-Mare auf Picea excelsa (MOTYKA, *l. c.*, p. 79).

Distr. Hunedoara: Retezat-Gebirge im Tale Râușor und Valeriasca, 1600 m (MOTYKA, *l. c.*, p. 80; GYELNIK, Lichenotheca parva, Nr. 10).

var. sibirica (Räs.) Cretz., in *Verh. u. Mitteil. d. Siebenbürg. Ver. f. Naturwiss.* 1940, p. 245. *Usnea sibirica Räs.*, in Animadvers. Systemat. Herb. Univ. Tomsk, 3, 1927, p. 1.

Distr. Câmpulung: Borgopas, zwischen Vatra-Dornei und Bistrița, 1200 m, auf Picea excelsa (MOTYKA, Usn. Monogr. 1936, p. 81).

Distr. Mureș: Călimani-Gebirge in Poiana-Tihuleț, auf Picea excelsa, 1500 m (leg. P. CRETZOIU).

Distr. Hunedoara: Cugirer-Gebirge auf dem Dealul-Tomnaticului, auf Abies und Pinus, 1320 m (MOTYKA, *l. c.*, p. 81).

Distr. Argeș: Făgăraș-Gebirge, Moldoveanu, auf Picea excelsa (leg. C. C. GEORGESCU).

7. *Usnea ceratina Ach.*, Lich. Univ. 1810, p. 619.

Distr. Hunedoara: Cugirer-Berge auf Dealul-Codiții, Hodinic-Gipfel und Dealul Rece, 700—1300 m, auf Waldbäume (F. FORISS, in *Bot. Közlem.* XXV, 1928, p. 87).

Distr. Muscel: im Walde Rădești in der Nähe des Ortes Mihăești, auf Buchenäste, cca 500 m (P. CRETZOIU, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 27).

8. *Usnea comosa (Ach.) Röhl.*, Deutschl. Fl. 3, 1813, p. 144. Lichen comosus Ach., in *Kgl. Vetensk. Acad. Nya Handl.*, 1795, p. 209.

Distr. Sibiu: Guruslău und Plaiul-Tării bei Sibiu, auf Prunus und Fagus (leg. M. Fuss in herb. Cluj; P. Cretzoiu, in *Bul. Grăd. Bot. Muz. Bot.* Cluj, XX, 1940, p. 109).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, Vârful-cu-Dor nahe von Sinaia, auf Larix und Gâlma bei Bușteni, 900—1100 m, auf Larix und Fagus (P. Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 27).

Distr. Muscel: Plaghia-Berg nahe bei Câmpulung und Creţişoara, auf Quercus petraea (P. Cretzoiu, *l. c.*, 1937, p. 27).

var. robusta Räs. apud Cretzoiu in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 27.

Distr. Muscel: Dealul-Măgura, nahe bei Câmpulung, auf Quercus petraea (P. Cretzoiu, *l. c.*, 1937, p. 27.

var. sordidula (Mot.) Cretz., nov. comb. Usnea comosa subsp. sordidula Mot., Usnea Monogr. I, 1936, p. 275.

Distr. Arad: Rovina, Boroşineu, auf Acer campestre (Motyka, *l. c.*, 1936, p. 277).

9. *Usnea dasypoga (Ach.) Rähl.*, Deutschl. Fl., III, 1813, p. 144. *Usnea plicata var. dasypoga* Ach., Meth. Lich. 1803, p. 312.

Distr. Sibiu: Plaiul-Tării bei Hermannstadt, auf Abies (leg. M. Fuss, in Herb. Cluj; P. Cretzoiu, in *Bul. Grăd. Bot. Muz. Bot.*, Cluj, XX, 1940, p. 111).

Distr. Hunedoara: Cugirer-Berge bei Donea, Dealul-Comanului, Muncelul, Dealul-Tomnaticul und Auşelul, 1200—1350 m, auf Waldbäume (F. Foriss in *Bot. Közlem.* XXV, 1928, p. 87); Retezat-Gebirge, im Fichtenwald (leg. H. Zschacke in Herb. Cluj; P. Cretzoiu in *Bul. Grăd. Bot. Muz. Bot.* Cluj XX, 1940, p. 111).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, am Fusse des Berges Vârful-cu-Dor bei Sinaia, 900 m, auf Larix (leg. P. Cretzoiu).

Distr. Muscel: Plaghia-Höhe, nahe von Câmpulung (leg. C. Borduşan); Piatra-Craiului, bei Stâna-din-Grind, auf Fichte, 1500 m (leg. P. Cretzoiu).

var. major (Mot.) Cretz., nov. comb. Usnea major Mot., apud Räsänen, in *Memor. Soc. F. et Fl. Fenn.* 8, 1933, p. 187. Usnea dasypoga subsp. eudasypoga var. major Mot., Usnea Monogr. I, 1936, p. 196.

f. sublongissima Räs., Lich. Fenn. Exsicc. 1935, nr. 8.

Distr. Câmpulung: im Walde Poiana-Stampei, auf Pinus silvestris (P. Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 27).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, am Fusse des Berges Vârful-cu-Dor bei Sinaia, auf Larix, 900—1000 m (P. Cretzoiu, *l. c.*, 1937, p. 27).

var. stramineola (Mot.) Cretz., nov. comb. Usnea dasypoga subsp. stramineola Mot., Usnea Monogr. I, 1936, p. 202.

Distr. Bistrița-Năsăud: im Fichtenwald Dornișoara (P. Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 27).

Distr. Câmpulung: bei Tesna-Impuțită auf Betula verrucosa und im Walde Poiana-Stampei auf Pinus silvestris (P. Cretzoiu, *l. c.*, 1937, p. 27).

Distr. Argeș: bei Sălătruc, auf Abies alba (P. Cretzoiu, *l. c.*, 1937, p. 27).

var. tuberculata (Mot.) Cretz., in *Verh. u. Mittl. d. Siebenbürg. Ver. f. Naturwiss.* 1940, p. 245. Usnea dasypoga subsp. tuberculata Mot., Usnea Monogr. I, 1936, p. 197).

Distr. Brașov: bei Noua nahe von Brașov (leg. F. Panaitescu).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, am Fusse des Berges Dihamul, auf Fagus silvatica, 1300 m (leg. O. Klement et P. Cretzoiu) und in Poiana-Morarului, 1300 m, auf Fagus silvatica (leg. P. Cretzoiu et O. Klement).

f. flaccida (Stein) Cretz., in *Verh. u. Mitt. d. Siebenbürg. Ver. f. Naturwiss.* 1940, p. 245. Usnea barbata var. flaccida Stein, apud. Egeling in XXVIII. *Ber. Ver. Naturk.*, Cassel, 1881, p. 92.

Distr. Dâmbovița: Bucegi-Gebirge, im Walde Cocora, auf Picea excelsa, 1700 m (leg. A. Beldie).

10. *Usnea distincta Mot.*, Usnea Monogr. I, 1936, p. 298.

Distr. Câmpulung: im Tale Tesna-Impuțită, nahe vom Orte Coșna, auf Picea excelsa (P. Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 38).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, am Fusse des Berges Vârful-cu-Dor bei Sinaia, auf Larix (P. Cretzoiu, *l. c.*, 1937, p. 27).

11. *Usnea esthonica Räs.*, Die Flecht. Estlands, I, 1931, p. 18.

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, auf dem Morarul, 1200 m, nahe von Poiana Morarului, auf Fagus silvatica (P. Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 28).

Distr. Muscel: Dealul-Măgura bei Câmpulung, auf Quercus petraea (P. Cretzoiu, *l. c.*, 1937, p. 28).

12. *Usnea faginea Mot.*, Usnea Monogr. I, 1936, p. 172.

Distr. Hunedoara: Hațeg, auf Abies alba (Motyka, *l. c.*, p. 173).

13. *Usnea romanica Cretz.*, nov. comb. U. flexuosa Räs., *Acta p. F. et Fl. Univ.* Ser. II, vol. II/1, 1935, p. 3 non Tayl., non DR.

Distr. Caraș: bei Reșița-Văliug (Räsänen, *l. c.*, p. 3).

14. *Usnea florida (L.) Wigg.*, Primit. Fl. Holsat., 1780, p. 91. Lichen floridus L., Sp. plant. 1753, p. 1156.

Distr. Arad: im Walde Părnești nahe des Mureș-Tales, auf Fagus silvatica (leg. Z. Przemetchi); bei Arad (Motyka, Usnea Monogr. I, 1936, p. 243).

Distr. Târnava-Mică: Hususău (Motyka, *l. c.*, 1936, p. 243).

Distr. Brașov: Bucegi-Gebirge, im Tale Mălăești, 1500 m, auf Picea excelsa (leg. P. Cretzoiu).

Distr. Făgăraș: Făgăraș-Gebirge auf Cârțișoara auf Abies alba (leg. M. Fuss, in Herb. Cluj; P. Cretzoiu, in *Bul. Grăd. Bot. Muz. Bot.* XX, 1940, p. 111).

Distr. Sibiu: Sibiu, auf Rinde (leg. M. Fuss; in Herb. Cluj; P. Cretzoiu in *l. c.*, 1940, p. 111).

Distr. Hunedoara: Cugirer-Gebirge auf der Măgura und Dealul-Tetul, 1300—1450 m, auf Rinde (F. Foriss, in *Bot. Közl.* XXV, 1928, p. 87); bei Râul-de-Mori (leg. H. Zschacke, in Herb. Cluj; P. Cretzoiu, in *l. c.*, 1940, p. 111).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, am Fusse des Berges Vârful-cu-Dor bei Calea Codrului, nahe von Sinaia, 900 m, auf Larix (leg. P. Cretzoiu).

var. arbuscula (Mot.) Räsänen, nov. comb. Usnea florida subsp. arbuscula Mot., in *Wydawn. Muz. Slask. w Katowic.* III, 1930, p. 23.

Distr. Câmpulung: bei Poiana-Stampei an Pinus silvestris (leg. P. Cretzoiu).

Distr. Mureș: Gurghiu-Berge, auf Nadelhölzer (leg. ? in Herb. P. Cretzoiu).

Distr. Arad: Arad, in Cladova-Tal (P. Cretzoiu, in *Bul. Grăd. Bot. Muz. Bot.* Cluj, XX, 1940, p. 111).

Distr. Hunedoara: Jieț-Tal bei Petroșani (Motyka, Usnea Monogr. I, 1936, p. 244).

Distr. Severin: Rusca-Gebirge (Motyka, *l. c.*, 1936, p. 244).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, am Fusse des Berges Vârful-cu-Dor, bei Calea Codrului, 900 m, auf Larix (leg. P. Cretzoiu), in Poiana Coștilei, 1200 m, auf Fagus und Poiana-Morarului, 1300 m, auf Fagus (leg. O. Klement et P. Cretzoiu).

Distr. Muscel: Plaghia-Berg und Cretișoara-Hügel, nahe von Câmpulung, auf Quercus petraea (leg. C. Borduşan); Piatra-Craiului Gebirge, bei Stâna din Grind, 1500 m, auf Picea excelsa (leg. P. Cretzoiu).

Distr. Argeș: nahe von Perișani, auf Abies-Äste (leg. P. Cretzoiu).

var. fagofila (Mot.) Cretz., in Verh. u. Mitteil. d. Siebenbürg. Ver. f. Naturwiss. 1940, p. 246. Usnea florida subsp. fagofila Mot., Usnea Monogr. I, 1936, p. 247.

Distr. Sibiu: Cristianul-Sibiului, auf Fagus silvatica (Motyka, *l. c.*, 1936, p. 247).

var. Tominii (Räs.) Mot., Usnea Monogr. I, 1936, p. 243. Usnea Tominii Räs., in *Trud. Tifl. Botan. Instit.* I, 1933, p. 371.

Distr. Brașov: Piatra-Craiului-Gebirge, auf Nadelholz (leg. J. Wolff).

Distr. Trei-Scaune: zwischen Tuşnad und Sankt-Anna-See (leg. P. Cretzoiu).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge am Fusse des Berges Vârful-cu-Dor bei Sinaia, 900 m, auf Larix (leg. P. Cretzoiu) und in Poiana-Morarului, 1200 m, auf Fagus silvatica (leg. P. Cretzoiu und O. Klement); Ciucaş-Gebirge, im Walde Zăganul und Telejenelul-Tal, auf Buche (leg. P. Cretzoiu).

15. *Usnea fulvoreagens (Räs.) Mot.*, Usnea Monogr. I, 1936, p. 284. Usnea glabrescens var. fulvoreagens Räs., Die Flecht. Estlands I, 1931, p. 20.

Distr. Arad: im Walde Părneşti, in der Nähe des Mureş-Tales, auf Fagus silvatica (leg. Z. Przemetchi).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, am Fusse des Berges Vârful-cu-Dor, bei Calea-Codrului, nahe von Sinaia, 900 m, auf Larix (P. Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 28).

16. *Usnea glabrata (Ach.) Mot.*, in *Wydawn. Muz. Slask. w Katowic*, III, 1930, p. 15. Usnea plicata var. glabrata Ach., Lich. Univ. 1810, p. 624.

Distr. Bistriţa-Năsăud: im Picea excelsa-Wald bei Dornişoara (P. Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 28).

Distr. Mureş: Călimani-Gebirge, auf Fagus silvatica (P. Cretzoiu, in *l. c.*, 1937, p. 28).

17. *Usnea glabrescens (Nyl.) Wain.*, in *Meddel. Soc. F. et Fl. Fennica*, 48, 1924, p. 173. Usnea barbata var. glabrescens Nyl., apud Wainio, in *Meddel. Soc. F. et Fl. Fennica*, 2, 1878, p. 46.

Distr. Hunedoara: Retezat-Gebirge, auf Picea excelsa (Motyka, Usnea Monogr. I, 1936, p. 301).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, am Fusse des Berges Vârful-cu-Dor an Calea Codrului bei Sinaia, 900 m, auf Larix und in Poiana-Morarului, 1200 m, auf Fagus silvatica (P. Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 28).

var. glabrella Mot. in *Wydawn. Muz. Slask. w Katowic.*, III, 1930, p. 24).

Distr. Câmpulung: Borgopas, 1200 m, auf Picea excelsa (Motyka, Usnea Monogr. I, 1936, p. 302).

Distr. Făgăraş: Făgăraş-Gebirge auf dem Cârţişoara, auf Abies (leg. M. Fuss, in Herb. Cluj; P. Cretzoiu, in *Bul. Grăd. Bot. Muz. Bot.* Cluj, XX, 1940, p. 111).

Distr. Hunedoara: Fichtenwälder im Retezat (leg. H. Zschacke, in Herb. Cluj; P. Cretzoiu, *l. c.*, 1940, p. 111).

Distr. Muscel: Piatra-Craiului-Gebirge, in Valea-lui-Ivan (leg. C. Borduşan).

var. sanguinea Räs., in *Acta p. F. et Fl. Univ.*, Ser. II, vol. II, 1, 1935, p. 3.

Distr. Gorj: Cioclovina-Höhe, 900 m, auf Fagus silvatica (leg. P. CRETZOIU).

18. *Usnea hirta (L.) Wigg.*, Primit. Fl. Holsat., 1780, p. 91. Lichen hirtus L., Sp. plant. 1753, p. 1155.

Distr. Trei-Scaune: Tuşnad, auf Pinus silvestris (MOTYKA, Usnea Monogr. I, 1936, p. 90).

Distr. Hunedoara: Cugirer-Berge auf dem Surianu, Donea und Dealul-Tetul, 1050—1900 m, rindenbewohnend (F. FORISS, in *Bot. Közl.* XXV, 1928, p. 87).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, auf dem « Brâul-Mare al Jepilor-Mici », auf Pinus cembra, 1750 m (leg. P. CRETZOIU).

Distr. Muscel: Cretişoara-Hügel und Plaghia-Höhe, nahe von Câmpulung, auf Quercus petraea (leg. C. BORDUŞAN).

var. minutissima (Mer.) Cretz., in *Verh. u. Mitt. d. Siebenbürg. Ver. f. Naturwiss.* 1940, p. 246. Usnea barbata var. florida f. minutissima Mer., apud KREYER in *Acta Horti Petrop.* XXXI, 1913, p. 274.

Distr. Hunedoara: bei Cugir auf Abies, 310 m (F. FORISS, in *Bot. Közlem.* XXV, 1928, p. 87).

var. romanica Räs., in *Acta p. F. et Fl. Univ.*, Ser. II, vol. II, Nr. 1, 1935, p. 4.

Distr. Buzău: Buzăuer-Gebirge, im Tigva-Tale, auf Prunus-Äste (RÄSÄNEN, *l. c.*, p. 4).

19. *Usnea laricina Wain.*, apud. RÄSÄNEN, Die Fl. Estlands, I, 1931, p. 17.

Distr. Arad: Rovina und Boroşineu, auf Acer campestre (MOTYKA, Usnea Monogr. I, 1936, p. 281).

Distr. Muscel: im Walde Rădeşti, auf Buchenäste, 500 m (P. CRETZOIU in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 28).

20. *Usnea longissima Ach.*, Lich. Univ. 1810, p. 626.

Distr. Odorhei: Harghita-Gebirge, auf Picea excelsa (P. CRETZOIU, in *Bul. Grăd. Bot. Muz, Bot.* Cluj, XIX, 1939, p. 125).

Distr. Mureş: Lăpuşna im Gurghiu-Tal, 950 m (P. CRETZOIU in *l. c.*, 1939, p. 107).

Distr. Braşov: Bucegi-Gebirge im Tale Mălăeşti (ZSCHACKE, in *Magy. Bot. Lap.* X, 1911, p. 379).

Distr. Hunedoara: bei Grădiştea (V. Gyelnik, Lichenotheca parva, Nr. 13) und Cugirer-Berge auf dem Dealul-Prisaca, 1550 m, an Abies-Äste (F. FORISS, *Bot. Közlem.* XXV, 1928, p. 87).

Distr. Severin: Poiana-Ruscăi-Berge (H. Lojka in *Termész. Közlem.*, X, 1875, p. 91).

Distr. Neamț: im Walde Tarcău, an Nadelhölzer und auf dem Ceahlău an Abies alba-Äste (leg. P. Cretzoiu).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, zwischen Poiana-Coștilei und Poiana-Morarului, 1200 m (leg. O. Klement et P. Cretzoiu).

Distr. Dâmbovița: Bucegi-Gebirge im Ialomița-Tal, in der Zănoaga-Schlucht, an Picea excelsa, 1400 m (P. Cretzoiu, Lich. Rom. Exsicc. Nr. 37).

Distr. Gorj: Tismana-Tal nahe des Tismana-Klosters, 800 m, auf Fagus silvatica (Gyelnik, Lichenotheca Nr. 116).

f. tenuis Th. Fr., Lich. Scand, I, 1871, p. 14.

Distr. Suceava: im Walde Mestecănești bei Iacobeni, 1200 m (leg. E. Bauer).

Distr. Neamț: Baicu-Wald, an Nadelhölzer (leg. ?).

21. *Usnea monstruosa Wain.*, in *Medd. Soc. F. et Fl. Fennica*, 48, 1924, p. 173.

var. balcanica Räs., in *Acta p. F. et Fl. Univ.*, Ser. II, vol. II, 1, 1935, p. 4.

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, auf dem «Brâul-Mare al Jepilor-Mici» bei «Creasta-cu-Zâmbrii», 1740 m, auf Pinus cembra (P. Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 28).

Distr. Muscel: Cretișoara-Hügel nahe bei Câmpulung (Räsänen, *l. c.*, p. 4).

22. *Usnea pendulina Mot.*, Usnea Monogr. I, 1936, p. 136.

Distr. Alba-de-Jos: bei Bucium und Zlatna, auf Buchenäste (Motyka, *l. c.*, p. 138).

23. *Usnea perplectans Stirt.*, in *Scott. Natur.*, VI, 1881, p. 103.

Distr. Câmpulung: Cârlibaba-Berg, 1250 m (Motyka, Usnea Monogr. I, 1936, p. 294).

Distr. Severin: Poiana-Ruscăi-Berge, auf Fagus silvatica (Motyka, *l. c.*, p. 294).

24. *Usnea plicata (L.) Wigg.*, Primit. Fl. Holsat., 1780, p. 91. Lichen plicatus L., Sp. plant. 1753, p. 1154.

Distr. Hunedoara: Cugirer-Berge, auf dem Dealul-Tetul und Dealul-Tomnatecului, 1300 m, auf Abies alba (F. Foriss, *Bot., Közlem.*, XXV, 1928, p. 87).

Distr. Bacău: bei Dărmănești im Walde Stirbei, auf Picea excelsa (P. Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 28).

Distr. Argeș: Făgăraș-Gebirge auf dem Moldoveanu, auf Picea excelsa (P. Cretzoiu, *l. c.*, 1937, p. 28).

25. *Usnea rigida (Ach.) Röhl.*, Deutschl. Fl. III, 1813, p. 143. Usnea florida f. rigida Ach., Lich. Univ. 1810, p. 621.

Distr. Câmpulung: im Tesna-Impuțită-Tal nahe bei Coșna, auf Picea excelsa (leg. P. Cretzoiu).

Distr. Neamț: im Walde Tarcău (Leg. ?).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, auf dem « Brâul-Mare al Jepilor-Mici », auf Pinus cembra, 1750 m (leg. P. Cretzoiu), bei Sinaia, 900 m, auf Larix (P. Cretzoiu, Lich. Rom. Exsicc. Nr. 7 und in *Bul. Grăd. Bot. Muz. Bot.* Cluj, XX, 1940, p. 111) und im Tale Vânturiș, oberhalb von Sinaia, 1200 m, auf Larix (V. Gyelnik, Lichenotheca, Nr. 175).

var. reagens Räs., apud Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 28.

Thallus sic ut typo, sed medulla KOH rubescens.

Distr. Brașov: Bucegi-Gebirge, auf dem Wege von Guțanul nach Simon, auf dünne Picea excelsa-Äste (P. Cretzoiu, in *l. c.*, 1937, p. 28).

26. *Usnea rugulosa Wain.*, in *Medd. Soc. F. et Fl. Fennica*, 48, 1924, p. 172.

Distr. Făgăraș: Făgăraș-Gebirge, auf dem Negoi (Motyka, Usnea Monogr. I, 1936, p. 151).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, auf dem « Brâul-Mare al Jepilor-Mici » bei « Creasta-cu-Zâmbrii », auf Pinus cembra, 1740 m (P. Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 28).

27. *Usnea scabrata Nyl.*, in *Flora*, LVIII, 1875, p. 103.

Distr. Târnava-Mică: Hususău (Motyka, Usnea Monogr. I, 1936, p. 147).

Distr. Hunedoara: Cugirer-Berge auf dem Dealul-Tomnatecului und Dealul-Rece, 1300 m, auf Abies alba und Fagus silvatica (F. Foriss, in *Bot. Közlem.* XXV, 1928, p. 87).

28. *Usnea similis Mot.*, in Räsänen, Die Flecht. Estlands, I, 1931, p. 18.

Distr. Câmpulung: zwischen Vatra-Dornei und Bistrița, auf Picea excelsa, 1200 m (Motyka, Usnea Monogr. I, 1936, p. 271).

Distr. Muscel: Plaghia-Höhe und Cretișoara-Hügel bei Câmpulung, auf Quercus petraea (P. Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 28).

var. Wainioi Räs., apud Cretzoiu in *Rev. Bryol. et Lich.*, X, 1937, p. 28. Usnea australis var. Wainioi Räs., Die Flecht. Estlands, I, 1931, p. 19.

Distr. Câmpulung: bei Poiana-Stampei, auf Nadelhölzer (P. Cretzoiu, *l. c.*, 1937, p. 28).

Distr. Mureș: Călimani-Gebirge, niedrigere Standorte (P. Cretzoiu, *l. c.*, 1937, p. 28).

29. *Usnea sorediifera (Hue) Mot.*, in *Wydawn. Muz. Slask. w Katowic.*, III, 1930, p. 15. Usnea florida var. sorediifera Hue, in *Bull. Acad. Internat. Géogr. Bot.* IX, 1900, p. 253.

Distr. Braşov: Bucegi-Gebirge, auf dem Wege von Guţan nach Simon, auf dünne Picea excelsa-Äste (P. CRETZOIU, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 29).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge auf dem « Brâul-Mare al Jepilor-Mici », auf Pinus cembra, 1750 m und am Fusse des Berges Vârful-cu-Dor, bei Calea-Codrului, oberhalb von Sinaia, auf Larix (P. CRETZOIU, *l. c.*, 1937, p. 29).

30. *Usnea sublaxa Wain.*, in NORRLIN et NYLANDER, Herb. Lich. Fenniae, 1921, Nr. 463.

Distr. Câmpulung: im Walde Poiana-Stampei, auf Pinus silvestris (leg. P. CRETZOIU).

Distr. Bistriţa-Năsăud: im Fichtenwalde bei Dornişoara auf Picea excelsa (leg. P. CRETZOIU).

Distr. Ciuc: Borsec, auf Buchen (leg. J. WOLFF).

Distr. Braşov: Bucegi-Gebirge, im Tale Mălăeşti, auf Fichtenholz, 1500 m (leg. P. CRETZOIU).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, im Tale Izvorul-Dorului, unter Vânturiş, 1200 m, auf Picea excelsa (leg. P. CRETZOIU) und auf der Gâlma-Höhe, nahe von Poiana-Coştilei, auf Buche, 1100 m (leg. O. KLEMENT et P. CRETZOIU).

var. transcaucasica Mot., apud CRETZOIU in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 29.

Distr. Neamţ: im Walde Tarcău, auf Nadelhölzer (leg. ?).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, am Fusse des Berges Vârful-cu-Dor, bei Calea-Codrului, oberhalb von Sinaia, auf Larix (P. CRETZOIU, *l. c.*, 1937, p. 29).

31. *Usnea subscabrata (Wain.) Mot.*, Usnea Monogr. I, 1936, p. 206. Usnea dasypoga var. subscabrata Wain. apud ALMQUIST, Kolmann. Tutk. Länsi-Siperiassa, IV, 1928, p. 67.

Distr. Muscel: Piatra-Craiului-Gebirge in Valea-lui-Ivan, auf Picea excelsa (leg. C. BORDUŞAN).

32. *Usnea substerilis Mot.*, in *Wydawn. Muz. Slask. w Katowic.* III, 1930, p. 24.

Distr. Mureş: Călimani-Gebirge im Răstolniţa-Tal, auf Picea excelsa (leg. P. CRETZOIU).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, auf dem « Brâul-Mare al Jepilor-Mici », 1750 m, auf Pinus cembra und am Fusse des Berges Vârful-cu-Dor, nahe von Calea-Codrului, oberhalb von Sinaia, auf Larix (leg. P. CRETZOIU).

Distr. Muscel: Măgura-Höhe, nahe von Câmpulung, auf Quercus petraea (leg. C. Borduşan).

33. *Usnea tenax Mot.*, Usnea Monogr., I, 1936, p. 157.

Distr. Dâmboviţa: Bucegi-Gebirge, im Walde Cocora, auf Picea excelsa, 1700 m (leg. A. Beldie). Neu für die Flora Rumäniens.

34. *Usnea Wasmuthii Räs.*, Die Flecht. Estlands, I, 1931, p. 17.

Distr. Braşov: Bucegi-Gebirge, auf dem Wege von Guţan zu Simon, auf dünne Picea excelsa-Äste (P. Cretzoiu, in *Rev. Bryol. et Lich.* X, 1937, p. 29).

Distr. Prahova: Bucegi-Gebirge, auf dem « Brâul-Mare al Jepilor-Mici », auf Pinus cembra, 1750 m (P. Cretzoiu, *l. c.*).

Distr. Muscel: Creţişoara-Hügel und Dealul-Măgura bei Câmpulung, auf Quercus petraea (P. Cretzoiu, *l. c.*).

591.4 ANATOMIE MORPHOLOGIQUE

L'ARBRE BRONCHIQUE ET LES ZONES PULMONAIRES CHEZ LES ANIMAUX DOMESTIQUES

—CONSIDÉRATIONS SUR L'ASYMÉTRIE PULMONAIRE—

par **O. Vlăduțiu**

Par une technique personnelle, macération partielle et dissection nous avons mis en évidence l'arbre bronchique et les zones pulmonaires chez les différentes éspèces d'animaux domestiques (cheval, mulet, âne, boeuf, chèvre, mouton, porc, chien, chat, lapin et cobaye) et nous avons établi que l'asymétrie pulmonaire est réelle tant par le parenchyme que par les divisions bronchiques.

Le rôle considérable joué par le poumon dans l'organisme ainsi que les nombreux procéssus pathologiques localisés, ont déterminé une longue série de recherches. Ces recherches nombreuses pour l'anatomie et la pathologie pulmonaire humaine, sont beaucoup plus réduites quant à l'anatomie et à la pathologie vétérinaire.

Les premières recherches sur la constitution du poumon datent de 1880, quand AEBY [1]) a essayé de faire une systématisation des ramifications bronchiques intra-pulmonaires chez l'homme et chez les mammifères.

AEBY a montré pour la première fois que dans chaque poumon il y a une bronche souche sur laquelle les bronches collatérales s'orientent en deux directions: les unes ventrales, les autres dorsales. Pour chaque poumon il décrit une bronche apicale, 4 bronches ventrales et 4 bronches dorsales.

La systématisation d'AEBY est basée sur le rapport topographique existant entre les bronches et l'artère pulmonaire. Les bronches qui

[1]) AEBY, Bronchialbaum, Leipzig 1880. Ib. *Ref. Rev. Soc. Méd.*, 1882, p. 412.

prennent naissance sur la bronche souche au-dessus de la place d'intersection de l'artère pulmonaire, s'appellent épartérielles et celles qui prennent naissance au-dessous de l'artère, hipartérielles.

À la faveur de ces recherches, AEBY, conclut à une asymétrie entre les deux poumons, fait sur lequel il divise les mammifères en 3 groupements: avec un système épartériel bilatéral, avec un système épartériel unilateral et sans système épartériel.

Plus tard VILLACH (1886) et NARATH (1892) par de recherches analogues se lèvent contre les affirmations d'AEBY, et soutiennent que les deux poumons — droit et gauche — ont une structure homologue au point de vue des éléments aérifères.

NARATH soutient que l'asymétrie des deux poumons est seulement apparente, à cause de l'émigration et de la concrescence de quelques bronches dans un poumon seulement. Il donne comme exemple que toutes les mammifères ont une bronche apicale destinée aux sommet et qui n'est pas autre chose qu'un rameau de la première bronche ventrale. Ce rameau chez quelques animaux peut émigrer de la première bronche ventrale sur le tronc souche ou même sur la trachée, comme on observe chez les ruminants et les porcins.

D'HARDIVILLIER (1897) [1]) combat les affirmations de NARATH sur l'émigration et la concrescence des bronches. Il montre par des recherches faites sur les lapins et des moutons que les bronches lobaires, dans les deux poumons, ne sont pas formées par dichotomie, mais par des ramifications collatérales, par des hernies latérales de la souche ou de la trachée.

La bronche épartérielle (apicale) droite chez le mouton prend naissance par une ramification collatérale de la trachée. Donc, elle n'est pas un rameau émigrant de la première bronche hipartérielle (ventrale).

Ces recherches ont été continuées par NICOLAS HASSE et plus récement par HUNTINGTON (1920), LOPPO DE CARVALHO et ROCHETA [2]) 1934), HERRENHEISER et KUBAT (1936) [3]), LUCIEN et WEBER (1936) [4]), GRAND-GÉRARD et HEIM DE BALSAC (1937) [5]), COULOUMA et DÉVOS (1938) [6]).

Parmi ceux-ci, LUCIEN et WEBER sont les premiers qui font une systématisation des ramifications bronchiques chez l'homme, tenant

[1]) D'HARDIVILLIERS, *C. R. Soc. Biol.* 1896. *Bibliogr. Anat.*, 1896, p. 97. 1897, p. 32; *C. R. Ac. Sc.*, 1897, p. 319.

[2]) DE LOPO DE CARVALHO et ROCHETA, *Presse méd.*, 22 déc. 1934.

[3]) HERRENHEISER et KUBAT, *Zeit. Anat.*, 1936.

[4]) LUCIEN et WEBER, *Arch. Anat. Hist.*, 1936, p. 109.

[5]) GRANDGÉRARD et HEIM DE BALSAC, *Presse méd.*, 20 mars 1937.

[6]) P. COULOUMA et L. DÉVOS, Les zones poulmonaires. La lobation et la zonation des poumons. Étude d'anatomie comparée chez l'homme et les mamifères, 1938.

compte non seulement de l'origine et de la direction des bronches, mais aussi des territoires qu'elles aérent.

Ils divisent les bronches en: bronches ventrales, dorsales, para-bronches internes et para-bronches externes. Ils ont établi d'accord avec NARATH, NICOLAS, DÉVÉ et HUNTINGTON, que l'asymétrie pulmonaire chez l'homme n'est qu'apparente, car les ramifications bronchiques sont parfaitement symétriques dans les poumons. Ils décrivent les territoires de ventilation de chaque bronche et ils insistent sur l'interêt clinique et anatomo-pathologique de ces territoires.

Deux ans plus tard, COULOUMA et DÉVOS vérifient les recherches de LUCIEN et WEBER et les complètent par des recherches d'anatomie comparée et par des études radiologiques.

Ils concluent que l'arbre bronchique droit et gauche présentent une disposition similaire et une façon de ramification constante chez l'homme comme chez les mammifères. Les deux poumons comprennent à part la bronche souche, 4 bronches dorsales, 4 bronches ventrales, une bronche infra-cardiaque et une collatérale supérieure.

Si toutes ces recherches ont une grande valeur pour la connaissance de l'anatomie pulmonaire et pour l'établissement du siège des lésions pulmonaires chez l'homme, leur valeur n'est pas la même en ce qui concerne l'anatomie et la pathologie pulmonaire des animaux domestiques.

Nous allons montrer par nos recherches, qu'il y a une grande différence entre l'arbre bronchique décrit chez l'homme et celui existant chez les animaux domestiques.

CHAUVEAU, ARLOING et LESBRE, MONTANÉ, BOURDELLE et BRESSOU, ELLENBERGER et BAUM, MARTIN, ZIMMERL et CARADONA, SIMSSON dans leurs traités d'anatomie vétérinaire nous donnent des indications sommaires sur les ramifications bronchiques intra-pulmonaires et surtout sur leur systématisation.

Par plusieurs séries de recherches nous nous sommes proposés de vérifier et de compléter les données connues sur les ramifications bronchiques intra-pulmonaires chez les animaux domestiques et d'établir une division zonaire des poumons qui pourra jouer un rôle pratique dans l'établissement des lésions anatomo-pathologiques localisées dans le poumon. Les premiers résultats de ces recherches ont été publiés dans le *Bulletin de l'Académie vétérinaire de la France* Nr. 6/1939, en collaboration avec M. C. BRESSOU, « La systématisation pulmonaire chez les animaux domestiques ».

Le présent mémoire, contient nos résultats, ainsi que les considérations qui en derivent — concernant les ramifications bronchiques

intra-pulmonaires et l'asymétrie pulmonaire, cette dernière tout évidente au point de vue macroscopique et pourtant contestée au point de vue bronchique.

Nous avons mis en évidence les ramifications bronchiques et les zones aérées par elles à l'aide de la dissection, de la macération partielle et dissection, de la corrosion et de la radiographie.

Les meilleurs résultats nous ont été donnés par la macération partielle suivie de dissection [1]).

RECHERCHES PERSONNELLES.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

L'arbre bronchique chez tous les animaux domestiques se compose par 2 bronches souches et plusieurs collatérales primaires, qui partent de leur surface. À leur tour, ces collatérales primaires, émettent d'autres collatérales qui finissent par des subdivisions de plus en plus fines jusqu'à l'épuisement.

Les bronches souches représentent la continuation des deux rameaux terminales de la trachée, qui finissent à la base du poumon par un bouquet terminal, formé par des divisions dichotomiques.

Les collatérales primaires de la souche, comme nombre, forme, siège, direction et étendue, sont très variées et en conséquence leur systématisation, rencontre des nombreuses difficultés. Leur siège sur le tronc souche et leur direction dans le parenchyme pulmonaire, quoique connus depuis longtemps, constituent même aujourd'hui une question d'actualité. D'après leur origine et leur direction, elles ont été divisées chez l'homme en *bronches apicales*, *ventrales* et *dorsales*, auxquels LUCIEN et WEBER ont ajoutés, les *para-bronches externes* et les *para-bronches internes*.

Si cette systématisation des ramifications bronchiques est plus ou moins parfaite, en ce qui concerne l'anatomie pulmonaire humaine,

[1]) La technique: Nous mettons le poumon dans un vase plein d'eau à la température de 20°—25° et nous le maintenons plongé pendant 24 heures. Nous enlevons après la séreuse de la surface du poumon et nous le plongeons de nouveau dans le même vase pendant 24—48 heures. Ce temps écoulé, à l'aide d'une pince anatomique fine et courbe, nous disséquons tour à tour les 2 bronches souches et la base des rameaux principaux. Nous délimitons et nous séparons ainsi par dissection les zones aérées par chaque rameaux principal et après, toutes les divisions de ces rameaux principaux, jusqu'aux plus fines. Nous mettons l'arbre bronchique ainsi préparé dans une solution de 10% de formol et le maintenons pendant 10—12 heures. Nous fixons après chaque ramification bronchique sur une table à l'aide des épingles, dans la position la plus rapprochée au normal. La pièce ainsi préparée est mise à sécher pour devenir rigide et pour prendre la forme la plus près du normal.

elle est insuffisante pour les animaux domestiques, car elle ne peut pas englober toutes les collatérales primaires du tronc souche. Il est vrai que chez les animaux aussi, les collatérales primaires partent de la face externe ou inféro-externe, de la face supérieure ou supéro-externe et de la face interne et inférieure du tronc souche ce qui fait qu'à la première vue nous pouvons les encadrer dans la même systématisation. Mais en tenant compte que le siège de ces bronches et surtout leur nombre est assez variable, non seulement d'un animal à l'autre, mais d'un poumon à l'autre, nous arrivons vite à la conclusion qu'une systématisation nouvelle et plus complète est nécessaire. De prime abord il faut grouper ces collatérales primaires en 2 catégories si bien distinctes: *les ramifications constantes* ou *principales* et les *ramifications inconstantes* ou *complémentaires.*

Quoique les ramifications constantes sont plus nombreuses dans le poumon droit que dans celui gauche, nous les appellons constantes, car leur nombre, leur direction et leur étendue sont les mêmes chez tous les animaux appartenant à la même éspèce. Elles englobent toutes les bronches lobaires antérieures (apicales chez le cheval), la bronche lobaire moyenne, la bronche lobaire infra-cardiaque, les bronches dorsales et celles ventrales auxquelles nous pouvons ajouter encore la formation terminale de la souche nommée bouquet terminal.

L'origine de ces bronches sur le tronc souche peut subir des petites variations, mais leur présence et leur étendue dans la constitution de l'arbre bronchique sont toujours constantes.

Les ramifications bronchiques inconstantes sont plus petites et moins nombreuses que les autres; nous les appellons inconstantes, car leur nombre et leur siège varient d'un animal à l'autre et même d'un poumon à l'autre. Leur siège sur le tronc souche est toujours entre la 2-ème et la 4-ème bronche ventrale et dorsale. Elles ont le rôle d'aérer les espaces parenchymateuses restés libres entre les bronches dorsales et celles ventrales. C'est pour cette raison, que nous avons nommé ces bronches complémentaires. Ordinairement elles se groupent sur la face inférieure et sur la face interne de la souche, et leur nombre est toujours subordonné à l'espace compris entre les bronches constantes dorsales et ventrales. Quand ces espaces sont plus grands nous pouvons trouver 2 ou même 3 bronches complémentaires qui se succèdent. Quelquefois on remarque dans un poumon ou même dans les deux poumons une bronche complémentaire supéro-externe très petite, qui aère toujours des petits territoires parenchymateux accolés aux bronches dorsales et ventrales.

La constatation faite par Lucien et Weber chez l'homme que dans le poumon droit les éléments bronchiques sur le tronc souche ont des

points d'origine beaucoup plus espacés entre eux que dans le poumon gauche, est entièrement inversée lorsqu'il s'agit des animaux. Le nombre des collatérales constantes ainsi que le nombre des collatérales complémentaires est plus grand dans le poumon droit que dans le poumon gauche et sur la même longueur du tronc souche, elles sont placées plus près les unes des autres. Dans le poumon gauche, le nombre des collatérales est plus petit et par conséquence la distance entre elles est plus grande.

D'après le nombre et la direction des collatérales constantes et complémentaires, les animaux domestiques peuvent être divisés en 3 groupes:

1. Le premier groupe est formé par les solipèdes (le cheval, le mulet et l'âne), où l'arbre bronchique présente dans les deux poumons une bronche apicale, 4 bronches inféro-externes ou ventrales, 4 bronches supéro-externes ou dorsales, un bouquet terminal et 5—7 bronches complémentaires. Dans le poumon droit, à part cela, on trouve aussi une bronche lobaire infra-cardiaque (fig. 1 et 2).

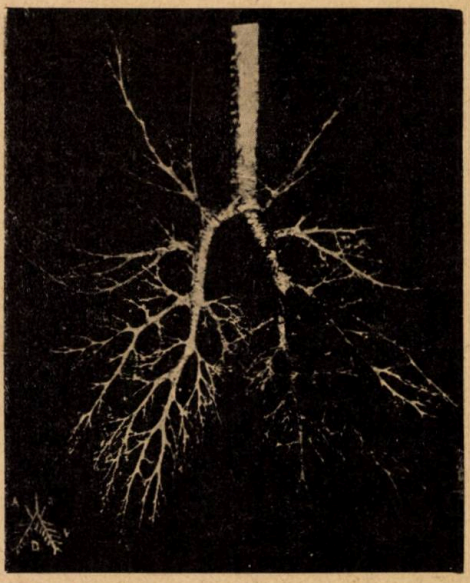
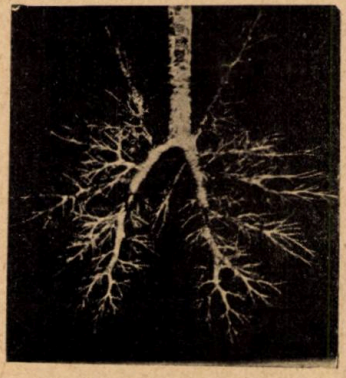


Fig. 1. — L'arbre bronchique du cheval. (Dissection)



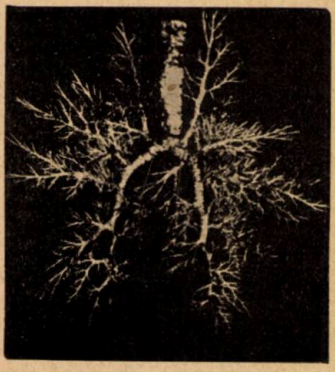


Fig. 2. — L'arbre bronchique du mulet et de l'âne. (Dissection)

2. Le second groupe, le plus grand, est formé par les ruminants, les porcins, les carnivores et les lapins. L'arbre bronchique de ces animaux, dans les deux poumons, est formé, par une bronche lobaire antérieure, 4 bronches ventrales, 4 bronches dorsales, un bouquet terminal et 4—9 bronches complémentaires. Dans le poumon droit on trouve encore une bronche lobaire moyenne et une bronche lobaire infra cardiaque (fig. 3, 4 et 5).

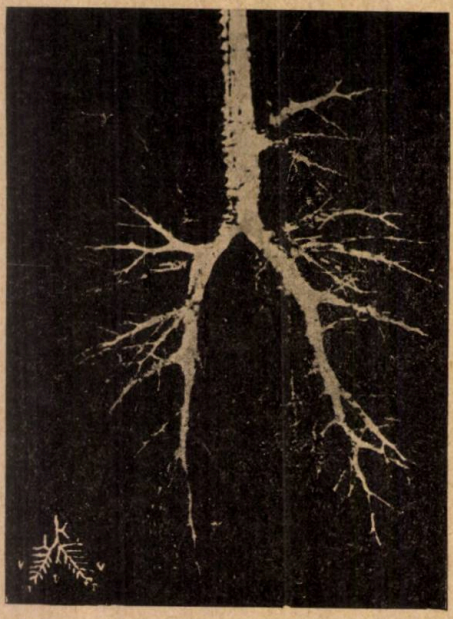


Fig. 3. — L'arbre bronchique du boeuf. (Dissection).

3. Le troisième groupe le plus réduit, est formé par une seule éspèce: le cobaye. L'arbre bronchique se compose dans les deux poumons d'une bronche lobaire antérieure, une bronche lobaire infra-cardiaque, 4 bronches dorsales, 4 bronches ventrales, un bouquet terminal et 2—5 bronches complémentaires. Dans le poumon droit on trouve encore une bronche lobaire moyenne (fig. 6).

Les premières deux groupes présentent une ramification bronchique qui nous montre d'une façon évidente que l'asymétrie macroscopique des 2 poumons a son origine dans une asymétrie bronchique (fig. 1, 2, 3, 4 et 5). Le seul animal où nous pouvons établir une homologie entre les deux poumons c'est le cobaye (fig. 6). Chez cet animal, tenant compte du fait que les deux poumons ont un lobe infra-cardiaque et le lobe antérieur gauche divisé dans une portion apicale et une portion cardiaque, nous pouvons admettre qu'il y a une symétrie tant macro-scopique que bronchique.

L'affirmation de Coulouma et Dévos que l'arbre bronchique chez les mammifères, dans les deux poumons est pareil et contient, 4 collatérales ventrales, 4 dorsales, une bronche infra-cardiaque et une collatérale supérieure, est très différente de nos constatations.

Il est vrai, que la bronche lobaire supérieure de l'homme, synonyme à la bronche lobaire antérieure des animaux, chez les ruminants et les porcins prend naissance sur la trachée. Mais elle présente aussi 2 rameaux comme la bronche lobaire antérieure gauche qui prend naissance sur le

tronc souche et qu'ils considérent comme résultant de la concrescence de la première bronche ventrale avec la bronche apicale. Chez les ruminants, spécialement, ces deux rameaux sont très développés et s'extériorisent par deux lobes apicale et cardiaque antero-externe, sem-

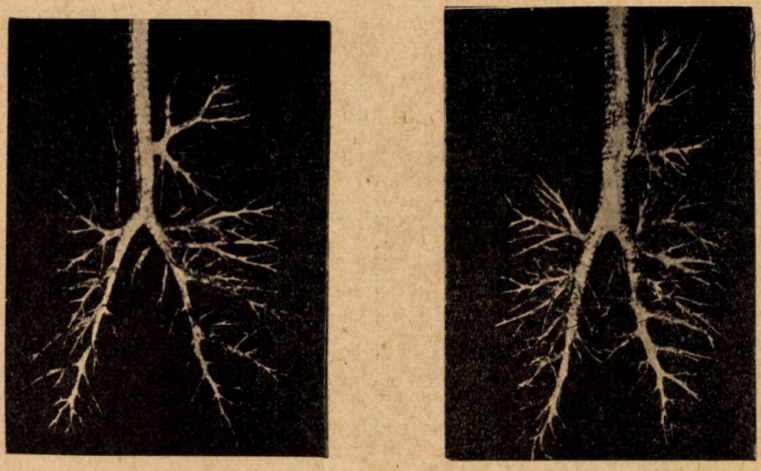


Fig. 4. — L'arbre bronchique de la chèvre et du mouton. (Dissection).

blables aux lobes apicale et cardiaque determinés par la bronche lobaire antérieure gauche. Donc, il ne s'agit pas de la concrescence de la bronche gauche, tant qu'elle a la même composition à droite qu'à gauche. Il en résulte donc que la bronche lobaire médiane et la bronche lobaire

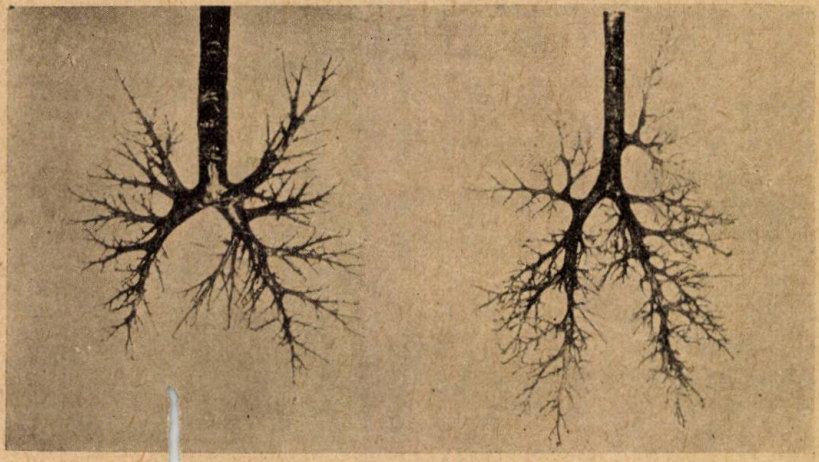


Fig. 5. — L'arbre bronchique du chien et du porc. (Dissection).

infra-cardiaque se trouvent seulement dans le poumon droit et n'ont pas des correspondantes dans le poumon gauche.

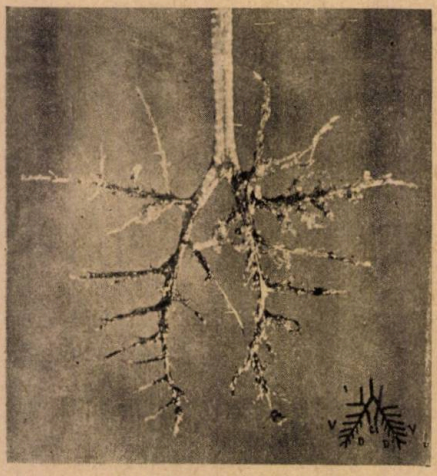


Fig. 6. — L'arbre bronchique du cobaye. (Dissection).

Chez les solipèdes de même, les 2 bronches lobaires sont semblables dans les deux poumons et l'asymétrie est déterminée par la bronche lobaire infra-cardiaque, qui n'a aucune correspondante dans le poumon gauche.

L'existence des para-bronches décrites chez l'homme ne peut pas être mise en évidence chez les animaux domestiques, à l'exception de la bronche infra-cardiaque, que nous considérons comme bronche lobaire constante, avec un rôle et un territoire d'aération aussi important que celui des autres bronches constantes. En tout cas d'après leur siège et leur direction, elles ne correspondent pas aux bronches complémentaires décrites par nous chez les animaux domestiques.

Chaque bronche primaire par ses collatérales, détermine dans les poumons des territoires d'aération bien distincts. Ces territoires, nommés *zones*, ont un pédicule broncho-vasculo-nerveux propre, qui leur imprime une autonomie non seulement anatomique et physiologique, mais aussi pathologique (fig. 7 et 8).

Les zones pulmonaires sont séparées les unes par des scissures et constituent des lobes, les autres sont séparées par de parois conjonctivo-élastiques, bien distincts, chez les bovines et les porcins, moins distincts chez les ovines, les carnivores et les rongeurs, et presque imperceptibles par dissection chez les solipèdes. Les

Fig. 7. — Poumons de boeuf. Dissection des zones dorsales.

parois inter-zonaires quelquefois peuvent être substitués par des scissures donnant naissance à des lobes nouveaux, nommés lobes surnuméraires.

Nous avons préconisé la systématisation zonaire du poumon d'après les ramifications bronchiques primaires. Une systématisation zonaire d'après les ramifications secondaires ou même tertiaires est possible chez les carnivores, les rongeurs et surtout chez les ruminants et les porcins. Mais par une telle systématisation nous produisons une segmentation trop grande des poumons, qui n'aura pas une autonomie anatomo-physiologique et qui rendra difficile le diagnostique topographique des lésions, au point de vue clinique, que anatomo-pathologique.

La ségmentation zonaire du poumon est subordonnée presque toujours aux ramifications bronchiques. Tenant compte que l'arbre bronchique, chez les animaux est différent de celui décrit chez l'homme, les zones pulmonaires seront aussi différentes.

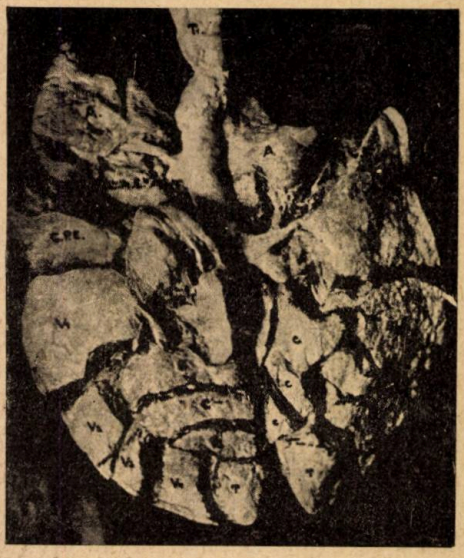


Fig. 8. — Poumons de bœuf. Dissection des zones diaphragmatiques.

La systématisation zonaire des poumons nous montre — en plein accord avec l'arbre bronchique — que l'asymétrie pulmonaire n'est pas seulement apparente, mais réelle, tant à l'égard du parenchyme qu'à l'égard des divisions bronchiques (fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8).

L'asymétrie pulmonaire, avec la variation des zones, qui existe entre les poumons de différentes éspèces animales, s'observe très bien dans le tableau Nr. 1 et la fig. 7 et 8.

La connaissance des zones pulmonaires nous permet d'identifier par l'auscultation et par la radiographie, le siège précis des lésions pulmonaires. Elle nous permet aussi d'établir au point de vue clinique, comme du point de vue anatomo-pathologique, quelles sont les zones plus fréquemment atteintes dans les différentes affections pulmonaires, microbiennes et parasitaires.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

1. La distribution des ramifications bronchiques intra-pulmonaires chez tous les animaux domestiques se fait autour d'un tronc souche.

Elles présentent des variations numériques d'un poumon à l'autre qui provoquent une asymétrie bronchique assez évidente entre les deux poumons.

2. La systématisation des ramifications bronchiques décrite chez l'homme ne peut pas être appliquée aux poumons des animaux, car elle ne peut pas englober toutes les collatérales que présente le tronc souche.

3. Les collatérales primaires des troncs souches sont: constantes ou principales et inconstantes ou complémentaires. Leur nombre varie, d'un poumon à l'autre et d'un animal à l'autre, mais leur direction et leur étendue se maintiennent les mêmes. Les collatérales constantes que nous trouvons sont: les bronches lobaires antérieures, ou apicales chez les solipèdes, la bronche lobaire moyenne, la bronche lobaire post-cardiaque ou infra-cardiaque, les 4 bronches dorsales, les 4 broches ventrales et les bouquets terminaux. Les collatérales inconstantes ordinairement sont: les bronches complémentaires internes et les bronches complémentaires inférieures.

4. Les ramifications bronchiques primaires déterminent dans chaque poumon des zones d'aération autonomes du point de vue anatomiques et physiologiques. Elles sont séparées les unes des autres soit par des scissures, soit par les parois conjonctivo-élastiques plus ou moins distinctes.

5. La systématisation zonaire de poumon concorde avec l'arbre bronchique pour nous prouver que les deux poumons sont asymétriques aussi bien par le parenchyme que par les divisions bronchiques.

TABLEAU RESUMATIF DE LA SYSTÉMATISATION DES ZONES PULMONAIRES

Les lobes pulmonaires	Le nome des zones											
	Solipèdes		Ruminants		Porcins		Carnivores		Rongeurs			
									Lapins		Cobays	
	P. gauche	P. droit	P. gauche	P. droit	P. gauche	P. droit	P. gauche	P. droit	P. gauche	P. droit	P. gauche	P. droit
Le lobe antérieur	Z. apicale A.	Z. apicale A.	Z. apicale A. Z. cardiaque externe C. E.	Z. apicale A. Z. cardiaque antero-externe C. A. E.	Z. apicale A. Z. cardiaque externe C.E.	Z. apicale A.	Z. apicale A. Z. cardiaque externe C. E.	Z. apicale A.	Z. apicale A. Z. cardiaque externe C.E.	Z. apicale A.	Z. apicale A. Z. cardiaque externe C. E.	Z. apicale A.
Le lobe moyen	—	—	—	Z. cardiaque postéro-externe C.P.E.	—	Z. cardiaque externe C.E.	—	Z. cardiaque externe C.E.	—	Z. cardiaque externe C.E.	—	Z. cardiaque externe C.E.
Le lobe infra-cardiaque (Azygos)	—	Z. cardiaque interne C.I.	—	Z. cardiaque interne C.I.	—	Z. cardiaque interne C.I.	—	Z. cardiaque interne C.I.	—	Z. cardiaque interne C.I.	Z. cardiaque interne C.I.	Z. cardiaque interne C. I.
Le lobe postérieur	Zone dorsale antérieure D_1 » » antéro-médiane D_2 » » postéro-médiane D_3 » » postéreure D_4 » terminale T.	} Étage supérieur										
	Zone ventrale antérieure V_1 » » antéro-médiane V_2 » » postéro-médiane V_3 » » postérieure V_4 » complémentaire C.	} Étage inférieur										

621 ÉLECTROTECHNIQUE

ERWÄRMUNGSBERECHNUNG ELEKTRISCHER KONTAKTE

Differentialgleichung, Anfangs- und Randbedingungen

von **A. Avramescu**

Übersicht. *Nachdem in einem vorangegangenen Aufsatz das technische, physikalische und rechnerische Problem der Erwärmungsberechnung elektrischer Kontakte dargestellt und an Hand von Schrifttumangaben besprochen wurde, wendet sich der Verfasser im vorliegenden Aufsatz zu einer Betrachtung der analytischen Rechnungsmethoden. Da die Kontakterwärmung im Grunde genommen ein Wärmeleitungsproblem ist, so spielt hierbei die gesamte analytische Theorie der Wärme eine bedeutende Rolle. Die Differentialgleichungen, die von den speziellen Aufgaben der Kontakterwärmung bedingt sind, werden zusammengestellt und die vorkommenden Rand- und Anfangsbedingungen aufgezeigt. Auf Grund dieser Zusammenstellung kann man die besonderen Aufgaben der Erwärmungsrechnung in Angriff nehmen.*

In einer vorangegangenen Arbeit[1]) wurden die Schwierigkeiten der naturgetreuen mathematischen Formulierung des Erwärmungsproblems elektrischer Kontakte geschildert. Eingehende physikalische Untersuchungen zeigen, dass in der Kontaktschicht mit einem höheren Widerstand zu rechnen ist, als im Leiter gleichen Querschnittes. Obwohl nachgewiesen wurde, dass in den wahren Berührungspunkten die metallische Leitfähigkeit voll erhalten bleibt und der Widerstand nur durch die Einschnürung der Stromlinien (« Engewiderstand ») gebildet wird, so ist praktisch der Fall der rein metallischen Leitung in den Kontakten sehr selten. Es kann stets mit dem Vorhandensein einer noch so dünnen Fremdschicht gerechnet werden, die einen Übergangswiderstand erzeugt und den gesamten Kontaktwiderstand erhöht.

[1]) Diese *Mitt.* 12 (1941), Nr. 1—2, S. 167—174.

Beim Durchgang starker Ströme erwärmt sich die Kontaktstelle schneller, als der Leiter selbst und kann beträchtliche Temperaturwerte annehmen. Als Folge des Temperaturunterschiedes zwischen Kontaktstelle, Leiter und Umgebung ist stets mit einer Bewegung der Wärme zu rechnen. Der einsetzende Wärmeausgleich kann am besten mathematisch verfolgt werden und in den folgenden soll gezeigt werden, wie Erwärmungsprobleme elektrischer Kontakte rechnerisch zu formulieren sind. Dabei sollen die Grenzen der mathematischen Behandlungsmethode stets vor Augen geführt werden, damit nach der Ableitung der Lösungen, diese auf die praktischen Verhältnisse richtig übertragen werden können. Ausgehend vom allgemeinsten Fall sollen die Einschränkungen, die eine klare und einfache Rechnung verlangt, schrittweise angebracht werden, um in der Folge zur vollständigen Berechnung einiger nicht allgemein bekannter Anordnungen zu kommen.

ABLEITUNG DER WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG

Elektrische Kontakte entstehen an den Berührungsstellen zweier metallischer Leiter. Die Wärme bewegt sich also hauptsächlich in festen Körpern, kann aber von diesen auf eine umgebende Flüssigkeit (Öl) oder Gas (Luft) übergehen. Über den Kontaktkörper selbst können wir von vornherein drei Annahmen machen, die vollends erfüllt werden: dass sie feste, homogene und isotrope Körper sind. Letztere Eigenschaft will zum Ausdruck bringen, dass die Wärmebewegung keine Richtung bevorzugt. Die Bewegung der Wärme in diesen Körpern erfolgt durch Wärmeleitung und zwar, gemäss dem II Hauptsatz der Thermodynamik, immer von Stellen mit höheren Temperaturen nach solchen mit niedrigeren hin.

Bei der analytischen Behandlung der Wärmeleitungsprobleme brauchen wir betreffend das Wesen der Wärme zunächst keine Annahme zu machen, etwa in der Form, wie die Moleküle ihre diskrete Wärmebewegung auf benachbarte Moleküle übertragen; wir können vielmehr die Wärme als eine masselose Materie annehmen.

Die Wärmebewegung wird durch das Grundgesetz der Wärmeleitung (zugleich III Hauptsatz der Thermodynamik) beschrieben. Dieser, zuerst von Fourier formulierte Grundsatz beruht auf einer, durch physikalische Messungen bestätigte Erfahrungstatsache, die im allgemeinen folgendermassen auszusprechen ist: die durch eine ebene Wand hindurchströmende Wärme ist im stationärem Zustande verhältnissgleich dem Temperaturunterschied an beiden Seiten der Wand, der Grösse der Wandfläche, der Zeit und einem Stoffwert, der sogenannten Wärmeleitfähigkeit, und umgekehrt proportional der

Wanddicke. Auf Grund des nebenstehenden Bildes hat FOURIER diese Gesetzmässigkeit wie folgt formuliert:

$$Q = \lambda \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\delta} . F . t \qquad (1)$$

Die Einheiten der hier vorkommenden Grössen sind aus der Tafel I zu entnehmen.

Um dieses Gesetz zu verallgemeinern, denken wir uns an einer beliebigen Stelle eines Körpers ein elementares Flächenstück ∂F und in der Entfernung ∂n ein gleichgrosses. Der Temperaturunterschied zwischen diesen zwei Flächen sei $\partial \vartheta$. Dann fliesst in Richtung der fallenden Temperatur ein Wärmebetrag von

$$dQ = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} . \partial F . \partial t \qquad (2)$$

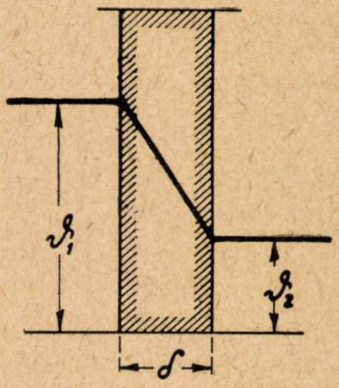


Bild. 1. — Stationäre Wärmeströmung durch eine ebene Wand (FOURIER).

TAFEL I

Bezeichnungen und Einheiten

Grösse	Bezeichnung	Physikalische Einheit	Technische Einheit	Elektrische Einheit
Wärmemenge	Q	cal	kcal	Ws
Querschnitt	F	cm^2	m^2	cm^2
Entfernung	x, n, δ	cm	m	cm
Temperatur	ϑ	°C	°C	°C
Wärmeleitfähigkeit . . .	λ	cal/s.cm°C	kcal/h.m°C	W/cm°C

Wenn wir die gerichtete Grösse $\frac{\partial Q}{\partial F . \partial t}$, die Wärmestromdichte mit G bezeichnen, so folgt, in vektorieller Schreibweise der allgemeine Ausdruck

$$G = -\lambda . \mathrm{grad} \vartheta \qquad (3)$$

dessen Ähnlichkeit mit dem allgemeinen Ohmschen Gesetz auffallend ist.

Die Wärmeleitfähigkeit λ ist eine skalare Grösse und gibt die Wärmemenge an, die bei 1° Temperaturunterschied durch einen Zylinder von 1 cm² Querschnitt und 1 cm Länge in einer Sekunde hindurchgeht. Nur durch obige Gleichung definiert, ist λ ein Stoffwert, der im allgemeinen selbst von der Temperatur abhängt.

Hat die Fläche F eine endliche Ausdehnung, so ergibt sich die in der Zeiteinheit durchfliessende Wärmemenge durch Integration aus:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\int_F (\lambda . \operatorname{grad} \vartheta)\, \partial F \qquad (4)$$

Wird die Zeit von $t = 0$ bis $t = t$ betrachtet, so ist die gesamte Durchflusswärme:

$$Q = -\int_0^t \partial t \int_F (\lambda \operatorname{grad} \vartheta)\, \partial F. \qquad (5)$$

Die Wärmeströmungsverhältnisse können also aus dem zeitlichen und räumlichen Temperaturfeld berechnet werden.

TAFEL II

Bezeichnungen und Einheiten

Grösse	Bezeichn.	Physikalische Einheit	Technische Einheit	Elektrische Einheit
Spezifische Wärme	c	cal/g°C	kcal/kg°C	Ws/g °C
Spezifisches Gewicht. . . .	γ	g/cm³	kg/m³	g/cm³
Wärmestrom	$G.dF$	cal/s	kcal/h	W
Wärmestromdichte	G	cal/s cm²	kcal/h m²	W/cm²
Quelldichte	W	cal/s cm³	kcal/h m³	W/cm³
Temperaturleitfähigkeit . .	a	cm²/s	m²/h	cm²/s
Volumen	V	cm³	m³	cm³
el. Strom	I	A	A	A
el. Stromdichte	i	A/cm²	A/m²	A/mm²
el. Widerstand	R	Ω	Ω	Ω
spezifischer Widerstand . .	ρ	Ω cm	Ω mm²/m	Ω mm²/m
el. Leitfähigkeit	σ	Siemens/cm	Siem. m/m²	Siem. m/m·
Wärmeübergangszahl . . .	α	cal/s cm² °C	kcal/h m² °C	W/cm² °C
relative Wärmeübergangszahl	h	1/cm	1/m	1/cm

In den letzten Beziehungen ist die Wärmeleitfähigkeit eine Vektorfunktion. Der Körper kann also auch inhomogen und anisotrop sein. Für isotrope Körper wird λ zu einer skalaren Ortsfunktion. Wenn λ

eine Konstante wäre, also für isotrope und homogene Körper, könnte es vor das Integral treten. Die Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit von der Temperatur soll in einem nächsten Abschnitt behandelt werden.

ABLEITUNG DER DIFFERENTIALGLEICHUNG

Die Differentialgleichung der Wärmeleitung kann nunmehr unschwer abgeleitet werden. Wir betrachten zunächst die Gleichung für den einfachen Fall der linearen Wärmeleitung, um dann ganz allgemein mit der Vektorrechnung vorzugehen.

Bei nichtstationärer Wärmeleitung drückt die Differentialgleichung eine Wärmebilanz aus. Aus der in einem Volumelement erzeugten Wärme ∂Q_1 verbleibt ein Anteil ∂Q_2 im Volumelement selbst und erhöht seine Temperatur, ein anderer Anteil ∂Q_3 strömt durch die Oberfläche des Elementes nach aussen ab. Die Bilanz lautet:

$$dQ_1 = dQ_2 + dQ_3 \qquad (6)$$

Wir müssen nun die einzelnen Teile ausdrücken. Dazu sei zunächst ein Elementarzylinder mit der Querschnittsfläche F und der Länge ∂x betrachtet (Bild 2).

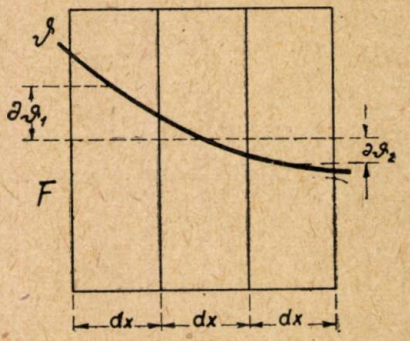


Bild. 2. — Nichtstationäre lineare Wärmeleitung.

Die Wärmequellen sind in unserem Falle allein der Wirkung des elektrischen Stromes zuzuschreiben und ihre Ergiebigkeit durch das *Joule*'sche Gesetz bedingt. Sei die Quelldichte d. h. die je Raum- und Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge gleich W, dann gilt

$$W = \frac{I^2 \partial R}{\partial V}.$$

Im linearen Falle ist $\partial V = F.\partial x$ weiter $\partial R = \rho \frac{\partial x}{F}$, worin ρ in Ω cm einzusetzen ist, und wenn wir die Stromdichte $i = I/F$ in A/cm^2 einführen:

$$W = \frac{I^2 . \rho . \partial x}{F . \partial x . F} = i^2 \rho.$$

Es lässt sich zeigen, dass dieser Ausdruck, in dem nur spezifische Grössen vorkommen auch für räumliche Anordnungen seine Form beibehält.

Wir haben also:

$$\partial Q_1 = i^2 . \varrho . \partial x . F . \partial t. \tag{7}$$

Die aufgespeicherte Wärmemenge erhöht die Temperatur des Elementarzylinders in der Zeiteinheit um $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$. Die dabei gebundene Wärme ergibt sich aus dem Gesetz der Wärmekapazität zu:

$$\partial Q_2 = c . \gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial t} . \partial x . F . \partial t. \tag{8}$$

Die Einheiten der hier aufgeführten Grössen sind in der Tafel II enthalten. Dabei ist noch zu bemerken, dass sowohl c wie γ im allgemeinen von der Temperatur abhängen, was weiter eingehender besprochen wird.

Aus dem Elementarzylinder strömt der Überschuss an Wärme heraus. Wie wir schon in der Gleichung (1) gesehen haben, ist die durch ein Volumelement $F\partial x$ fliessende Wärme gleich

$$\partial Q = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} . F . \partial t.$$

Bei nichtstationärer Strömung fliesst mehr Wärme ein als aus, oder umgekehrt. Der Überschuss ist durch das Differential nach x gegeben:

$$\partial Q_3 = -\lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} . F . \partial x . \partial t. \tag{9}$$

Wir haben jetzt die Ausdrücke (7), (8), (9) nur in die Bilanzgleichung (6) einzusetzen und erhalten nach Kürzung mit F, ∂x und ∂t die Gleichung

$$c . \gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = i^2 \varrho + \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} .$$

Setzen wir noch

$$\frac{\lambda}{c\gamma} = a$$

so ergibt sich

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{i^2 \varrho}{c\gamma} \tag{10}$$

die Differentialgleichung der linearen Wärmeströmung.

Sind in einem Bereich keine Wärmequellen vorhanden, so ist $W=0$ also $i = 0$ und wir erhalten die klassische FOURIER-Form der Differentialgleichnung:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \tag{11}$$

eine lineare partielle Differentialgleichung 2-ter Ordnung, vom sogenannten parabolischen Typ.

Die Gleichung besagt, dass die zeitliche Änderung der Temperatur in einem Querschnitt verhältnisgleich der räumlichen Änderung des Temperaturgradienten in der unmittelbaren Nähe des Querschnittes ist. Der Proportionalitätsfaktor $a = \lambda/c\gamma$ heisst Temperaturleitfähigkeit und hat die Dimension cm^2/s oder m^2/h. Der Wert leitet sich aus den entsprechenden Werten von λ, c und γ ab, ist also ein neuer Stoffwert, wenngleich sinngemäss von der Temperatur abhängig. Man nimmt im allgemeinen a als konstant an, wodurch erst die Gleichung (11) eine lineare Differentialgleichung wird.

Wir wollen nun diese Differentialgleichung mit Hilfe der Vektorrechnung verallgemeinern. Die Quellen sollen irgendwelche Natur haben.

Fassen wir ein elementares Volumelement ∂V ins Auge, und schreiben die Wärmebilanz Gl. (6) auf, so wird:

$$\partial Q_1 = W . \partial V . \partial t$$

$$\partial Q_2 = c . \gamma . \frac{\partial \vartheta}{\partial t} . \partial V . \partial t.$$

Die aus ∂V austretende Wärmemenge bestimmt sich aus dem Wert des Gradienten an der Oberfläche des Volumelementes:

$$\partial Q_3 = -\partial t \int_f \lambda \operatorname{grad} \vartheta . \partial f.$$

Wir müssen das Oberflächenintegral mit einem Volumintegral ausdrücken, um einen Vergleich mit den anderen Komponenten der Bilanz zu haben. Dazu verhilft der GAUSS'sche Integralsatz:

$$\int_f \operatorname{grad} \vartheta \, \partial f = \operatorname{div} (\operatorname{grad} \vartheta) . \partial V. \tag{12}$$

Es ist also:

$$\partial Q_3 = -\operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} \vartheta) . \partial V . \partial t.$$

Die Wärmebilanz liefert nun:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a.\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}\vartheta) + \frac{W}{c.\gamma}. \tag{13}$$

Wenn der Stoff anisotrop ist, wie das bei vielen Kristallen der Fall ist, so fällt die Richtung des Wärmestromes nicht mit grad ϑ zusammen. An Stelle von λ tritt ein Tensor, der meist symmetrisch ist. Bei isotropen Körpern lässt sich die rechte Seite der Gleichung (12) mit Hilfe des Laplace'schen Differentialoperators Δ ausdrücken.

$$\int_f \operatorname{grad}\vartheta . \partial f = \Delta\vartheta . \partial V. \tag{14}$$

Es ist also $$\partial Q_3 = -\lambda \Delta\vartheta . \partial V . \partial t$$

und die Wärmebilanz ergibt:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a\Delta\vartheta + \frac{W}{c\gamma} \tag{15}$$

d. i. die allgemeine Form der Differentialgleichung der Wärmeleitung mit konstanten Koeffizienten. Diese Gleichung besagt ganz allgemein, dass der zeitliche Temperaturanstieg von der räumlichen Verteilung des Feldes und von der Quelldichte abhängt.

Der Differentialoperator Δ nimmt je nach dem gewählten Koordonatensystem verschiedene Formen an. Für rechtwinklige Raumkoordinaten ist:

$$\Delta\vartheta = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} \tag{16 a}$$

für allgemeine Zylinderkoordinaten r, φ, z:

$$\Delta\vartheta = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} \tag{16 b}$$

im zylindrisch-symetrischen Falle:

$$\Delta\vartheta = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r} \tag{16 c}$$

für allgemeine Kugelkoordonaten r, ψ und φ:

$$\Delta\vartheta = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\psi^2} + \frac{\cos\psi}{r^2\sin\psi} + \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\frac{1}{r^2\sin^2\psi}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varphi^2} \tag{16 d}$$

oder im kugelsymmetrischen Falle:

$$\Delta\vartheta = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}. \tag{16 e}$$

Es ist leicht einzusehen, dass die Lösung der Differentialgleichung je nach der gewählten Anordnung andere Formen annimmt.

Zwischen dem Potentialfeld des elektrischen Stromes und dem durch Stromwärme bedingten Temperaturfeld bestehen enge Beziehungen. Bezeichnet man das Potential des elektrischen Feldes mit u so ist wegen $\sigma \,.\, \text{grad}\ u = i$

$$W = i^2 \rho = \sigma\ (\text{grad}\ u)^2 \tag{17}$$

worin $\sigma = \frac{1}{\rho}$ die elektrische Leitfähigkeit in Siemens/cm ist. Die allgemeine Differentialgleichung wird dann:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a\ \text{div}\ \text{grad}\ \vartheta + \frac{\sigma}{c\gamma}(\text{grad}\ u)^2\,. \tag{18}$$

Da wegen der Quellenfreiheit des elektrischen Stromes

$$\text{div}\,(\sigma \,.\, \text{grad}\ u) = 0$$

ist, so kann man obige Gleichung schreiben:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a\ \text{div}\,\{\text{grad}\ \vartheta + b\,.\,u\ \text{grad}\ u\} \tag{19}$$

worin noch $b = \frac{\sigma}{\lambda}$ gesetzt ist.

In stationärem Zustande überdecken sich also die Feldlinien der Wärme- und des elektrischen Stromes. Dieser Zustand folgt aus der Gleichung, wenn man $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$ setzt:

$$\text{div}\,\{\text{grad}\ \vartheta + b\,.\,u\ \text{grad}\ u\} = 0.$$

Bei homogenen und isotropen Körpern bleibt daraus die Poisson'sche Differentialgleichung:

$$\Delta\vartheta + \frac{i^2 \rho}{c\gamma} = 0. \tag{20}$$

Sind keine Quellen vorhanden, so ist das zweite Glied in der Klammer der Gleichung (19) zu streichen und es bleibt:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a\Delta\vartheta. \tag{21}$$

Im Beharrungzustand ist die linke Seite Null zu setzen und wir haben:

$$\Delta\vartheta = 0 \tag{22}$$

die Laplace'sche Differentialgleichung der Potentialtheorie.

Die allgemeinen Lösungen dieser Differentialgleichungen enthalten gemäss der Theorie drei willkürliche Konstanten, die aus den besonderen Bedingungen des Problems, also aus den Grenzwerten zu bestimmen sind. Die Differentialgleichung ist eben nur eine ganz allgemeine Aussage betreffend die Änderung der Temperatur an einer Stelle und reicht zur Beschreibung des Temperaturfeldes besonderer Anordnungen noch lange nicht aus.

EINIGES ÜBER DIE LÖSUNG DER DIFFERENTIALGLEICHUNG

Wie wir gesehen haben, bedeutet die Lösung der Differentialgleichung noch keineswegs die Lösung eines technischen oder physikalischen Problems. Die allgemeinen Integrale müssen vielmehr bestimmten Bedingungen angepasst werden, die vom Zustand an den Grenzen des betrachtenden Gebietes abhängen und deshalb Grenzbedingungen heissen.

Man unterscheidet physikalisch räumliche Grenzbedingungen oder Randbedingungen und zeitliche Grenzbedingungen oder Anfangsbedingungen. Für die eindeutige Bestimmung der Lösung brauchen wir also ausser der Differentialgleichung drei Grenzbedingungen und zwar sind die meisten physikalischen Randwertaufgaben derart, dass es zwei Randbedingungen und eine Anfangsbedingung zu erfüllen sind, was auch für die Kontaktprobleme zutrifft.

Angesichts der grossen Allgemeinheit der durch partielle Differentialgleichungen bestimmten Beziehungen, ist zu erwarten, dass man leicht zahlreiche Funktionen finden kann, die die Differentialgleichung erfüllen. Dennoch verfügen wir hier nicht mehr über so eindeutige Lösungsmethoden, wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen [1]). Man geht vielmehr von bestimmten Voraussetzungen betreffend die Beschaffenheit der Lösungen aus. So nimmt man an, dass die Lösung ein Produkt aus zwei Funktionen ist, wovon die eine T nur von t, die andere X nur von x abhängt:

$$\vartheta = T.X \tag{23}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass in diesem Falle, bei linearer, nur in der x-Richtung erfolgenden Strömung, als partikuläre Lösungen der Gl. (11) folgende Funktionen:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_{1,2} &= C.e^{-n^2 at + inx} \\ \vartheta_{3,4} &= C.e^{-n^2 at} \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} (nx) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

[1]) R. COURANT u. D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik. **Bd.** II, S. 14—16. Springer, Berlin 1937.

abgeleitet werden können, wobei C und n willkürliche Konstanten sind. Es sind aber auch Lösungen bekannt, die auf diesem Wege nicht ermittelt werden können.

Bei zylindrischer Symmetrie, mit dem LAPLACE-Operator (16 c), entsprechen den Lösungen 3 und 4 des linearen Falles:

$$\begin{aligned} \vartheta_3 &= C.e^{-n^2 at}.\mathrm{J}_0\,(nx) \\ \vartheta_4 &= C.e^{-n^2 at}\ \mathrm{N}_0\,(nx) \end{aligned} \qquad (25)$$

worin J_0 u. N_0 die BESSEL'sche Funktion erster und zweiter [1]) Art und nullter Ordnung sind.

Ebenso ergeben sich als Lösung im kugeligen Falle (16 d) die bekannten Kugelfunktionen. Ist das Feld kugelsymmetrisch, so lässt sich die Differentialgleichung durch die Umformung $u = r.\vartheta$ in die lineare überführen.

Von den partikulären Integralen gelangen wir zur allgemeinen Lösung der Aufgabe dadurch, dass wir die willkürlichen Konstanten so bestimmen, dass die Anfangs- und Randbedingungen erfüllt sind. Dabei erhält man aus den Randbedingungen meist Vorschriften für die Konstanten n (Frequenzfunktionen), die bestimmte Werte n_ν annehmen müssen, damit die Lösung am Rande die Bedingungen erfüllt. Diese Werte lassen sich meist nur durch graphische Lösung einer transzendenten Gleichung angeben. Die bestimmten Werte n_ν heissen Eigenwerte des Problems und die entsprechenden partikulären Integrale Eigenfunktionen. Eigenwerte und Eigenfunktionen sind allen Schwingungsproblemen der Mechanik und Optik charakteristisch [2]).

Die Anfangsbedingung bestimmt die Konstanten C (Amplituden) derart, dass zur Zeit $t = 0$ die vorgeschriebene räumliche Verteilung der Temperatur vorhanden ist.

Betrachtet man die partikulären Integrale (24), so erinnert die Aufgabe der Ermittlung der Frequenz- und Amplitudenwerte sogleich an das jetzt gut bekannte FOURIER'sche Problem, eine bestimmte periodische oder gar nichtperiodische Funktion durch eine Summe von harmonischen Funktionen darzustellen. Für die Berechnung der Amplitudenwerte hat FOURIER schon im Jahre 1828 eindeutige Formeln angegeben.

Die allgemeine Lösung der Randwertaufgabe wird durch die Summierung oder Integration über alle durch Eigenfunktionen ausgedrückten

---

[1]) In enger Beziehung zu den sogenannten NEUMANN'schen Funktionen; vgl. JAHNKE-EMDE: Funktionentafeln. Teubner, Leipzig 1928, S. 93.

[2]) Es ist bekannt, dass in der Wellenmechanik die Ortsbestimmung der Elektronen auf den verschiedenen Bahnen und Schalen der Atomhülle durch Eigenwerte erfolgt.

und mit entsprechenden Konstanten multiplizierten partikulären Integrale gebildet. Der Beweis der Eindeutigkeit der Lösung wird durch die Kontrolle der Erfüllung der Differentialgleichung und sämtlicher Nebenbedingungen erbracht.

Die partikulären Integrale (24) sind nicht die einzigen, die man kennt. Es gibt unter anderen einige sehr wichtige Funktionen, die partikuläre Integrale der Wärmeleitungsgleichung (21) sind, und die Bedingung (23) nicht erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_5 &= \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4at}} \\ \vartheta_6 &= \frac{1}{\sqrt{4a\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4at}} \end{aligned}\right\}. \tag{26}$$

Die Funktionen wurden von KIRCHHOFF als die Hauptlösungen bezeichnet, sind aus der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr bekannt, und erlauben durch die Übereinanderlagerung der einzelnen, an bestimmte (auch Quellen genannte) Ortspunkte gebundenen Lösungen, die Herstellung der, als Quellenintegral bezeichneten, sehr allgemeinen Lösung der Differentialgleichung:

$$\vartheta_7 = \frac{1}{\sqrt{4a\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) . e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4at}} \partial\xi. \tag{27}$$

Die Lösungen (26) sind sehr leicht in eine andere sehr bekannte Form überführbar, nämlich in die GAUSS'sche Fehlerfunktion:

$$\vartheta_8 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4at}}} e^{-\eta^2} \partial\eta \tag{28}$$

die auch eine partikuläre Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist und in allen von ihr beherrschten Randwertproblemen eine wichtige Rolle spielt.

RANDBEDINGUNGEN

Wir unterscheiden drei Arten von Randbedingungen:

a) Randbedingungen erster Art, gekennzeichnet durch das Verschwinden der Feldfunktion, also der Temperatur, am Rande. Das setzt eine Kühlung, also eine Abfuhr von Wärme durch die Grenzfläche voraus.

b) Randbedingungen zweiter Art, gekennzeichnet durch das Verschwinden des Gradienten der Temperatur am Rande. Das ist

physikalisch gleichbedeutend mit dem Verschwinden der Wärmeströmung durch die Grenzfläche.

c) Randbedingungen dritter Art, durch welche eine lineare Beziehung zwischen Temperatur und Gradient am Rande vorgeschrieben wird. Diese Beziehung bestimmt im allgemeinen eine Gesetzmässigkeit für den Austausch der Wärme an der Randfläche zwischen Körper und der Umgebung, also für den Wärmeübergang.

Wärmetechniker wissen, dass der Wärmeübergang ein sehr verwickelter Vorgang ist, dessen mathematische Formulierung bedeutende Schwierigkeiten bereitet. In einem weiteren Kapitel sollen diese Schwierigkeiten näher behandelt werden. Es ist allgemein üblich und wegen der Einfachheit der Rechnung äusserst zweckmässig für den Wärmeübergang das NEWTON'sche Abkühlungsgesetz zu verwenden, das allerdings nur eine rohe Annäherung darstellt. Danach wird angenommen, dass die Wärmemenge ∂Q, die ein Oberflächenelement ∂F von der Temperatur ϑ_0 an die Umgebung von der Temperatur ϑ_1 abgibt, dem Temperaturunterschied $\vartheta_0 - \vartheta_1$, der Fläche ∂F und der Zeit ∂t verhältnisgleich ist, d. h. wir haben

$$\partial Q = \alpha (\vartheta_0 - \vartheta_1)\, \partial F . \partial t, \tag{29}$$

wobei die Wärmeübergangszahl α ein Erfahrungswert ist, deren Einheit aus der obigen Gleichung leicht zu ersehen ist (vgl. Tafel II).

Das Oberflächenelement bezieht diese Wärme aus dem Innern des Körpers durch Leitung. In der unmittelbaren Nähe der Oberfläche haben wir also gemäss dem FOURIER'schen Satz:

$$\partial Q = -\lambda (\operatorname{grad} \vartheta)_0 . \partial F . \partial t.$$

Die Stetigkeit des Wärmestromes an der Oberfläche bedingt die Gleichsetzung beider Ausdrücke für ∂Q, wodurch die am meisten benutzte Randbedingung dritter Art entsteht:

$$(\operatorname{grad} \vartheta)_0 = -\frac{\alpha}{\lambda} (\vartheta_0 - \vartheta_1). \tag{30}$$

An der Oberfläche des Körpers müssen also ϑ_1 und α gegeben sein. Wir bezeichnen die Grösse $h = \frac{\alpha}{\lambda}$ als die relative Wärmeübergangszahl und bemerken, dass sie die reziproke Dimension eine Länge hat (Tafel II). Näheres über die Stoffwerte α und h soll in einem weiteren Kapitel gebracht werden.

Für den linearen Fall wird die Randbedingung dritter Art:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_0 = h (\vartheta_0 - \vartheta_1). \tag{31}$$

Der Index 0 weist auf die Oberfläche hin, die mit dem Querschnitt $x = 0$ zusammenfallen kann.

Eine Abart der dritten Randbedingung entsteht, wenn wir die Zufuhr einer gegebenen Wärmemenge von Aussen her ausdrücken wollen. In diesem Falle geht durch die Begrenzungsfläche ein gewisser Wärmestrom hindurch, dessen Betrag nach Gl. (3) durch den Gradienten längs der Flächennormale gegeben ist. Bei der Erwärmungsberechnung elektrischer Kontakte kommt diese Bedingung oft vor. Die durch den Strom in der Kontaktfläche erzeugte halbe Wärmeleistung $I^2 R_k/2$ fliesst in den einen Kontaktkörper hinein. Die Wärmestromdichte ist dann:

$$G = \frac{I^2 R_k}{2F} \tag{32}$$

und der Gradient an der Kontaktfläche

$$\operatorname{grad} \vartheta = -\frac{I^2 R_k}{2\lambda F}.$$

Anstelle einer Aussage über die Temperatur der Kontaktstelle ist bei Kontaktberechnungen im allgemeinen nur eine solche über die Ableitung der Temperatur möglich.

In einigen Fällen werden die Randbedingungen III-er Art mit in die Differentialgleichung einbezogen. Als Beispiel dazu soll der Fall der Wärmeleitung durch einen Körper gleichen Querschnittes, dessen Umfang M gegen die Länge l klein ist, dienen.

Wenden wir die Wärmebilanz auf einen Elementarzylinder von der Länge ∂x an, so ist das Volumelement $F.\partial x$, dessen Mantelfläche $M.\partial x$ und die durch diese Fläche nach Aussen abgegebene Wärmemenge

$$\partial Q_4 = \alpha (\vartheta_0 - \vartheta_1). M.\partial x.\partial t.$$

Setzen wir die Aussentemperatur $\vartheta_1 = 0$ so lautet die Wärmebilanz

$$\partial Q_1 = \partial Q_2 + \partial Q_3 + \partial Q_4$$

oder eingesetzt:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{c.\gamma.s} \vartheta + \frac{W}{c\gamma}$$

worin noch $F/M = s$ gesetzt wurde.

Für den Beharrungszustand vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} - \frac{h}{s} \vartheta + \frac{W}{\lambda} = 0. \tag{33}$$

Sind keine Wärmequellen vorhanden so bleibt für zeitlich änderliche Felder die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{\gamma . c . s} \vartheta \tag{34}$$

und im Beharrungszustande

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{h}{s} \vartheta. \tag{35}$$

Auch aus diesem Beispiel ist klar zu ersehen, dass die mathematische Ableitung der Ergebnisse notwendigerweise die weitgehende Vereinfachung der physikalischen Vorgänge voraussetzt.

DIE ANFANGSBEDINGUNG

Die Anfangsbedingung bestimmt den Zeitpunkt der Zeitzählung und berichtet über den Zustand, in welchem sich die betrachtete Anordnung zu dieser Zeit befand. Die meisten Angaben beziehen sich auf eine anfängliche räumliche Temperaturverteilung, deren Änderungen aus der Differentialgleichung unter Beachtung der Randbedingungen zu ermitteln sind. Die Lösung der Differentialgleichung muss notwendigerweise der Anfangsbedingung genügen. Gegenüber den Randbedingungen, die meist durch geringfügige Änderungen der Lösungen zu erfüllen sind, bereitet die Anpassung der Lösung an die Anfangsbedingung meist erhebliche Schwierigkeiten. Es ist eine wenig beachtete Tatsache, dass wir die harmonische Analyse FOURIER's eigentlich seinen Bemühungen verdanken, die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung einem beliebigen Anfangszustand anzupassen. Auch wenn der Anfangszustand an und für sich sehr einfach erscheint, wie z. B. das Verschwinden der Temperatur über das ganze Raumgebiet, so ist dieser Zustand durch die partikulären Lösungen nur schwer auszudrücken, was aus den weiteren Ausführungen klar hervorgeht.

Nehmen wir an, dass die Lösungen (24), nachdem sie die Randbedingungen erfüllen, also mit bestimmten Eigenwerten versehen sind, noch einer Anfangsbedingung der Form $\vartheta = \Phi(x)$ bei $t = 0$ angepasst werden sollen. In den Funktionen $\vartheta_\nu = C_\nu . e^{-n_\nu^2 at} . \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} (n_\nu x)$ wird bei $t = 0$ das Exponentialglied zur Einheit und wir müssen die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ durch die Eigenfunktionen

$$\varphi_\nu (x) = A_\nu . \sin (n_\nu x) + B_\nu . \cos (m_\nu x)$$

ausdrücken. Einzelne partikuläre Integrale dieser Form könnten die

Anfangsbedingung schwer erfüllen. Wenn aber n_ν und m_ν die Reihe der ganzen Zahlen durchlaufen würde, so wäre die *Summe* aller φ_ν-Funktionen eine einfache FOURIER'sche Reihe und die Darstellung von $\Phi(x) = \Sigma_\nu \varphi_\nu$ würde mit Hilfe der Regeln der harmonischen Analyse leicht zu lösen.

Die Koeffizienten der Sinus- und Cosinus-Reihe liessen sich aus den bekannten Formeln:

$$A_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) . \sin(nx)\, \partial x$$

$$B_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)\, \cos(x)\, \partial x \qquad (36)$$

berechnen.

Da aber die Eigenwerte n_ν und m_ν, wie oben erwähnt, Lösungen von zwei transzendenten Gleichungen darstellen, so müssen die Koeffizienten A_ν und B_ν besonders «normiert» werden, um die Darstellung einer beliebigen Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ zu erlauben. Es lässt sich leicht zeigen, dass in einem Bereiche $x_1 — x_2$ die Anpassung gelingt, wenn die Koeffizienten aus folgenden «Normierungsformeln» berechnet werden:

$$A_\nu = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x) . \sin(n_\nu x) . \partial x}{\int_{x_1}^{x_2} \sin^2(n_\nu x) . \partial x}$$

$$B_\nu = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x) . \cos(m_\nu x) . \partial x}{\int_{x_1}^{x_2} \cos^2(m_\nu x) . \partial x} \qquad (37)$$

Die Eigenfunktionen φ_ν bilden dann ein sogenanntes normiertes Orthogonalsystem.

Alle damit zusammenhängenden Fragen können in den Werken der höheren Analysis näher eingesehen werden.

Die Nachbildung einer beliebigen Verteilungsfunktion ist nicht nur durch harmonische Funktionen, sondern auch durch BESSEL'sche Zylinderfunktionen oder durch LEGENDRE'sche Kugelfunktionen nach dem

gleichen Vorgang möglich, so dass entsprechende Aufgaben in linearen, zylindrischen oder kugeligen Anordnungen gleichfalls gelöst werden können.

Obige Ausführungen beziehen sich auf die Lösungsmethode durch den Ansatz (23) des Produktes einer reinen Zeit und einer Raumfunktion. In dem allgemeinen Quellenintegral (27) sehen wir eine beliebige Raumfunktion $F(\xi)$, die nichts anderes ist, als die Anfangsverteilung. Die Anpassung der Lösung hängt in diesem Falle nur von der Durchführbarkeit des Integrals ab.

Nach diesen einführenden Ausführungen über die mathematischen Behandlungsmethoden sollen in den nächsten Kapiteln einige konkrete Aufgaben durchgerechnet werden.

621.311.21 CENTRALES HYDROÉLECTRIQUES

WASSERWIRTSCHAFTLICHE BETRACHTUNGEN FÜR DIE DONAUWERKE BEIM EISERNEN TOR

von **D. Pavel**

Für die Kataraktstrecke der Donau beim E—Tor, hat der Verf. bereits im Jahre 1923 einen Ausbauplan bearbeitet und nachträglich vervollständigt. An dieser Stelle werden verschiedene wasserwirtschaftliche Fragen betr. der Energieausnützung und Schiffahrt dieser Strecke kurz behandelt und auf andere Veröffentlichungen hingewiesen [1]).

Die Donau, als wichtigste Wasserstrasse Europas, bildet in der Kataraktstrecke *Baziaş-Eisernes Tor* für die zukünftige Schiffahrt eine natürliche Drosselung, die beseitigt werden muss. Mit dieser Frage ist aber auch die Energiegewinnung eng verbunden, da die Schiffahrtregulierung nur durch die Ausnützung der W-kräfte möglich ist.

Die heutige Schiffahrt auf der Donau erstreckt sich über 2280 km Flusslänge, jedoch wegen den grossen Gefällen, Geschwindigkeiten und der bei N. W. hervorragenden Felsriffe können diese Strecke beim *E-Tor* nur 600 T-Kähne bei Niederwasser befahren. Der Verkehr auf der Donau stieg bereits im Weltkriege auf über 2 Mill. T/J und erreichte vor diesem Kriege rd. 10 Mill. T/J, mit 2880 Schleppkähnen von 1,68 Mill. BRT und 480 Schleppern, ausser den Personendampfern.

Durch die Überwindung dieser und ähnlicher Hindernisse kann die Schiffahrt auf 2000 T. Kähne ausgebaut werden und wir schätzen den zukünftigen Schiffstrafik auf- und abwärts, zu 20 Mill. T/Jahr, wobei

---

[1]) Prof. Dr. Ing. D. I. PAVEL, Plan gén. d'aménagement des forces hydr. en Roumanie, *Inst. Român de Energie (I.R.E.)* No. 58/1933, mit 387 S., 92 Plänen und 27 Abb.

Ausbaumöglichkeit der rum. Wasserkräfte *I.R.E.*, No. 63/1934.

Contribuţii la hidrografia Dunării, *I.R.E.*, No. 153/1938.

Abflusserscheinungen der Donau bei Orşova, Bericht an Rum. Ak. W. 1937.

Zur Wasser- und Energiewirtschaft der Donauwerke, *Bull. I.R.E.* No. 4, 1942.

nur der Getreide-, Petrol- und Kohlentransport 85% des Gesamtverkehrs ausmachen wird. Durch den Ausbau der Wasserkräfte, nach meinem Plan, in 3 Stufen: I. E-Tor, II. *Juți*, III. *Islaz*, können beim Ausbau für 0,95 Q_m, d. h. unter der Mittelwassermenge, $P_a = 870.000$ kW (min. 408.200, mittl. 751.693 kW) und $E = 6500$ Mill. kWh/J (min.

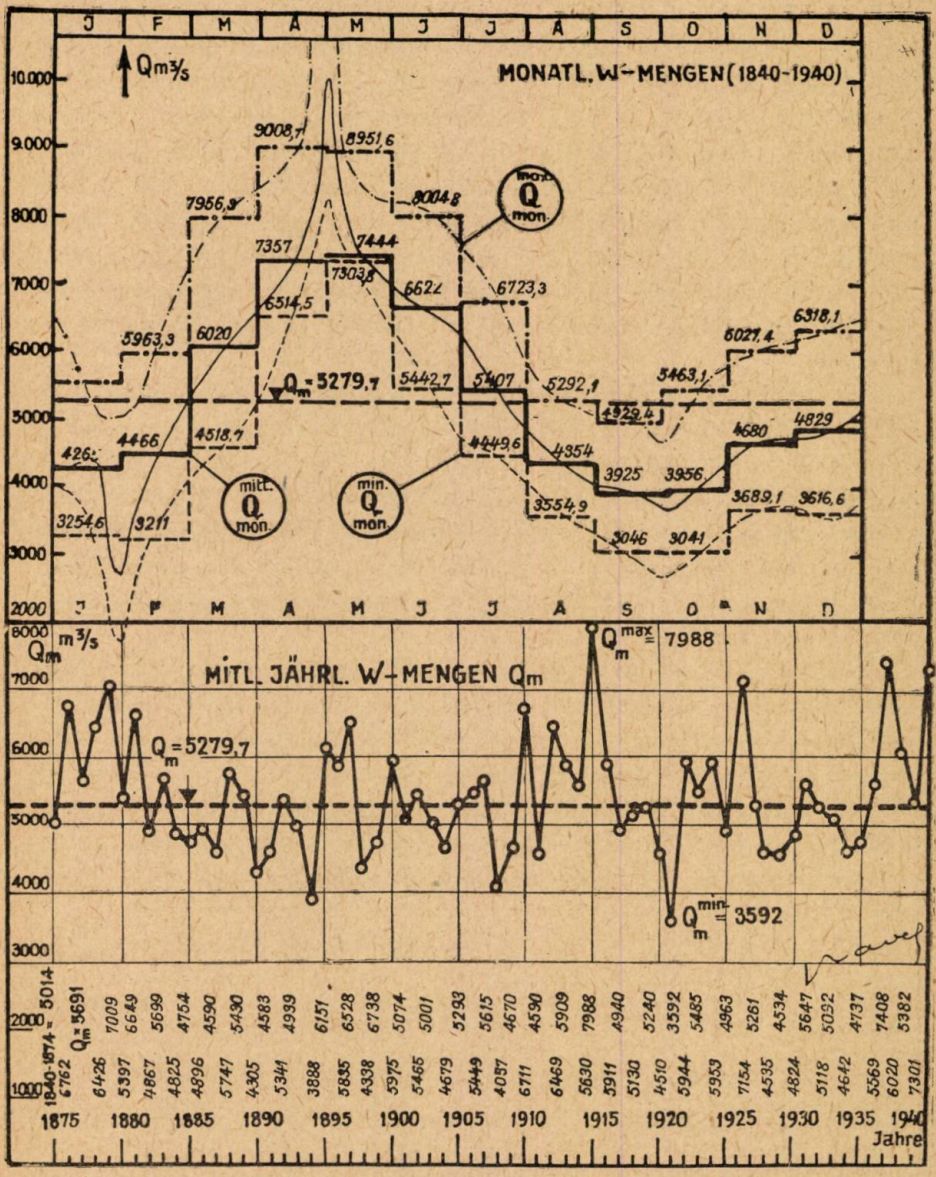


Abb. 1. — Oben: Monatl. Wassermengen für 100 Jahre mit Grenzwerten. Unten: Mittl. jährliche Wassermengen der Donau bei Orșova.

5200, max. 7500) erzeugt werden. Diese riesigen Energiemengen sind zugleich äusserst wirtschaftlich und nur durch den Absatz kann auch die Wirtschaftlichkeit der Schiffahrtregulierung gesichert werden.

KURZE BESCHREIBUNG DER 3 DONAUWERKE

Kraftwerk I. « *Eis. Tor* » (km 130,5 ab *Baziaş*): *Krafthaus* für P = 330.000 kW, $H = 5{,}5 - 10$, 15 m, $Q_a = 5000$ m³/S, ist 400 m lang, liegt am linken Ufer, und enthält 12 Propellerturbinen von je: 39.356 PS, 55,6 T/Min, $n_s = 610 - 967$, gekuppelt mit Drehstromgeneratoren je 34.000 kVA, 10 kV, 50 Hz. Die *Wehranlage*, in der Flussmitte, von 430 Länge enthält 8 Walzenwehre von je 45 ml und 10 m Stauhöhe. Die *Schleuse*, am rechten Ufer, besteht aus 2 Kammern von 270 × 26 m und 3,55 m Tiefe beim allerkleinsten Wasserspiegel. Über dieses Kraftwerk führt eine Eisenbahn- und Strassenverbindung vom rumänischen zum serbischen Ufer. Die *Freiluft-Umformeranlage*, am linken Ufer, von 10/220/380 kV, ist mit denen der Werke II und III parallelgeschaltet.

Kraftwerk II. « *Juţi* » (km 86,5): *Krafthaus*, am rechten Ufer schräg zur Stromachse verlegt, für P_a = 300.000 kW, $H = 4{,}5 - 8{,}7$ m, $Q_a = 5070$ m³/S, 480 m lang, enthält: 14 Propellerturbinen von je 30.590 PS, 51,7 T/Min, $n_s = 604$—928, gekuppelt an Drehstromgeneratoren von je 21.429 kW (27.000 kVA), 10 kV, 50 Hz. Die *Wehranlage*, von 705 m Länge, enthält 13 Walzenwehre, ähnlich denen der Werke I und III, d. h. 45 × 10 m Walzen. Die *Doppelschleuse* ist gleich denen der Werke I und III.

Kraftwerk III. « *Islaz* » (70,9 km): *Krafthaus* 519 m lang, am rechten Ufer, mit P_a = 240.000 kW, $H = 4{,}92 - 6{,}35$ m, $Q_a = 5070$ m³/S, enthält 18 Propellerturbinen von je 19.036 PS, 55,6 T/Min, n_s=761—916, gekuppelt mit Drehstromgeneratoren von je 13.334 kW (17.000 kVA), 10 kV, 50 Hz. Die *Wehranlage* ist genau gleich derjenigen von I, d. h. 8 Walzen je 45 × 10 m, desgleichen für die Doppelschleuse.

Die Baukosten habe ich angenähert vorangeschlagt:

Kraftwerk	I. E—Tor	II. Juţi	III. Islaz	Zusammen
				Mill. RM
Walzenwehre	46	74	43	163
Krafthaus	60	65	68	193
Turb, Gen, el. Anlagen	42	47	45	134
Doppelschleuse	16	16	16	48
Ufermauern. Regulierungen	10	8	12	30
Vorarb. Bauzinsen	16	17	15	48
Unvorhergesehen	20	23	21	64
Gesamtkosten	210	250	220	680

ABFLUSSVERHÄLTNISSE DER DONAU BEI ORȘOVA

Das Einzugsgebiet der Donau bei *Orșova* (kurz vor dem E-Tor) beträgt F = 576.332 km² und besteht aus rd. 30% alpinen, 30% karpathinen, 20% dalmatinen und 20% Tiefland Teilgebieten, demzufolge ist die Wasserführung natürlicherweise sehr ausgeglichen, was einen Vorteil für die Energiewirtschaft bedeutet. In anderen Arbeiten habe ich eine ausführliche Statistik der täglichen Wassermengen für 100 Jahre (1840—1940) veröffentlicht und gebe, wegen Platzmangel in Abb. 1 nur die mittl. W-mengen für eine lange Jahresreihe und in der oberen Hälfte die mittleren monatlichen W-mengen und deren äusserste Grenzwerte. Es betragen die:

mittl. jährl. W-menge (1840—1940)	$Q_m = 5279{,}7$ m³/S.
äusserste Schwankung	$Q_{max}^{max} : Q_{min}^{min} = 10{,}25$
grösste und kleinste zur mittleren	$Q_{max}^{max} : Q_m = 3{,}24$; $Q_{min}^{min} : Q_m = 0{,}316$
desgl. für Mittelwerte	$Q_m^{max} : Q_m = 1{,}514$; $Q_m^{min} : Q_m = 0{,}681$
mittl. Abflussbeiwert	$\sigma_m = 0{,}368$
äusserste zur mittl.	$\sigma_m^{max} : \sigma_m = 1{,}27$; $\sigma_m^{min} : \sigma_m = 0{,}818$
spez. Wassermengen	$q_{max}^{max} = 29{,}7$; $q_{min}^{min} = 2{,}9$; $q_m = 9{,}16$ L/S. km²

Die Dauerlinie der Wassermengen, Fallhöhen und Leistungen ist in Abb. 2 gegeben, wobei Q = verfügbare und Q' = ausgenützte Wassermengen darstellen.

AUSBAUGRÖSSE DER DONAUWERKE

Da die Fallhöhen durch die Geländeverhältnisse und Stufen beinahe eindeutig festgelegt sind (man könnte höchstens eine 2-stufige Lösung noch berücksichtigen, die aber zu grossen Rückstau ergeben), müssen wir nur die wirtschaftliche Ausbauwassermenge $Q_a = k_a . Q_m$, d. h. den Ausbaubeiwert $k_a = Q_a/Q_m$ bestimmen.

Wenn $\varepsilon = \dfrac{1}{Q.T} \int_0^T Q'dt = F(k_a)$ das Verhältnis der verbrauchten zu den verfügbaren, jährlich summierten, W-mengen bedeutet, so habe ich aus den 100-jährigen Dauerlinien der Wassermengen statistisch folgende Werte erhalten:

$$\varepsilon = -0{,}01 + 1{,}2\ k_a - 0{,}358\ k_a^2$$

$$\varepsilon^{max} = -0{,}01 + 0{,}881\ k_a + 0{,}506\ k_a^2 - 0{,}447\ k_a^3$$

$$\varepsilon_{min} = 1{,}15\ k_a - 0{,}42\ k_a^2 + 0{,}037\ k_a^3$$

die für die Grenzen $k_a = 0{,}45$ bis 1,2 gelten. Aus den Baukosten (K) des Kraftwerkes I, erhielt ich die Jahreskosten $k = jK = 0{,}13\ K$, bei 6% Verzinsung zu: $k = 12{,}48 + 9{,}28\ k_a + 3{,}825\ k_a^2$ (Mill. RM/J).

Die Jahresenergie beträgt für Werk I: $E = 3125\ \varepsilon$ (Mill. kWh/J) und die entsprechenden Jahreseinnahmen $e = 33.\varepsilon$ (Mill. RM/J), wie ich in anderen Veröffentlichungen zeigte. Aus diesen Ergebnissen folgt für den:

Ausbau mit grösstem Gewinn: $e - k = 30{,}32\ k_a - 15{,}639\ k_a^2 - 12{,}833$ in Mill. RM/J, welches den Höchstwert 1,867 bei $k_a = 0{,}947$, d. h. $Q_a = 5000$ m³/S erreicht.

Ausbau mit billigstem Strompreis: $p = k/E$ wird min. bei $\frac{dp}{dk_a} = 0$, d. h. $p_{min} = 0{,}982$ *Pf*/kWh, bei $k_a = 0{,}947$, wie oben.

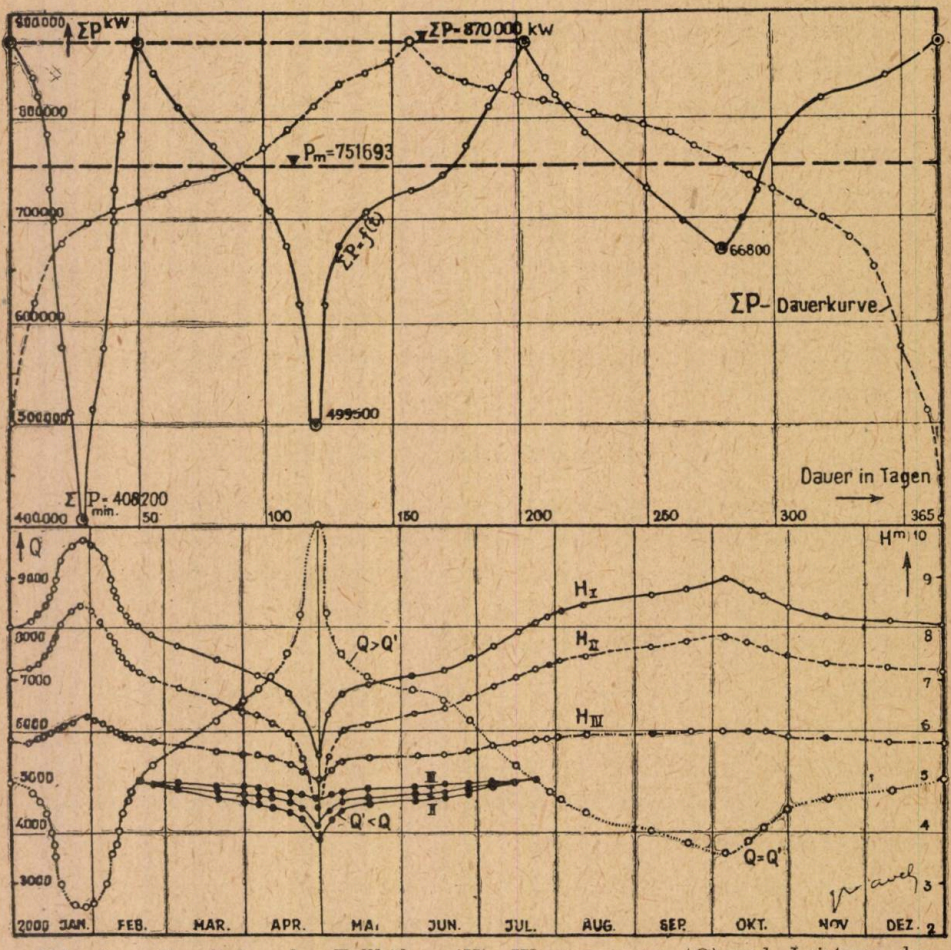


Abb. 2. — Ganglinien der Fallhöhen (H), Wassermengen (Q) und Leistung der Donauwerke, oben Dauerlinie der Leistungen (punktiert).

Grösster, bezw. kleinster noch wirtschaftlicher Ausbau: Aus den 2 Schnittpunkten der k- und e-Kurven erhalten wir für $e - k = 0$ die Grenzwerte $k_a^{max} = 1{,}318$; $k_a^{min} = 0{,}622$; $Q_a^{max} = 6955$ und $Q_a^{min} = 3282$ m³/S, die natürlich für diese wichtigen Kraftwerke nicht angenommen werden können. Mit der so erhaltenen wirtschaftlichen W-menge $Q_a = 5000$ für Werk I, bezw. 5070 für II, III habe ich die Ausbaugrösse festgelegt: I mit 330.000, II mit 300.000 und III mit 240.000 kW.

GANG- UND DAUERLINIEN DER Q, H, P

Da bei Hochwasser die Fallhöhen, wegen Rückstau sinken, ist die Verbrauch-Wassermenge $Q' = Q_a \sqrt{\frac{H}{H_a}}$ nur bei Mittelwasser voll ausnützbar und deshalb nehmen die Leistungen $P = 9{,}8\, Q' . H \eta_t \eta_g$ wegen den schwankenden Wirkungsgraden den Verlauf aus der Abb. 2.

In der Ganglinie der Leistungen treten 3 Höchstwerte von 870.000 kW auf (Ende Febr., Mitte Juli, Ende Dez.), Kleinstwerte von 408.200 (Ende Jan.), 668.000 kW (Ende Sept.), herrührend von kleinen Wassermengen und ein Kleinstwert von 499.500 kW (Ende April), wegen kleiner Fallhöhe bei Hochwasser.

BETRIEBSARTEN DER DONAUWERKE

Man könnte mehrere Betriebsarten anwenden, wir beschränken uns auf:

Fall I: Verbundbetrieb der 3 Donauwerke, ohne fremde Aushilfsenergie, ergibt: $E = 6585$ Mill. kWh/J für ein mittleres Jahr, $P_a = 870.000$ und $P_{min} = 408.200$ kW.

Fall II: Verbundbetrieb mit fremden Spitzenkraftwerken, zur Erhaltung der Kleinstleistung auf der Höhe der mittleren, $P_{min} = P_m = 751.693$ kW. Die nötige Aushilfsspitzenenergie wäre dann $E_{au} = 307$, davon Speicherenergie $E_s = 192$ Mill. kWh/J und die Gesamtenergie $E_{au} + E = 6892$ Mill kWh/J.

Fall III: Konstante Leistung $P_m = P_a = 870.000$ kW (praktisch übertrieben), erfordert $E_{au} = 1036$ und $E_{au} + E = 7621$ Mill kWh/J und die Spitzenaushilfs-Leistung 0- bis 461.800 kW.

KURZE WIRTSCHAFTLICHE BETRACHTUNG

Am Anfang dieses Aufsatzes habe ich die Baukosten der 3 Donauwerke angeführt: $K_I = 210$, $K_{II} = 250$ und $K_{III} = 220$ Mill. RM, ausschlieslich die Umformeranlagen und mit $j = 0{,}13$ (d. h. 37% mehr

als Prof. Ludin angibt), erhalten wir für die Jahreskosten: $k = 27{,}3$, $k = 32{,}5$ und $k = 28{,}6$ Mill. RM/Jahr. Der Strompreis ab Generatorspannung, d. h. ab Werk, ist $p = 100$ k/E (Pf/kWh), ausgerechnet für völligen Absatz der Energie, für ein normales, ein wasserreiches und ein äusserst wasserarmes Jahr:

Kraftwerk	I	II	III	Zusammen
E (Mill. kWh/J)	2517	2225	1843	6585
E_{max} (Mill. kWh/J)	2870	2530	2100	7500
E_{min} (Mill. kWh/J)	1990	1760	1450	5200
p (Pf/kWh)	1,085	1,460	1,550	1,340
p_{min} (Pf/kWh)	0,951	1,285	1,360	1,178
p_{max} (Pf/kWh)	1,370	1,845	1,970	1,700

Trotzdem in den Baukosten auch die Schleusen und Hilfsanlagen für die Schiffahrt, sowie eine Eisenbahn und 3 Brücken inbegriffen sind, habe ich in obiger Rechnung die Einnahmen für letztere nicht einbegriffen.

Wenn wir daher für 3 Schleusungen bei einem Gesamtverkehr von 20 Mill. BRT/J mit 1·-RM/T anrechnen, so sinkt der Strompreis auf rd $p_I = 0{,}8$, $p_{II} = 1{,}15$, $p_{III} = 1{,}23$, und im Mittel $p = 1$ Pf/kWh.

Demnach sind die Donaukraftwerke zwischen *Islaz* und dem *Eisernen Tor* auch energiewirtschaftlich betrachtet vorteilhaft, abgesehen davon, dass deren Ausbau durch die Schiffahrtregulierung dringend erfordert wird.

621.313 MACHINES ÉLECTRIQUES

LE FONCTIONNEMENT D'UNE MACHINE A COURANT CONTINU QUAND LA VITESSE VARIE

par **C. Parteni Antoni** et **N. Popinceanu**

Résumé. *Les auteurs étudient les effets d'un changement de vitesse sur le fonctionnement d'une machine à courant continu, sans rien changer à ses éléments constructifs.*

Si la vitesse augmente, parmi des autres conclusions, il faut remarquer que la tension et le courant augmentent, la distorsion du champ devient plus importante. En même temps les pertes dans le fer, dans les enroulements de l'induit et de l'inducteur et les pertes au collecteur augmentent. La ventilation s'améliore seulement dans une certaine proportion et l'échauffement sera plus important. La commutation sera plus difficile et l'effet des pôles de commutation ne peut intervenir autant qu'il serait nécessaire.

1. INTRODUCTION

Nous nous proposons dans cette étude d'examiner les répercussions d'un changement de vitesse sur le fonctionnement d'une machine à courant continu.

Nous supposons que la machine est construite et que sans rien changer à ses éléments, on modifie seulement la vitesse.

C'est un cas qui peut se présenter assez souvent dans la pratique. Soit une dynamo à courant continu qui doit être entraînée par un moteur, dont la vitesse est différente de celle de la génératrice et les possibilités de transmissions sont telles qu'il n'est pas possible d'arriver à la même vitesse.

Nous examinerons maintenant les différents éléments du fonctionnement de la machine dans l'hypothèse que la vitesse est modifiée pour nous rendre compte de la manière dont ces éléments vont varier.

2. FRÉQUENCE

La fréquence f d'une machine est définie par la relation:

$$f = \frac{np}{60} \qquad (1)$$

dans laquelle:

n représente la vitesse de la machine, exprimée en tours par minute et

$2p$ le nombre de pôles.

On voit immédiatement que la fréquence varie proportionnellement avec la vitesse n de la machine.

3. VITESSE PERIPHERIQUE

La vitesse périphérique est:

$$v = \frac{\pi D n}{60} \text{ en cm: sec.} \qquad (2)$$

où

D est le diamètre de l'induit en cm.

Cette vitesse varie proportionnellement avec n.

v est limitée par la qualité des matériaux employés dans la construction de la partie tournante, en ce qui concerne la résistance mécanique de celle-ci. Pour les machines à courant continu, entraînées par des turbines à vapeur, on ne dépasse pas actuellement pour la vitesse v environ 90 m: s. Pour les machines dites normales, on ne dépasse pas en général 30—35 m: s, sans employer de dispositions spéciales contre la force centrifuge. Par conséquent, la variation de n est limitée pour ne pas dépasser certaines limites admissibles pour la valeur de la vitesse périphérique v.

4. FORCE ELECTROMOTRICE

Nous avons les relations bien connues pour une génératrice:

$$E = U + RI \qquad (3)$$

et

$$E = \frac{Nn\Phi}{10^8 \times 60} \cdot \frac{p}{a} \qquad (4)$$

dans lesquelles:

E est la f. é. m.,

U la tension aux bornes,

R la résistance totale de l'induit,

I le courant total de la machine,

Φ le flux par pôle,

$2a$ le nombre de circuits dérivés.

Supposons que la vitesse n change et devienne $n_1 > n$, de façon que

$$\frac{n_1}{n} = k > 1. \tag{5}$$

Les relations (3) et (4) deviennent:

$$E_1 = U_1 + RI_1 \tag{6}$$

en supposant que la résistance R reste constante et

$$E_1 = \frac{Nn_1\Phi_1}{10^8 \times 60} \cdot \frac{p}{a}. \tag{7}$$

Les éléments N, p et a restent les mêmes, parcequ'ils sont de nature constructive.

I. Supposons que l'excitation de la machine soit en dérivation.

Le flux Φ est:

$$\Phi = \frac{1{,}25\, m_1\, i}{\mathcal{R}} = C_1\, i \quad \text{avec} \quad C_1 = \frac{1{,}25\, m_1}{\mathcal{R}}$$

où:

m_1 est le nombre de tours,

i le courant d'excitation,

$\mathcal{R}$ la réluctance du circuit magnétique,

C_1 une constante.

D'autre part, nous avons aux bornes du circuit d'excitation:

$$U = ri$$

où r est la résistance du circuit de l'inducteur, y compris le rhéostat de champ.

De ces deux relations, on tire:

$$\Phi = C_2 U \quad (8) \quad \text{avec} \quad C_2 = \frac{C_1}{r};$$

C_2 est une constante.

Quand on modifie la vitesse de la machine, la relation (8) devient:

$$\Phi_1 = C_2 U_1 \tag{9}$$

en supposant que la résistance du circuit d'excitation n'a pas changé.

Des relations (8) et (9), on déduit:

$$\frac{\Phi_1}{\Phi} = \frac{U_1}{U}. \tag{10}$$

Si l'on considère les relations (3), (4), (6), (7) et (10), on a:

$$\frac{E_1}{E} = \frac{U_1 + RI_1}{U + RI} = \frac{n_1\Phi_1}{n\Phi} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{U_1}{U} \qquad (11)$$

ou

$$\frac{U_1 + RI_1}{U + RI} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{U_1}{U}.$$

Les opérations faites, on a:

$$\frac{U_1}{U} = \frac{1}{\frac{n_1 I}{n I_1} + \frac{U}{RI_1}\left(\frac{n_1}{n} - 1\right)}.$$

Si l'on tient compte de (5) et (11), nous avons:

$$\frac{E_1}{E} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{U_1}{U} = \frac{1}{\frac{I}{I_1} + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{U}{RI_1}}. \qquad (12)$$

Posons:

$$\left.\begin{aligned} \frac{I}{I_1} &= \alpha \\ \frac{U}{RI_1} &= \beta. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Des relations (3), (12) et (13), on déduit:

$$I_1 = \frac{I}{\alpha} \qquad \beta = \frac{U\alpha}{RI} = \frac{U\alpha}{E - U}$$

et la relation (12) devient:

$$\frac{E_1}{E} = \frac{1}{\alpha + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{U\alpha}{E - U}}.$$

Après transformation, on trouve:

$$\frac{E_1}{E} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{E - U}{E - \frac{U}{k}}. \qquad (14)$$

Nous avons supposé $k > 1$, suivant la relation (5).

Par conséquent:

$$\frac{U}{k} < U \quad \text{et} \quad \frac{E-U}{E-\frac{U}{k}} = A < 1$$

donc (14) devient:

$$\frac{E_1}{E} = \frac{A}{\alpha} \quad \text{avec} \quad A < 1.$$

α représente le rapport entre les valeurs des courants avant et après la modification de la vitesse.

On ne connaît pas encore la valeur de α. Supposons que A et α aient des telles valeurs, que

$$\frac{E_1}{E} > 1.$$

Dans ces conditions, on doit avoir l'inégalité suivante:

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{E-U}{E-\frac{U}{k}} > 1$$

ou

$$\frac{1-\alpha}{1-\frac{\alpha}{k}} > \frac{U}{E}.$$

Nous avons pris $k > 1$, donc:

$$\frac{1-\alpha}{1-\frac{\alpha}{k}} < 1$$

et a fortiori:

$$\frac{U}{E} < 1 \quad \text{ou} \quad U < E.$$

Nous avons trouvé une condition qui représente une relation connue, donc l'hypothèse admise $E_1 > E$ est juste. On en conclut que la f. é. m. aux bornes d'une machine à courant continu augmente en même temps que la vitesse n.

Si l'on avait supposé $E_1 \leqslant E$, on aurait trouvé par le même calcul $U \geqslant E$, relations impossibles à admettre parceque la f. é. m. et la tension sont liées par la relation (3), suivant laquelle on doit toujours avoir $U < E$.

II. Considérons maintenant le cas d'une machine à excitation en série.

Le flux Φ sera:

$$\Phi = \frac{1{,}25\, m_2 I}{\mathcal{R}} = C_3 I \quad \text{avec} \quad C_3 = \frac{1{,}25\, m_2}{\mathcal{R}}$$

où:

m_2 est le nombre de tours et

C_3 une constante.

Quand on change de vitesse, on a:

$$\Phi_1 = C_3 I_1. \tag{15}$$

De ces deux dernières relations, on déduit:

$$\frac{\Phi_1}{\Phi} = \frac{I_1}{I}.$$

Introduisons cette valeur de $\frac{\Phi_1}{\Phi}$ dans la relation (11):

$$\frac{E_1}{E} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{I_1}{I} = \frac{U_1 + RI_1}{U + RI} \tag{16}$$

d'où l'on tire:

$$I_1 = \frac{I}{k\frac{U}{U_1} + \frac{RI}{U_1}(k-1)}.$$

Posons:

$$\frac{U}{U_1} = \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{RI}{U_1} = \delta.$$

On obtient:

$$\frac{I}{I_1} = k(\varepsilon + \delta) - \delta = k\varepsilon + \delta(k-1).$$

D'autre part:

$$\delta = \varepsilon \frac{RI}{U}.$$

Nous avons vu que $\varepsilon < 1$; $\frac{RI}{U}$ est très petit, RI représentant quelques centièmes de U; par conséquent, δ est très petit, ce qu'on peut voir même directement. D'autre part k n'accuse pas de trop grandes valeurs en pratique et on peut écrire approximativement:

$$\frac{I}{I_1} \cong k\varepsilon.$$

De l'égalité des deux premiers membres de la relation (16) et après remplacement du rapport des courants par la valeur ci-dessus, on a:

$$\frac{E_1}{E} \simeq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Si $\varepsilon < 1$, alors $\frac{E_1}{E} > 1$ et la nouvelle f. é. m. sera plus grande, quand on augmente la vitesse.

III. Dans une machine à excitation compound, nous aurons $\frac{E_1}{E} > 1$, en considérant les conclusions auxquelles nous avons abouti dans les deux cas considérés plus haut pour les machines à excitation en dérivation et en série.

5. CHARGE ELECTRIQUE

La charge électrique de la machine, c'est-à-dire le nombre des ampères-conducteurs sera:

$$\varkappa \pi D = \frac{NI}{2a}, \qquad (17)$$

où $\varkappa$ représente le nombre d'ampères-conducteurs par cm. de périphérie de l'induit.

La charge électrique suivra la variation du courant I, les autres éléments restant constants.

6. REACTION D'INDUIT

La valeur de cette réaction est donnée par la relation:

$$J_a = \frac{NI}{4ap},$$

par conséquent, elle varie directement avec le courant total de la machine I.

Il faut faire attention à ce que la réaction n'atteigne pas une valeur exagérée, parceque alors la distorsion sera trop grande, ce qui pourra nuire au fonctionnement de la machine.

7. DENSITE DU COURANT

La densité de courant γ est définie comme suit:

$$\gamma = \frac{I}{2as} = C_4 I \quad \text{avec} \quad C_4 = \frac{1}{2as}.$$

C_4 est une constante parceque les éléments qui la composent sont des constantes.

Si le courant I grandit quand la vitesse s'accroît, il en résulte une augmentation pour la densité de courant γ. Il faut faire attention et vérifier si l'échauffement de l'induit permet cette modification de la densité de courant.

8. PERTES DANS L'INDUIT

A) *Pertes dans le fer*

I. Couronne de l'induit

Les pertes par hystérésis et par courants de Foucault ont la forme suivante:

$$P_{fer} = P_H + P_F = k_3 f V B_{ind}^{1,6} + k_4 f^2 V B_{ind}^2 \qquad (18)$$

où

k_3 et k_4 sont des constantes qui varient avec la qualité des matériaux,

V est le volume de la couronne de l'induit,

$B_{ind} = \dfrac{\Phi}{2S_{ind}}$ (19) est l'induction dans la couronne de l'induit, dont la section est S_{ind}.

Remplaçons dans la relation (18) f et B_{ind} par leurs valeurs (1) et (19) et séparons les deux pertes:

$$\left.\begin{aligned} P_H &= C_5 n \Phi^{1,6} \quad \text{avec} \quad C_5 = \frac{k_3 p V}{60\,(2S_{ind})^{1,6}} \\ P_F &= C_6 n^2 \Phi^2 \quad \text{avec} \quad C_6 = \frac{k_4 p^2 V}{(120\,S_{ind})^2} \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Si la vitesse devient n_1, les pertes seront respectivement:

$$P'_H = C_5 n_1 \Phi_1^{1,6} \quad \text{et} \quad P'_F = C_6 n^2 \Phi_1^2.$$

Le rapport des pertes pour les deux valeurs de la vitesse sera:

$$\frac{P'_H}{P_H} = \frac{n_1}{n}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi}\right)^{1,6} \quad \text{et} \quad \frac{P'_F}{P_F} = \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \left(\frac{\Phi_1}{\Phi}\right)^2.$$

Tant que la saturation du circuit magnétique le permet, le rapport $\dfrac{\Phi_1}{\Phi}$ est plus grand que l'unité pour n'importe quel système d'excitation de la machine.

D'autre part nous avons toujours supposé $\frac{n_1}{n} > 1$, par conséquent les pertes par hystérésis augmentent plus vite que le rapport des vitesses, tandis que les pertes par courants de Foucault augmentent plus vite que le carré du même rapport.

II. Dents de l'induit

Pour les pertes dans les dents de l'induit on utilise les mêmes formules (18) dans lesquelles on doit prendre les volumes et les inductions respectives.

Les conclusions auxquelles on aboutit sont naturellement les mêmes.

En résumé, les pertes par hystérésis et par courants de Foucault dans le fer de l'induit augmentent plus vite que le rapport des vitesses, quand on augmente la vitesse de la machine considérée.

B) *Pertes dans le bobinage*

Les pertes Joule dans le bobinage de l'induit sont données par la relation:

$$P_w = R\frac{I^2}{4a^2} = C_7 I^2 \quad \text{avec} \quad C_7 = \frac{R}{4a^2}.$$

Ces pertes suivent les variations du courant I, mais au carré de cette valeur. Quand la vitesse de la machine varie, le courant subit une certaine variation dans le même sens et par conséquent les pertes auront la même variation.

Il faut tenir compte des pertes par courants de Foucault dans le bobinage. Ces pertes augmentent aussi avec la vitesse, de sorte que les pertes totales dans le bobinage seront encore plus importantes et auront la forme:

$$P_W' = C_7 I^2 n^x. \qquad (21)$$

9. ECHAUFFEMENT DE L'INDUIT

L'échauffement de l'induit en degrés centigrades est donné par la relation:

$$t^0 = C_8 \frac{P_t}{S} \qquad (22)$$

où:

C_8 est une constante dont la valeur est en relation avec la forme de la machine et avec les possibilités de ventilation,

P_t sont les pertes totales de l'induit, soit:

$$P_t = P_{fer} + \frac{L}{L + L_t} P_w \qquad (23)$$

en supposant que les têtes de bobines subisent un refroidissement naturel.

L est la longueur du fer de l'induit en cm.,

L_t est la longueur d'une tête de bobine en cm.,

S est la surface totale de refroidissement en cm²:

$$S = S_1 (1 + 0{,}1\ v) + S_2 . \qquad (24)$$

S_1 est la surface périphérique de l'induit en cm²,

S_2 en cm² contient les surfaces des canaux de ventilation et la surface d'extrémité de l'induit. Il faut observer que le facteur avec lequel on multiplie S_1 ne peut pas dépasser 4,5, même si v est plus grand que 3,5 m: sec. (Dans cette relation on prend v en m: sec.).

Si l'on tient compte de la valeur de v (2), la relation (24) devient:

$$S = S_1 (1 + C_9\, n) + S_2 \quad (25) \quad \text{avec} \quad C_9 = \frac{0{,}1\,\pi D}{60} .$$

Introduisons les valeurs de (20), (21), (23) et (25) dans la relation (22); on obtient:

$$t_0 = C_8 \frac{C_5\, n \Phi^{1,6} + C_6\, n^2\, \Phi^2 + C_{10}\, I^2\, n^x}{S_1 (1 + C_9\, n) + S_2} \qquad (26)$$

avec $C_{10} = C_7 \dfrac{L}{L + L_t}$.

Supposons que la vitesse a augmentée. Le dénominateur de la relation (26) augmente, mais plus lentement que la vitesse n. Ensuite il faut remarquer que le binôme qui multiplie S_1 ne peut pas dépasser une certaine valeur, assez réduite. D'autre part, le nominateur croît plus vite que n. En réalité, Φ et I s'accroissent avec n et les deux premiers termes contiennent respectivement n et n^2. Par conséquent, quand on augmente la vitesse de la machine, l'échauffement de l'induit est plus important, parceque l'amélioration de la ventilation est limitée et ne suit pas l'augmentation des pertes de toute nature dans l'induit.

10. FLUX DE LA MACHINE

Nous avons trouvé la relation (10):

$$\frac{\Phi_1}{\Phi} = \frac{U_1}{U}$$

d'où l'on déduit que le flux suit la même variation que la tension.

De la relation (11), il résulte que les tensions sont proportionnelles aux f. é. m. et celles-ci varient en fonction des vitesses, suivant les

conclusions déduites au § 4. De toute façon, les f. é. m. deviennent plus importantes quand les vitesses augmentent et par conséquent les flux auront les mêmes variations, autant que la saturation le permet.

Le flux total de la machine

$$\psi = 2p\Phi$$

augmente par conséquent, de la même manière.

11. COURANT D'EXCITATION

Pour une excitation en dérivation, on a:

$$U = ri \tag{27}$$

où

r est la résistance du circuit inducteur et

i le courant d'excitation.

Si l'on modifie la vitesse, on a une autre tension U_1 et un autre courant i_1; la résistance du circuit inducteur reste la même.

Nous aurons:

$$U_1 = ri_1. \tag{28}$$

Des relations (27) et (28), on déduit:

$$\frac{U}{U_1} \cdot \frac{i_1}{i} = 1.$$

D'après ce que nous avons vu au § 4, nous savons que:

$$\frac{U_1}{U} > 1$$

dans l'hypothèse que la vitesse n de la machine augmente.

Il en résulte:

$$\frac{i}{i_1} < 1$$

et par conséquent, le courant d'excitation augmentera aussi dans l'hypothèse admise.

12. PERTES DANS LE BOBINAGE DE L'INDUCTEUR

La puissance perdue est donnée par la relation:

$$P'_w = Ui = \frac{U^2}{r}. \tag{29}$$

Si l'on prend une résistance r constante du circuit inducteur entier, on conclut que les pertes par effet Joule dans l'inducteur varient avec le carré de la tension. Ces pertes augmentent quand la vitesse de la machine s'accroît (§ 4).

13. AMPERES-TOURS DE LA MACHINE

Les ampères-tours par champ double seront:

$$At = mi.$$

I. Pour une machine à excitation en dérivation, on a:

$$At = \frac{m_1}{r} U$$

et le nombre des ampères-tours suit la variation de la tension quand la vitesse change (§ 4).

II. Pour une machine à excitation en série, on a:

$$At = m_2 I$$

et le nombre des ampères-tours suit la variation du courant quand la vitesse change.

III. Pour une machine à excitation compound, on a l'une et l'autre des deux variations précédentes.

De toute façon, si le nombre d'ampères-tours augmente, il y a une nouvelle croissance de la tension et ensuite ce processus se répète. Mais, en général, la saturation intervient assez rapidement pour permettre seulement un léger accroissement de la tension et des autres éléments dont nous nous occupons.

14. ECHAUFFEMENT DU BOBINAGE INDUCTEUR

L'échauffement du bobinage inducteur peut être calculé suivant la formule:

$$t_i^0 = C_{11} \frac{P'_w}{S'}$$

où

C_{11} est une constante qui varie avec les possibilités de refroidissement de la machine et

S' est la surface de refroidissement.

Si l'on tient compte de la relation (29), on a:

$$t_i^0 = C_{12} U^2 \quad \text{avec} \quad C_{12} = \frac{C_{11}}{S'r}.$$

L'échauffement varie avec le carré de la tension, quand on change de vitesse. La discussion de cette variation a été faite plus haut (§ 4).

15. COMMUTATION

I. *Tension entre lames.*

La tension entre deux lames du collecteur pour tous les genres d'enroulement est donnée par la relation:

$$e_{moy} = \frac{2pE}{K}$$

où K est le nombre de lames au collecteur, donné par

$$K = \frac{N}{2z}$$

avec z le nombre de spires entre deux lames du collecteur.

En tenant compte de la relation (4), on a:

$$e_{moy} = C_{13}\, n\Phi \quad \text{avec} \quad C_{13} = \frac{zp^2}{15a \times 10^8}.$$

Si n augmente, Φ s'accroît aussi dans une certaine mesure, de sorte que e_{moy} s'agrandit proportionnellement au produit $n\,\Phi$ pour ces doubles raisons.

Dans cette situation, il y a danger que la tension entre deux lames subisse une augmentation trop grande. On sait que cette valeur ne doit pas dépasser 15 à 20 volts pour les machines non compensées et environ 25 volts pour celles compensées, sans courir le grave danger de flash au collecteur.

Par conséquent, quand on augmente la vitesse d'une machine, on doit toujours vérifier si les valeurs ci-dessus ne sont pas dépassées.

II. *Commutation.*

Pour étudier la commutation dans l'hypothèse d'un changement de la vitesse, examinons la tension caractéristique e_γ, donnée par M. MAUDUIT [1]):

$$e_\gamma = 0{,}04\left(10\xi L\frac{u'}{u} + \gamma_e \lambda_s\right) z\varkappa f\bar{\omega}^2 \text{ en volts}$$

Mettons:

$$C_{14} = 0{,}04\left(10\xi L\frac{u'}{u} + \gamma_e \lambda_s\right)$$

qui représente une constante, parceque tous les éléments qui la composent sont de nature constructive et par conséquent ne changent pas;

$$a_1 = z\varkappa f\bar{\omega}^2$$

---

[1]) A. MAUDUIT, Machines électriques t. I, p. 241, édité par la librairie Dunod à Paris (1931).

où $\overline{\omega}$ représente le pas polaire:

$$\overline{\omega} = \frac{\pi D}{2p}.$$

En remplaçant f et $\varkappa$ par leurs valeurs (1) et (17), on obtient:

$$a_1 = C_{15}\, nI \quad \text{avec} \quad C_{15} = \frac{zN\pi D}{480ap}.$$

Pour la tension caractéristique, on a:

$$e_\gamma = C_{14}\, C_{15}\, nI = C_{16}\, nI \quad \text{avec} \quad C_{16} = C_{14}\, C_{15}.$$

On observe que la tension caractéristique et par conséquent, la commutation deviennent d'autant plus difficiles que la vitesse n augmente; celle-ci plus rapidement encore parceque en même temps le courant I s'accroît aussi dans une certaine proportion.

16. VITESSE PERIPHERIQUE DU COLLECTEUR

Cette vitesse est calculée suivant la relation:

$$\varphi_c = \frac{\pi D_c}{60} n \qquad (30)$$

où

D_c est le diamètre du collecteur en cm. et s'accroît proportionnellement avec la vitesse n de la machine.

S'il y a un accroissement plus important de la vitesse périphérique, il faut vérifier la résistance du matériel au point de vue mécanique.

17. PERTES AU COLLECTEUR

I. *Pertes par frottements.*

Ces pertes sont calculables suivant la formule:

$$P_{fr} = 9{,}81\ \mu p_c\, S_c\, \varphi_c \quad \text{watts}$$

où

μ est le coefficient de frottement,
p_c la pression des balais en kg: cm^2,
S_c la surface totale des balais,
φ_c la vitesse du collecteur.

Si l'on introduit la valeur (30) de φ dans la relation ci-dessus, on obtient:

$$P_{fr} = C_{17}\, n \quad \text{avec} \quad C_{17} = \frac{9{,}81\,\pi}{60}\, \mu p_c\, S_c\, D_c$$

et ces pertes varient proportionnellement avec la vitesse.

II. Les *pertes* JOULE *au collecteur* sont:

$$P_{wc} = eI$$

où e représente la chute de tension par ligne de balais.

Ces pertes suivent la variation du courant total de la machine quand on change de vitesse.

III. Les pertes totales au collecteur seront:

$$P_c = C_{17}\, n + eI. \tag{31}$$

18. ECHAUFFEMENT DU COLLECTEUR

L'échauffement est donné par la relation:

$$t_c^0 = C'_{18} \frac{P_c}{S_c} \tag{32}$$

où

C'_{18} est une constante qui varie suivant le mode de refroidissement du collecteur et

S_c est la surface totale de refroidissement du collecteur

$$S_c = S_{1c}\,(1 + 0{,}1\ v_c) + S_{2c}. \tag{33}$$

S_{1c} est la surface périphérique du collecteur et

S_{2c} la surface de l'extrémité du collecteur.

En tenant compte des valeurs de P_c (31) et S_c (30 et 33), la relation (32) devient:

$$t_c^0 = \frac{C_{17}\, n + eI}{C_{18} + C_{19}\, n} \tag{34}$$

avec:

$$C_{18} = S_{1c} + S_{2c} \quad \text{et} \quad C_{19} = \frac{0{,}1\ \pi S_{1c} D_c}{60}.$$

Pour des vitesses plus grandes on voit de la relation (34) que les deux termes des pertes augmentent, tandisque, pour la surface il n'y a qu'un seul terme qui augmente avec n. Il en résulte que le refroidissement est amélioré dans une certaine mesure quand la vitesse augmente, mais que l'échauffement augmentera par suite des pertes qui s'accroissent plus sensiblement.

19. AMPERES-TOURS DES PÔLES DE COMMUTATION

Les ampères-tours des pôles auxiliaires sont calculés à l'aide de la relation:

$$At_{pa} = C_{20}\, J_a = C_{20} \frac{NI}{4ap}$$

où C_{20} est un coefficient qui varie suivant la qualité du balai employé et la nature de fonctionnement de la machine.

Tant que la saturation des pôles auxiliaires le permet, At_{pa} croît avec I, quand la vitesse n de la machine augmente. Mais nous avons vu (§ 15) que la commutation devient plus difficile et ces difficultés sont proportionnelles à n, tandis que pour les ampères-tours, At_{pa} varie avec I, donc plus lentement que la vitesse n. Par conséquent, les pôles auxiliaires interviennent d'une façon moins pronnoncée qu'il y serait nécessaire et les difficultés de commutation deviendront d'autant plus sensibles.

20. AMPERES-TOURS DE COMPENSATION

Ces ampères-tours sont données par la formule:

$$At_c = C_{21} \frac{NI}{4ap}$$

où C_{21} est une constante. Ils subissent la même variation que les ampères-tours de commutation.

Cet enroulement doit produire un champ, dont le rôle est de combattre la réaction de l'induit et d'atténuer autant que possible la distorsion du champ inducteur.

Comme la réaction de l'induit (§ 6) et les ampères-tours de compensation varient de la même manière que I quand la vitesse de la machine augmente, il en résulte que l'équilibre entre ces deux actions sera maintenu et que le changement de la vitesse n'aura pas d'influence dans ce domaine.

21. COUPLE

La puissance de la machine peut être écrite sous forme mécanique et électrique:

$$C\omega = EI \quad \text{d'où} \quad C = \frac{EI}{\omega}$$

avec

$$\omega = \frac{2\pi n}{60};$$

en tenant compte de la relation (4), on a:

$$C = C_{22} I\Phi \quad \text{avec} \quad C_{22} = \frac{Np}{2\pi a \times 10^8}.$$

I. Pour une machine à excitation en dérivation on remplace Φ par sa valeur (8) et l'on peut écrire:

$$C = C_{23} UI \quad \text{avec} \quad C_{23} = C_{22} C_2.$$

Le couple augmente avec n parceque U (§ 4) et I s'accroissent en même temps.

II. Pour une machine à excitation en série on a (15):

$$C = C_{24} I^2 \quad \text{avec} \quad C_{24} = C_{22} C_3 .$$

Le couple augmente aussi dans ce cas si n est plus grand.

III. Pour une machine à excitation compound nous arriverons à la même conclusion.

Par conséquent, quand on augmente la vitesse d'une machine à courant continu, dans les hypothèses admises, le couple de celle-ci s'accroît en même temps, mais sans y avoir un rapport de proportionnalité. Dans tous ces phénomènes, la saturation des différents circuits de la machine a un rôle très important, quant à la variation des autres éléments.

22. PERTES MECANIQUES

I. *Pertes par frottements.*

Les pertes par frottements dans les coussinets ont les formes suivantes [1]):

$$P'_m = C_{25} \varrho_t^{1,5} \tag{35}$$

pour coussinets à bagues et

$$P''_m = C_{26} \varrho_t \tag{36}$$

pour coussinets à billes

où:

C_{25} et C_{26} sont des constantes,

ϱ_t représente la vitesse périphérique du tourillon en m: sec.

$$\varrho_t = \frac{\pi D_t n}{60} \tag{37}$$

avec D_t le diamètre du tourillon.

Si l'on tient compte de la valeur de ϱ_t (37), les pertes (35) et (36) seront:

$$P'_m = C_{27} n^{1,5} \quad \text{et} \quad P''_m = C_{28} n$$

ou en général:

$$P'_m = C_{27/28} n^{x_1} \tag{38}$$

avec:

$$C_{27} = C_{25} \left(\frac{\pi D_t}{60}\right)^{1,5} \quad \text{et} \quad C_{28} = C_{26} \frac{\pi D_t}{60} .$$

---

[1]) R. RICHTER, Elektrische Maschinen, t. I, p. 230, édité par J. Springer à Berlin (1924).

Par conséquent, ces pertes varient avec la vitesse n pour les coussinets à billes et avec $n^{1,5}$ pour les coussinets à bagues.

II. *Pertes par ventilation.*

Les pertes par ventilation ou par résistance de l'air sont assez difficiles à calculer. Elles varient dans des proportions très larges suivant qu'il s'agit d'une machine à petite vitesse périphérique, ou d'une autre à grande vitesse périphérique, par exemple d'une turbo-dynamo.

Dans tous les cas, on peut considérer ces pertes comme proportionnelles à peu près au cube de la vitesse angulaire de la machine et on peut écrire:

$$P_v = C_{29}\, n^3 \qquad (39)$$

avec C_{29} une constante.

23. RENDEMENT

Nous nous proposons maintenant d'étudier le rendement η de la machine, fonctionnant en génératrice. Le rendement sera:

$$\eta = \frac{UI}{UI + P_{tot}} = \frac{1}{1 + \frac{P_{tot}}{UI}}$$

où P_{tot} sont les pertes totales de la machine.

Pour avoir les pertes totales, il faut faire la somme de toutes les pertes que nous avons examinées plus haut, qui sont représentées par les expressions (20), (21), (29), (31), (38) et (39):

$$P_{tot} = C'_5\, n\, \Phi^{1,6} + C'_6\, n^2\, \Phi^2 + C_7\, I^2\, n^x + \frac{U^2}{r} + C_{17}\, n + eI + C_{27/28}\, n^{x_1} + C_{29}\, n^3 + C_{30}\, I^2.$$

Les termes avec C'_5 et C'_6 renferment aussi les pertes dans les dents de l'induit. $C_{30}\, I^2$ représente les pertes dans les enroulements de compensation et de pôles auxiliaires.

On voit que les pertes totales augmentent plus vite que la vitesse n de la machine.

D'autre part, la tension U croît avec n (§ 4) et le courant I moins vite que la tension U.

Le rapport $\frac{P_{tot}}{UI}$ sera plus grand quand la vitesse de la machine augmentera et par conséquent le rendement η diminuera dans cette hypothèse.

24. CONCLUSIONS

De l'exposé que nous avons fait dans cette étude, on peut tirer les conclusions suivantes:

I. Les vitesses périphériques de l'induit et du collecteur augmentent avec la vitesse. Il faut toujours vérifier si la résistance du matériel est compatible avec cette nouvelle valeur de la vitesse (§§ 3 et 16).

II. La tension et le courant augmentent avec la vitesse, mais pas dans la même proportion (§ 4).

III. La réaction de l'induit et par conséquent la distorsion du champ, sont plus importantes quand la vitesse augmente (§ 6).

IV. Les pertes dans le fer dans les enroulements de l'induit et de l'inducteur et les pertes au collecteur augmentent avec la vitesse et certaines d'entre elles plus vite encore que la vitesse (§§ 8, 12 et 17).

V. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, la ventilation ne s'améliore avec la vitesse que dans une certaine proportion. Par conséquent, l'échauffement augmente en général pour toutes les parties de la machine quand la vitesse est plus grande (§§ 9, 14 et 18).

VI. Le courant d'excitation de l'enroulement en dérivation sera plus important quand la vitesse augmentera (§ 11).

VII. Si la vitesse augmente la commutation est plus difficile pour deux raisons: la tension entre lames et la tension caractéristique augmentent avec la vitesse. D'autre part, l'influence des pôles auxiliaires subit une augmentation limitée, de sorte que la commutation ne peut pas être améliorée dans les proportions nécessaires (§§ 15 et 19).

Dans toutes ces considérations, il faut toujours tenir compte du phénomène de saturation qui peut modifier sensiblement certaines de ces conclusions.

Laboratoire de Machines Electriques
Polytechnique «Gh. Asachi»
Cernăuți

621.326.66 RADIO-ÉLECTRICITÉ

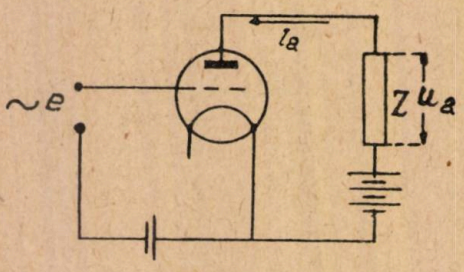
LA REACTION MIXTE DANS LES AMPLIFICATEURES

par **T. Tănăsescu**

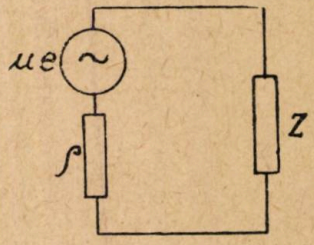
Résumé. *On passe en revue les propriétés remarquables des amplificateurs à une réaction mixte caracterisée par une composante proportionnelle à la tension de sortie et une autre proportionnelle au courant de sortie. On réduit l'étude de ces amplificateurs avec réaction, aux cas simples des amplificateurs sans réaction. On indique une construction graphique pour reconnaître aisément les caractéristiques du fonctionnement.*

L'étude suivante sera une application aux amplificateurs appartenant à la « Classe A », donc à un régime linéaire.

Dans ce cas, l'amplificateur équivaut, à son circuit de sortie, à un générateur de force éléctromotrice constante ou de courant constant (fig. 1, 2 et 3).



Fg.1



Fg.2

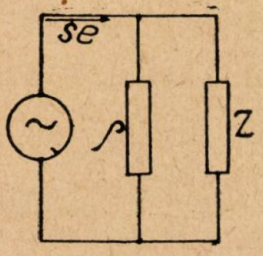
Si l'on applique une réaction, — à la sortie et vers l'entrée — il faut alors appliquer à l'entrée — dans le cas d'une réaction de tension — outre la f. e. m. extérieure e, une tension proportionelle à la tension de sortie et — dans le cas d'une réaction de courant — une tension proportionelle au courant anodique.

Une réaction mixte, introduira sur la grille une tension de la forme:

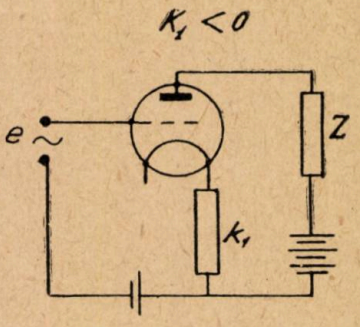
$$k_1 i_a - k_2 u_a \quad (u_a < 0)$$

où u_a et i_a sont les composantes alternatives de la tension et du courant anodique.

Les figures 4, 5 et 6 représentent les cas simples de réaction de courant, de tension et mixte.



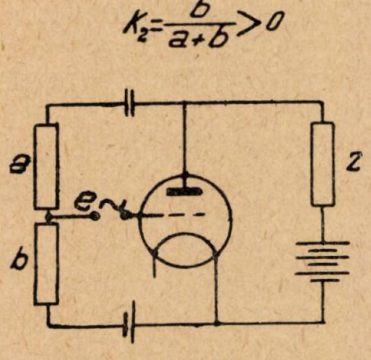
Fg.3



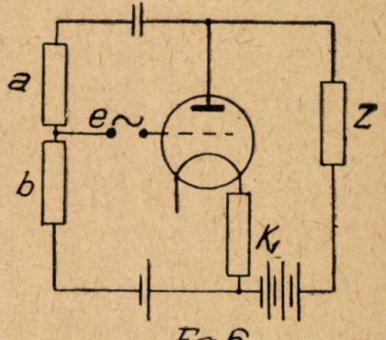
Fg. 4

Dans tous ces cas, l'amplificateur équivaut à un générateur éléctronique, semblable à un générateur sans réaction et dont la lampe éléctronique a des caractéristiques modifiées comme suit:

$$S' = \frac{S}{1 - Sk_1} \qquad \mu' = \frac{\mu}{1 - \mu k_2} \qquad \rho' = \rho \frac{1 - Sk_1}{1 - \mu k_2}.$$



Fg. 5



Fg 6

L'amplification K' de l'étage entier est donnée par la relation:

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{K} - k_2 - \frac{k_1}{Z}$$

où K, l'amplification sans réaction, est donnée par l'expression:

$$\frac{1}{K} = \frac{\rho + Z}{\mu Z}.$$

Cette formule pour K' est valable tant que l'application de la réaction de courant, dans le circuit anodique, absorbe une tension négligeable par rapport à celle repartie sur la charge Z.

On suppose également que la réaction de tension, prise en dérivation sur la charge anodique Z, ne modifie pas cette charge (le courant absorbé par réaction est très petit en comparaison au courant qui passe par la charge).

L'amplification peut encore être exprimée par la formule:

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{\mu'} + \frac{1}{ZS'}$$

de même que dans le cas d'une lampe éléctronique sans réaction.

Toutes ces propriétés des amplificateurs à réaction sont très bien connues et, à titre d'exemple, nous pouvons citer le livre de Hans Bartels — Grundlagen der Verstärkertechnik et de H. Rothe et W. Klein — Elektronen Röhren als Anfangstufen-Verstärker, où elles sont systématiquement exposées.

On peut déduire de ces formules toute une série de cas particuliers assez intéressants. À l'aide de la réaction mixte nous avons le moyen de réaliser des amplificateurs aux propriétés remarquables.

k_1 et k_2 peuvent être aussi bien des quantités réelles, quand le couplage est fait à l'aide de résistances pures, ou des quantités complexes, ce qui est d'ailleurs le cas général. On pourrait considérer le cas où k_1 et k_2 ne varieraient pas en même temps que la fréquence. Cette hypothèse n'est cependant réalisable qu'approximativement, dans une certaine bande de fréquences.

Si la partie réelle de k_1 et k_2, dans sa forme générale, est positive, nous avons une réaction positive, car à l'entrée, les composantes de tension s'ajoutent à e.

Si k_1 et k_2 ont leur partie réelle négative, nous avons une réaction négative, une contreréaction, car les composantes sont soustraites de e.

Pour mieux suivre les conditions de fonctionnement de l'amplificateur, dans les différents cas, nous allons utiliser une représentation graphique simple pour le cas ou k_1, k_2 et Z sont des quantités réelles.

Les paramètres qui déterminent le fonctionnement sont:

a) les constantes caractéristiques de la lampe (par ex. μ et S);

b) les coéfficients de couplage de la réaction, k_1 et k_2;

c) l'impédance charge Z.

On introduit ces paramètres dans la figure 7.

On prend $\frac{1}{S}$ et k_1 le long de l'axe horizontal et $\frac{1}{\mu}$ et k_2 sur l'axe vertical. Ainsi on obtient le point représentatif C de la lampe et le point F représentant la réaction.

L'impédance-charge Z détermine la droite CG par la relation: $tg\ \alpha = Z$.

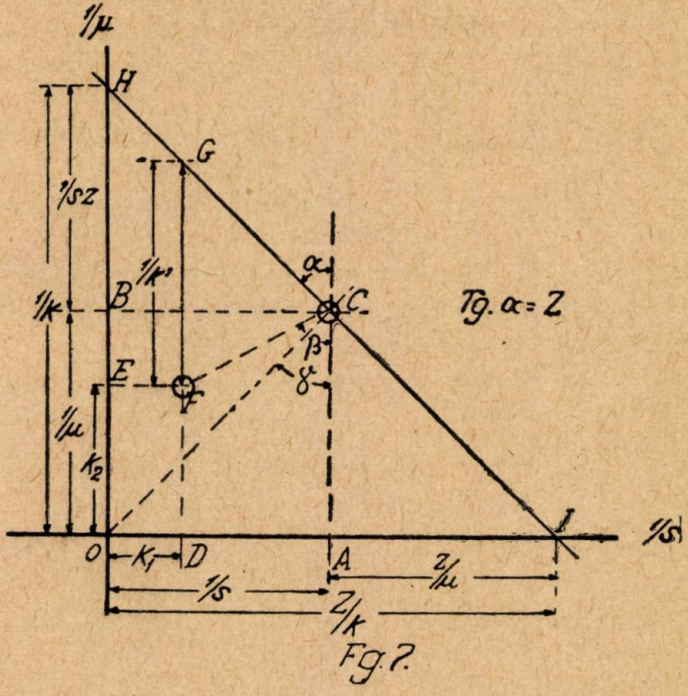


Fig. 7

On a alors les représentations graphiques suivantes:

$$\frac{1}{S'} = \overline{DA}\quad \frac{1}{\mu'} = \overline{EB}\quad \rho' = tg\ \beta\quad \rho = tg\ \gamma\quad \frac{1}{K'} = \overline{FG}\quad \frac{1}{K} = \overline{OH}$$

Généralement k_1, k_2 et z ne sont pas des quantités réelles et en conséquence la représentation graphique simple qu'on vient de montrer n'est plus valable.

Passons à l'examen de quelques cas intéressants qu'on peut réaliser à l'aide des amplificateurs à réaction mixte.

1. *Générateur à résistance interne nulle.* Dans ce cas, la tension de sortie est constante, indépendamment de la charge Z. Si par exemple Z varie en même temps que la fréquence, la tension aux bornes de cette impédance reste toujours constante et égale à μe.

Celui-ci est le cas idéal pour les étages intermédiaires d'amplification basse fréquence.

Cette condition peut être réalisée par une réaction positive de courant:

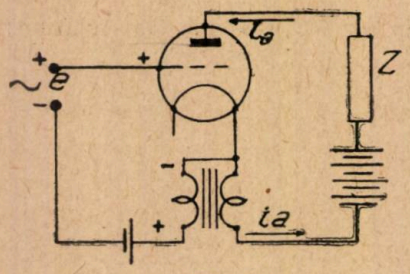


Fig. 8

$$k_1 = \frac{1}{S}$$

Le couplage est assuré par un transformateur dont le sens de l'enroulement doit être celui marqué sur la fig. 8.

La pente de la lampe devient infinie. Les variations du courant anodique dépendent uniquement de la charge.

L'amplification de l'étage est μ. Outre une grande amplification, il en résulte, dans ce montage, une constance de la tension de sortie, indépendante de toute variation de la charge.

La représentation graphique du fonctionnement est celle de la fig. 9, le point F se plaçant en A.

Si l'impédance de la charge n'est pas absolument constante dans un amplificateur basse fréquence mais légèrement variable avec la fréquence, la tension amplifiée à la sortie restera pourtant constante, indépendamment de la variation de la fréquence, à condition que la réaction réalise un k_1 indépendant de la fréquence, dans la bande dans laquelle on travaille.

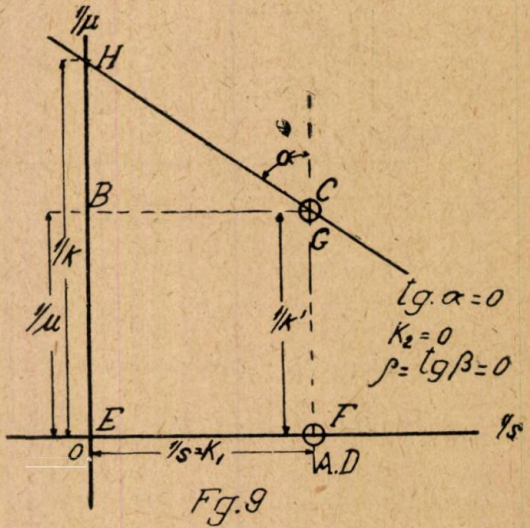


Fig. 9

Un amplificateur haute fréquence, qui possède généralement un circuit anodique accordé, par conséquant une impédance qui varie en même temps que la fréquence, ne présentera plus de séléctivité lorsqu'on lui applique une réaction positive de courant $k_1 = \frac{1}{S}$. Ces amplificateurs sont intéréssantes dans certains cas speciaux.

2. *Générateur a courant constant.* De même que, dans le cas précédent, nous avons choisi une réaction réduisant à zéro la résistance interne du générateur, on peut choisir une réaction qui puisse rendre cette résistance infinie. On aura alors un générateur à courant constant, indépendamment de la valeur de la charge. La condition est:

$$k_2 = \frac{1}{\mu}$$

c'est-à-dire une réaction positive de tension. Le montage peut être celui de la fig. 5.

Ce cas se présente comme si on avait une lampe, dans le générateur électronique équivalent, dont le facteur d'amplification serait infini.

K', l'amplification de l'étage devient: SZ, comme dans le cas simple des tétrodes ou de pentodes idéales (à très grande résistance interne). Notre montage à réaction possède une proprieté intéressante, à savoir: le courant (la composante alternative) est indépendant de la charge. Sa valeur est $S.e$, même si ρ n'est pas très grand par rapport à z. La pente dinamique $S' = S$ est indépendante de la charge.

La représentation graphique est celle de la fig. 10. Le point F se place en B.

Dans un étage final d'un amplificateur à basse fréquence, utilisant une triode, les variations de la charge dues à la fréquence n'entraîneront pas une modification sensible de courant dans cette charge.

De même dans un amplificateur à haute fréquence, ayant appliqué une pareille réaction, la sélectivité du circuit anodique accordé ne sera pas diminuée par la résistance interne de la lampe, comme il se produit d'habitude.

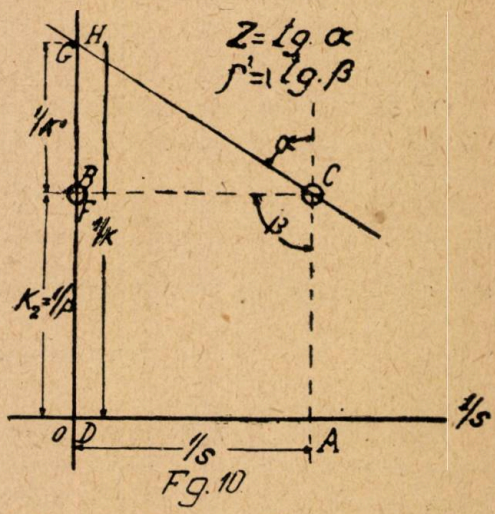


Fig. 10

3. *Oscillateurs.* On introduit à l'entrée d'un amplificateur, par l'application de la réaction, une f. e. m. qui se superpose à celle appliquée de l'extérieur, dans le même sens.

Si l'on réussit à obtenir une amplification de tension K' infinie, alors la f. e. m. appliquée de l'extérieur à l'entrée, peut devenir très

petite, voire même, disparaître, sans que les oscillations cessent. La condition nécessaire à la production des oscilations est:

$$K' = \infty$$

ou

$$\rho + z - k_2 \mu z - k_1 \mu = 0$$

La représentation graphique est celle de la fig. 11.
Le point F doit se trouver sur la droite CH.

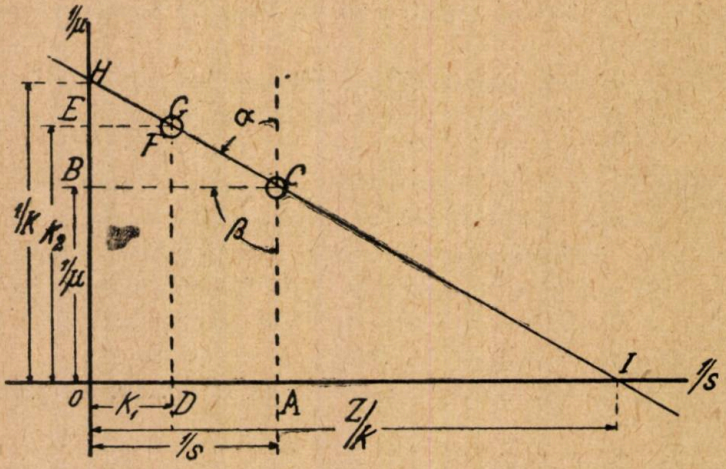


Fig. 11

On peut réaliser des oscillations soit au moyen d'une réaction positive de tension (montage de la fig. 5)

$$k_2 = \frac{\rho + z}{\mu z} = \frac{1}{K} \qquad (F \text{ se place en } H)$$

soit au moyen d'une réaction positive de courant (fig. 8):

$$k_1 = \frac{\rho + z}{\mu} = \frac{z}{K} \qquad (F \text{ se place en } I)$$

Généralement Z, k_1 et k_2 dépendent de la fréquence et les oscillations se produiront sur la fréquence satisfaisant à la relation précédente. (Dans ce cas la représentation graphique exposée ci-dessus n'est plus valable).

La condition d'avoir $K' = \infty$ est équivalente à

$$\rho' = -z \qquad tg\ \beta = -tg\ \alpha \qquad \text{(fig. 7)}$$

c'est-à-dire que la résistance totale du circuit anodique doit être nulle.

Cet exposé théorique n'est pas rigoureux. Les valeurs déduites pour k_1 et k_2, en vue de satisfaire les relations générales précédentes, ne sont que des valeurs minima nécessaires à produire des oscillations.

En effet, si K' est très grand, mettons 1.000.000, nous avons besoin à l'entrée d'une f. e. m. très petite — 1 microvolt — pour réaliser à la sortie une tension d'un volt. Plus on fait augmenter K', plus diminue la f. e. m. appliquée à l'entrée pour réaliser 1 volt à la sortie. Si K' devient infini, on n'a pas besoin d'une f. e. m. à l'entrée et les oscillations s'entretiennent d'elles-mêmes. Si on fait passer la valeur de K' dans la région des grandes valeurs négatives — 1.000.000 par exemple — on constate non seulement qu'on n'a plus besoin d'une force éléctromotrice d'excitation à l'entrée, mais qu'on doit introduire un frein, une f. e. m., d'un microvolt, dont le sens est renversé de 180° par rapport à ce qu'on avait introduit avant. Cela veut dire que, si K' dépasse $+\infty$ et entre dans la région des grandes valeurs négatives, le montage sans f. e. m. à l'entrée possède une tendance spontanée d'osciller et l'amplitude de ces oscillations tend a dépasser 1 volt.

À cause de l'augmentation de l'amplitude, la lampe commence à fonctionner en régime non linéaire (la région courbe des caractéristiques) et alors les paramètres de la lampe: ρ la résistance interne, μ le facteur d'amplification, S la pente, etc., se modifient et on arrive à un régime de fonctionnement dans lequel la relation $K' = \infty$ est à nouveau satisfaite (dans le cas où le montage détermine un équilibre stable des oscillations).

Sur le graphique, la production des oscillations équivaut à la condition où F serait placé sur la droite CH ou au-dessus d'elle. Dans ce cas, pour que le régime soit stable, il faut que le circuit anodique soit de la nature d'un circuit dérivation. Le générateur est du type « dynatron ».

Si le point F tend à se placer sur la portion CI, par les valeurs négatives de β, il faudrait que le circuit anodique soit de la nature d'un circuit série. Le générateur est alors du type « à arc ».

On peut aussi réaliser des oscillations avec une réaction mixte, en satisfaisant la relation qui exprime la condition $K' = \infty$. Une des réactions peut être positive, l'autre négative.

Dans le cas général, la production stable des oscillations peut être verifiée par le critérium Nyquist. Le facteur de transfer dans notre cas est:

$$A = \frac{\frac{k_1}{z} + k_2}{\frac{1}{S_2} + \frac{1}{\mu}}$$

où z, k_1, et k_2 sont en général des quantités complexes qui varient avec la fréquence.

La représentation de ce vecteur A, dans un diagramme polaire, nous donnera par son extrémité une courbe; si cette courbe contient à l'intérieur le point $+1$, le montage produit des oscillations. Une fois les oscillations commencées, leurs amplitudes augmentent jusqu'au moment où le fonctionnement de la lampe entre dans la région courbe de ses caractéristiques. À ce moment soit le régime peut devenir stable par le diminution de μ et S, on bien alors il peut être instable et les amplitudes diminuent, le point de fonctionnement passant de la région des résistances négatives dans la région stable des résistances positives.

En général les lampes ont des caractéristiques négatives de dynatron, et pour ce motif elles ne donnent des oscillations qu'en relation avec des circuits accordés en dérivation (c'est une réaction de tension, qui place le point F sur le segment CH).

4. *Générateur à résistance interne négative.* La résistance interne peut être rendue négative en rendant négatif soit le numérateur soit le dénominateur:

$$\rho' = \rho \frac{1 - S k_1}{1 - \mu k_2}.$$

Sur la représentation graphique on voit que F doit être choisi tel que β soit négatif ou plus grand que $\frac{\pi}{2}$.

Dans le premier cas il faut que

$$k_1 > \frac{1}{S} \qquad k_2 < \frac{1}{\mu}$$

et alors on a une caractéristique négative d'arc (le passage aux valeurs négatives se fait par zéro),
et dans le deuxième cas:

$$k_1 < \frac{1}{S} \qquad k_2 > \frac{1}{\mu}$$

et on a alors une caractéristique négative de dynatron (le passage aux valeurs négatives se fait par l'infini).

Pour eviter les oscillations propres du générateur, il faut que:

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{K} - k_2 - \frac{k_1}{z} < 0$$

ce qui signifie, sur le graphique, que le point F ne dépasse pas la droite CH.

Par exemple, dans le cas d'une réaction de courant, k_1 doit être compris entre deux limites:

$$\frac{1}{S} < k_1 < \frac{1}{S} + \frac{z}{\mu}$$

et dans le cas d'une réaction de tension, k_2 doit se trouver entre les limites:

$$\frac{1}{\mu} < k_2 < \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{\mu z}.$$

5. *L'amplification indépendante de la charge.* L'invers de l'amplification peut être écrit sous la forme:

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{S} - k_1\right) + \left(\frac{1}{\mu} - k_2\right).$$

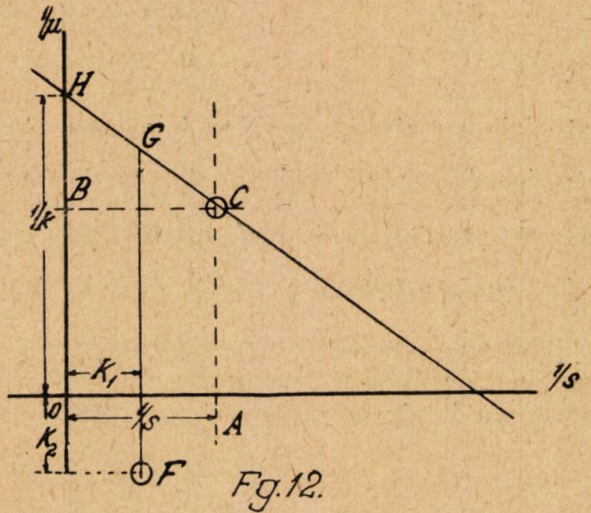


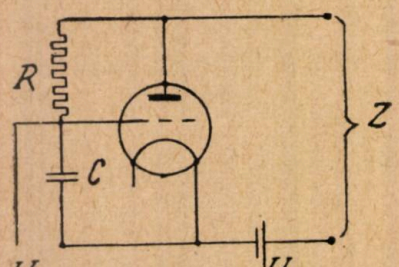
Fig. 12.

Si l'on veut que K' soit pratiquement indépendant de Z, il faut que le premier terme soit négligeable par rapport au second. Par conséquent on appliquera une réaction de courant positive qui approchera k_1 de $\frac{1}{S}$ et en même temps une réaction de tension négative qui rendra k_2 grand par rapport au premier terme.

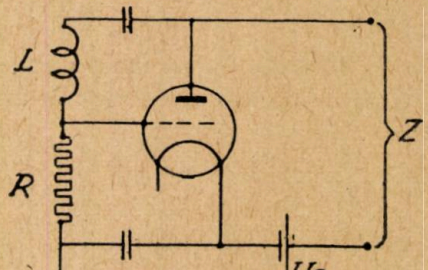
On remarque toutefois que, par l'augmentation du deuxième terme, l'amplification K' décroît. On peut alors profiter de l'effet produit par k_1 (de diminuer le second membre) et l'on ne choisira pas une valeur trop grande pour k_2, pour ne pas diminuer K'.

Un montage avec une pareille réaction présente en plus l'avantage que l'amplification K', dépendant principalement du facteur k_2, n'est point affectée par les variations des tensions d'alimentation, qui peuvent modifier S et μ.

Dans la représentation graphique (fig. 12) le segment OH est inversement proportionnel à l'amplification K, du montage sans réaction. Avec la variation de Z, cette amplification varie également, le point H se deplaçant de B en haut.

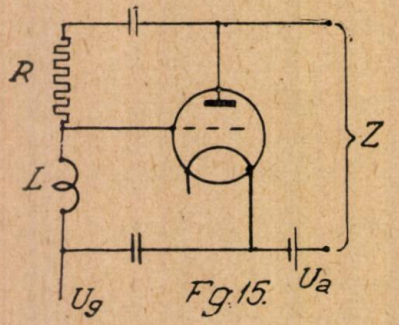


Fg.13

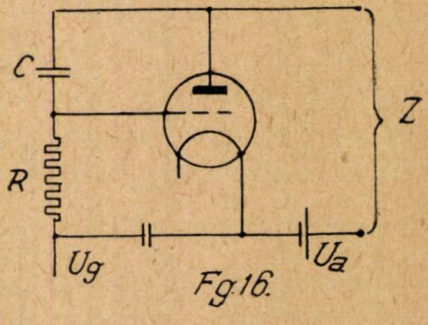


Fg.14

Si l'on introduit une réaction positive de courant et une réaction négative de tension, le point F tombe au-dessous de l'axe $\frac{1}{S}$ et l'amplification mesurée par l'invers du segment $\overline{GF}$ a des variations plus petites avec la fréquence (quand Z varie). Plus k_1 s'approche de $\frac{1}{S}$ plus les variations de l'amplification sont petites. On peut d'ailleurs choisir la réaction de tension pour avoir la même amplification que dans le cas où il n'y a aucune réaction ($\overline{OH} = \overline{FG}$).



Fg.15.



Fg.16.

On utilise tout cela dans les amplificateurs à basse fréquence, pour qu'ils présentent une amplification uniforme, par rapport à la fréquence, malgré la variation, avec la fréquence, des éléments de couplage entre

les étages et de la charge finale. On réalise en même temps une amplification indépendante de la variation des tensions des sources.

6. *Résistance interne à composante inductive ou capacitive.* Si k_1 et k_2 ne sont pas des grandeurs réelles mais complexes, ρ' devient aussi une quantité complexe avec une composante inductive ou capacitive.

Dans ce cas, pour k_1 et k_2 fixés d'avance, la composante peut être variée à l'aide des tensions d'alimentation de la lampe (d'habitude, la tension de grille), et en conséquence par la variation de S, μ et ρ.

On réalise ainsi, à la sortie, des impédances facilement réglables, sans appliquer aucune f. e. m. extérieure à l'entrée, mais uniquement par la variation des tensions de c. c. à l'alimentation.

Dans les figures 13, 14, 15 et 16 on a des exemples d'impédances inductives et capacitives réalisées par cette voie.

Le montage des figures 13 et 14 réalisent des impédances inductives et ceux des figures 15 et 16 des impédances capacitives. La grandeur des composantes peut être variée aussi à l'aide de la valeur de la tension c. c. utilisée pour la polarisation de la grille.

On peut établir les expressions suivantes pour les composantes réelles et réactives de l'impédance Z, quand la résistance interne de la lampe est grande (pentode):

(fig. 13) $\quad R' = \frac{1}{S} \qquad L' = \frac{CR}{S}$

(fig. 14) $\quad R' = \frac{1}{S} \qquad L' = \frac{L}{RS}$

(fig. 15) $\quad R' = \frac{1}{S} \qquad C' = \frac{LS}{R}$

(fig. 16) $\quad R' = \frac{1}{S} \qquad C' = CRS$

7. *L'amplification à petite distorsion.* La caractéristique non linéaire de l'amplificateur fait apparaître des harmoniques à la sortie. Supposons que l'amplitude de l'une d'elles à la sortie est u_0, en absence de toute réaction. En appliquant une réaction, on a, à la sortie, des harmoniques de tension u et des harmoniques de courant i. Alors ces tensions d'harmoniques se trouvent appliquées à l'entrée: $k_1 i - k_2 u$. À la sortie cette tension se retrouvera amplifiée et superposée à la distorsion u_0 introduite par l'amplificateur:

$$\mu = (k_1 i - k_2 u)\ (-K) + \mu_0.$$

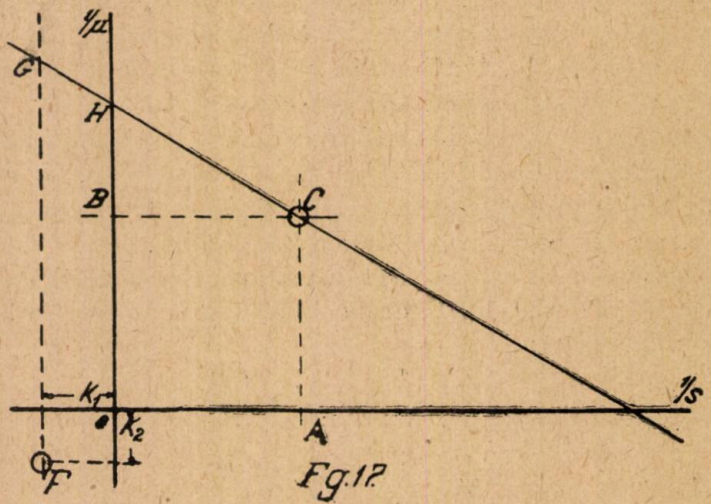
(L'amplification est $-K$, vu le sens des tensions).

En remarquant que $u = -Z\,i$ il en résulte:

$$u = \frac{K'\,u_0}{K} = u_0 \frac{\overline{OH}}{\overline{FG}}.$$

Pour réduire la valeur de u, il faut appliquer une réaction telle que $\overline{FG}$ soit le plus grand possible; on remarque qu'en même temps on réduit l'amplification de l'étage dans la même proportion.

Il est à recommander alors une réaction négative de tension et de courant. Le diagramme se transforme comme dans la figure 17.



Fg.17

En pratique on prend k_2 plusieurs fois plus grand que $\frac{1}{\mu} = \overline{OB}$. Dans ces cas c'est avantageux de renoncer à la réaction négative de courant en la transformant dans une réaction positive, ainsi que $k_1 \sim \frac{1}{S} = \overline{OA}$, pour réaliser en même temps une amplification indépendante de la fréquence (et de la charge).

623.4 BALISTIQUE

LES ACCÉLÉRATIONS DU PROJECTILE DANS L'ÂME

par **I. Linteş**

Résumé. *Les accélérations du projectile dans l'âme sont souvent établies, surtout dans la* Balistique intérieure, *avec des approximations assez grandes. Pour comprendre facilement certains phénoménes, nous nous sommes proposé de donner les expressions analytiques des accélérations de translation et de rotation.*

La « *Balistique Intérieure* » nous fait connaître la relation:

$$1) \qquad \mu . \frac{dV}{dt} = \sigma . P$$

c'est-à-dire l'équation du mouvement du projectile dans l'âme, où: P repérsente la pression des gas: $\sigma = 0{,}805 . a^2$, représente la section utile de l'âme;

$\mu = i . m . \left(1 + 0{,}125 . \frac{\overline{\omega}}{p}\right)$, représente la masse fictive du projectile, m étant la masse réele, i un coefficient des résistances passives, $\overline{\omega}$ le poids de la poudre, p le poids du projectile.

L'accélération de translation du projectile peut être calculée en utilisant les courbes de vitesses et des temps et en appliquant le rapport $\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)$. Cette méthode est, par ailleurs, susceptible d'erreurs, car les différences Δt sont assez petites.

Soient maintenant γ l'accélération du projectile dans l'âme à un moment donné, R les résistances passives et ξ un coefficient de distribution des gaz ou même de la poudre.

Alors l'équation rigoureuse du mouvement sera:

$$2) \qquad \frac{\xi . \omega + p}{g} . \gamma = \sigma . (P - R).$$

Mais, pendant le mouvement, les résistances passives seront:

$$3) \qquad R = A.\left[\gamma.\mathrm{tg}\eta + V^2.\frac{d(\mathrm{tg}\eta)}{dx}\right]$$

avec:

$$A = \frac{4.I_l}{a^2}.\frac{\mathrm{tg}\eta + \varrho}{1 - \varrho.\mathrm{tg}\eta}$$

η étant l'inclinaison des rayures, ϱ le coefficient des frottements et I_l le moment d'inertie longitudinal du projectile.

Alors:

$$4) \qquad \gamma = \frac{P - A.V^2.\dfrac{d(\mathrm{tg}\eta)}{dx}}{\dfrac{\xi.\bar{\omega} + p}{g.\sigma} + A.\mathrm{tg}\eta}.$$

Cette relation nous permet maintenant de faire quelques constatations:

1. Si $\eta = const.$ (pas constant), et si on suppose ξ aussi constant, alors le maximum de γ coïncide avec le maximum de P. Cette remarque a permis d'établir la valeur du «*coefficient d'accélération*»:

$$5) \qquad c_a = \left(\frac{\gamma}{g}\right)_m = \frac{\sigma.P_{max}}{\mu}.$$

2. Si η croît (pas progressif), alors γ peut devenir maximum avant P.

3. Si η décroît (pas regressif), alors γ peut devenir maximum après le maximum de P.

4. Si certains irrégularités peuvent paraître, soit dans la combustion de la poudre, soit à cause des irrégularités de l'usinage (âme ou projectile), alors les différences signalées plus haut peuvent augmenter.

L'accélération de rotation du projectile est:

$$6) \qquad \rho = \frac{2\,\mathrm{tg}\eta}{a}.\gamma + \frac{2V^2}{a}.\frac{d(\mathrm{tg}\eta)}{dx}.$$

Donc elle reste liée avec l'accélération de translation.

Le maximum de cette accélération coïncide avec le maximum de γ seulement si $\eta = const.$ (pas constante), autrement on peut avoir de grandes différences.

Remarque générale. Le projectile, pendant son mouvement dans l'âme, passera par trois points caractéristiques:

1) la pression maximum;

2) l'accélération de translation maximum;

3) l'accélération de rotation maximum.

Ces points peuvent coïncider ou non.

On peut ajouter que, dans l'âme, le projectile ayant aussi un mouvement de ballottement, il aurra aussi une accélération de ballottement; celle-ci a d'habitude lieu vers la volée, à cause des vibrations.